



ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ
ΑΚΑΔΗΜΙΩΝ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΑΝΤΟΧΗ ΥΛΙΚΩΝ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Δ. ΓΑΛΙΑΤΣΑΤΟΥ
ΓΕΡΑΣΙΜΟΥ Σ. ΛΙΝΑΡΔΑΤΟΥ
ΔΙΟΝΥΣΙΟΥ Σ. ΛΙΝΑΡΔΑΤΟΥ

Β' ΕΚΔΟΣΗ



ΑΘΗΝΑ 2016

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο Πρώτο

Εισαγωγικές έννοιες

1.1	Σκοπός και αντικείμενο της Αντοχής Υλικών.	1
1.1.1	Η έννοια των παραμορφώσεων.	3
1.1.2	Η έννοια των φορτίων.	4
1.1.3	Η έννοια των τάσεων.	4
1.1.4	Ορθές τάσεις.	5
1.1.5	Διατμητικές ή πλάγιες ή εγκάρσιες τάσεις.	5
1.1.6	Μονάδες μετρήσεως της τάσεως.	5
1.1.7	Συστήματα και μονάδες μετρήσεως.	6
1.2	Νόμος ελαστικότητας του Hooke.	7
1.3	Εφελκυσμός και πειράματα εφελκυσμού.	9
1.4	Θλίψη και πειράματα θλίψεως.	12
1.4.1	Πείραμα θλίψεως του κάλυβα.	13
1.4.2	Σύγκριση διαγραμμάτων θλίψεως και εφελκυσμού.	13
1.5	Εγκάρσια συστολή και διαστολή.	14
1.6	Όλκιμα και ψαθυρά υλικά.	15
1.7	Σκληρότητα υλικού.	16
1.7.1	Στατικές μέθοδοι σκληρομετρήσεως.	16
1.7.2	Δυναμικές μέθοδοι σκληρομετρήσεως.	19
1.7.3	Μέθοδοι σκληρομετρήσεως με αναπήδηση.	19
1.8	Επίδραση θερμοκρασίας και χρόνου στην αντοχή των υλικών.	21
1.8.1	Συστολή και διαστολή λόγω μεταβολών της θερμοκρασίας.	21
1.8.2	Μεταβολή των ορίων αντοχής των υλικών λόγω υψηλών θερμοκρασιών.	22
1.8.3	Επίδραση του χρόνου.	22
1.8.4	Πείραμα ερπυσμού.	23
1.8.5	Όρια αντοχής εν θερμώ.	23
1.8.6	Από τι εξαρτάται το φαινόμενο του ερπυσμού;	24
1.9	Κόπωση υλικού.	25
1.9.1	Διάγραμμα κοπώσεως.	26
1.9.2	Παράγοντες που καθορίζουν την αντοχή υλικών σε κόπωση.	27
1.10	Συγκέντρωση τάσεων.	27
1.11	Επιφανειακή θλίψη.	29
1.12	Εντατική κατάσταση.	31
1.13	Είδη καταπονήσεων.	32
1.14	Αστοχία υλικών.	34
1.14.1	Επιτρεπόμενη τάση και συντελεστής ασφαλείας.	34
1.14.2	Καθορισμός του συντελεστή ασφαλείας.	35
1.15	Σύνοψη βασικών εννοιών.	36

Κεφάλαιο Δεύτερο

Εφελκυσμός – Θλίψη – Διάτμηση

2.1	Εισαγωγή.	39
2.2	Τάσεις και παραμορφώσεις στον εφελκυσμό.	40
2.2.1	Τάσεις εφελκυσμού.	40

2.2.2	Επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού.	41
2.2.3	Συντελεστής ασφαλείας για τον εφελκυσμό.	42
2.2.4	Σχέση εφελκυσμού.	42
2.2.5	Εφαρμογές της σχέσεως εφελκυσμού.	42
2.2.6	Παραμορφώσεις εφελκυσμού.	44
2.3	Τάσεις και παραμορφώσεις στη θλίψη.	47
2.3.1	Τάσεις στη θλίψη.	47
2.3.2	Επιτρεπόμενη τάση θλίψεως.	48
2.3.3	Συντελεστής ασφαλείας για τη θλίψη.	48
2.3.4	Σχέση θλίψεως.	48
2.3.5	Εφαρμογές της σχέσεως θλίψεως.	49
2.3.6	Παραμορφώσεις στη θλίψη.	51
2.3.7	Σύγκριση εφελκυσμού και θλίψεως.	52
2.4	Κυλινδρικά δοχεία πίεσεως με λεπτά τοιχώματα.	53
2.4.1	Καταπόνηση από τη δύναμη που ενεργεί αξονικά.	54
2.4.2	Καταπόνηση από τη δύναμη που ενεργεί εγκάρσια.	54
2.4.3	Επιλογή πάχους τοιχωμάτων κυλινδρικού δοχείου.	54
2.5	Τάσεις αναπτυσσόμενες από παρεμπόδιση.	56
2.5.1	Ανάπτυξη τάσεων λόγω αύξησεως της θερμοκρασίας.	56
2.5.2	Ανάπτυξη τάσεων λόγω μειώσεως της θερμοκρασίας.	57
2.5.3	Ανάπτυξη τάσεων λόγω συνδυασμού εξωτερικών φορτίων και μεταβολής της θερμοκρασίας.	58
2.6	Τάσεις και παραμορφώσεις στη διάτμηση.	60
2.6.1	Τμήση και διάτμηση.	60
2.6.2	Τάσεις στη διάτμηση.	60
2.6.3	Επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως.	61
2.6.4	Συντελεστής ασφαλείας για τη διάτμηση.	62
2.6.5	Σχέση διατμήσεως.	62
2.6.6	Εφαρμογές της σχέσεως διατμήσεως.	62
2.6.7	Παραμορφώσεις στη διάτμηση.	64
2.6.8	Συνθήκη κοπής.	65
2.6.9	Σύγκριση διατμήσεως με εφελκυσμό και θλίψη.	66
2.7	Σύνθλιψη άντυγας οπής.	67
2.7.1	Σχέση συνθλίψεως άντυγας οπής.	68
2.7.2	Καταπόνηση ήλων και κοχλιών σε διάτμηση.	69
2.8	Συγκολλήσεις.	73
2.9	Σύνοψη βασικών εννοιών.	74

Κεφάλαιο Τρίτο

Κέντρο βάρους και ροπή αδράνειας

3.1	Εισαγωγή.	77
3.2	Κέντρο βάρους.	77
3.2.1	Γιατί μας ενδιαφέρει η θέση του κέντρου βάρους;	77
3.2.2	Πώς προσδιορίζεται η θέση του κέντρου βάρους;	78
3.2.3	Υπολογισμός κέντρου βάρους συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων.	79
3.3	Ροπή αδράνειας.	86
3.3.1	Γιατί μας ενδιαφέρει η ροπή αδράνειας;	86
3.3.2	Πώς υπολογίζεται η ροπή αδράνειας;	87
3.3.3	Παράλληλη μετατόπιση αξόνων αδράνειας.	90
3.3.4	Υπολογισμός ροπών αδράνειας συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων.	91
3.4	Ακτίνα αδράνειας.	95
3.4.1	Γιατί μας ενδιαφέρει η ακτίνα αδράνειας;	95

3.4.2 Πώς υπολογίζεται η ακτίνα αδράνειας;.....	95
3.5 Ροπή αντιστάσεως.....	96
3.5.1 Γιατί μας ενδιαφέρει η ροπή αντιστάσεως;	98
3.5.2 Πώς υπολογίζεται η ροπή αντιστάσεως;	98
3.6 Πολική ροπή αδράνειας.	100
3.6.1 Γιατί μας ενδιαφέρει η πολική ροπή αδράνειας;	100
3.6.2 Πώς υπολογίζεται η πολική ροπή αδράνειας;.....	100
3.7 Πολική ροπή αντιστάσεως.....	102
3.7.1 Γιατί μας ενδιαφέρει η πολική ροπή αντιστάσεως;.....	102
3.7.2 Πώς υπολογίζεται η πολική ροπή αντιστάσεως;	102
3.8 Παράλληλη μετατόπιση και στροφή του συστήματος αξόνων.....	104
3.9 Σύνοψη βασικών εννοιών.	108

Κεφάλαιο Τέταρτο *Στατική θεωρία της δοκού*

4.1 Εισαγωγή.	109
4.2 Τρόποι στηρίξεως δοκού.	109
4.2.1 Είδη στηρίξεως.	109
4.2.2 Κατηγοριοποίηση δοκών με βάση τον τρόπο στηρίξεώς τους.....	112
4.2.3 Συνθήκες στατικής ισορροπίας δοκού.	112
4.3 Ορθές και τέμνουσες δυνάμεις, καμπτικές ροπές.	118
4.3.1 Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων.....	119
4.3.2 Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων.	120
4.3.3 Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών.	121
4.3.4 Η περίπτωση των κατανεμημένων φορτίων.	122
4.3.5 Ιδιότητες των Διαγραμμάτων Τεμνουσών Δυνάμεων και Καμπτικών Ροπών.	128
4.4 Σύνοψη βασικών εννοιών.	129

Κεφάλαιο Πέμπτο *Κάμψη*

5.1 Εισαγωγή.	131
5.2 Η καταπόνηση της κάμψεως.....	131
5.3 Συμμετρική καθαρή κάμψη.	133
5.3.1 Η τεχνική θεωρία της κάμψεως	134
5.3.2 Οι τάσεις στη συμμετρική καθαρή κάμψη.....	134
5.3.3 Η σχέση κάμψεως.	135
5.3.4 Εφαρμογές της σχέσεως κάμψεως.	135
5.4 Παραμορφώσεις της καθαρής κάμψεως.....	138
5.4.1 Υπολογισμός ελαστικής γραμμής	140
5.4.2 Γωνία στροφής των ακραίων διατομών.	142
5.4.3 Σύγκριση συμμετρικής καθαρής κάμψεως με εφελκυσμό και θλίψη.....	145
5.5 Σύνοψη βασικών εννοιών.	146

Κεφάλαιο Έκτο *Στρέψη*

6.1 Εισαγωγή.	147
6.2 Η καταπόνηση της στρέψεως.	147
6.3 Τάσεις στρέψεως σε δοκό κυκλικής διατομής.....	148
6.3.1 Ο νόμος του Hooke για τη στρέψη.....	149
6.3.2 Οι τάσεις στρέψεως και η σχέση στρέψεως.	150

6.3.3 Προβλήματα στρέψεως.....	151
6.3.4 Υπολογισμός στροφής και γωνιακής παραμορφώσεως.	152
6.4 Τάσεις στρέψεως σε δοκό μη κυκλικής διατομής.....	154
6.5 Στρέψη ράβδου με λεπτά τοιχώματα.	155
6.6 Στρέψη περιστρεφόμενου άξονα.	157
6.6.1 Μονάδες μετρήσεως ισχύος και αριθμού στροφών ανά μονάδα χρόνου.	158
6.6.2 Διαστασιολόγηση περιστρεφόμενου άξονα.	158
6.7 Σύνοψη βασικών εννοιών.	159

Κεφάλαιο Έβδομο

Λυγισμός

7.1 Εισαγωγή.	161
7.2 Ο λυγισμός.	161
7.3 Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού.	162
7.4 Ισοδύναμο μήκος λυγισμού και λυγηρότητα μιας ράβδου.....	163
7.4.1 Τρόποι στερεώσεως των άκρων ράβδου.....	163
7.4.2 Ισοδύναμο μήκος λυγισμού	164
7.4.3 Λυγηρότητα ράβδου.....	164
7.5 Ο τύπος του Euler.	165
7.5.1 Κρίσιμη τάση λυγισμού.	166
7.5.2 Δεύτερη μορφή του τύπου του Euler.....	166
7.5.3 Περιοχή ισχύος του τύπου του Euler.....	166
7.5.4 Επιτρεπόμενη τάση λυγισμού.....	167
7.5.5 Προβλήματα λυγισμού.	168
7.6 Οι τύποι Tetmajer.	170
7.7 Η μέθοδος των συντελεστών ω	171
7.7.1 Πεδίο εφαρμογής της μεθόδου των συντελεστών ω	171
7.7.2 Ο συντελεστής ω	171
7.7.3 Τα βήματα της μεθόδου συντελεστών ω	172
7.8 Σύνοψη βασικών εννοιών.	174

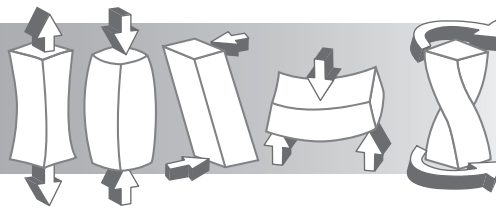
Κεφάλαιο Όγδοο

Σύνθετες καταπονήσεις

8.1 Εισαγωγή.	175
8.2 Ισοδύναμη τάση.....	176
8.3 Έκκεντρη θλίψη.	177
8.4 Πυρήνας διατομής.....	179
8.4.1 Ιδιότητες πυρήνων διατομών.....	180
8.4.2 Πυρήνες διατομής απλών σχημάτων.....	180
8.5 Έκκεντρη θλίψη χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό.....	181
8.5.1 Ορθογώνια διατομή.	182
8.5.2 Κυκλική διατομή.....	183
8.6 Έκκεντρη θλίψη και λυγισμός.	184
8.7 Στρέψη και αξονική καταπόνηση.....	185
8.8 Στρέψη και κάμψη.	186
8.9 Σύνοψη βασικών εννοιών.	189
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ I Πίνακας αντιστοιχίσεως Ελληνικής και Αγγλικής ορολογίας	191
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ II Πίνακες συντελεστών λυγισμού.....	192
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ III Ερωτήσεις κεφαλαίων	197
Ευρετήριο	199
Βιβλιογραφία.....	203

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγικές έννοιες



1.1 Σκοπός και αντικείμενο της Αντοχής Υλικών.

Πολλοί από μας, έχοντας δει τους κάβους των δεμένων πλοίων, μπορεί να έχουμε αναρωτηθεί πώς αυτοί έχουν σχεδιαστεί, ώστε να αντέχουν και να μην σπάνε. Από την εμπειρία μας, οι κάβοι μάς θυμίζουν τα συρματόσχοινα. Ξέρομε ότι εάν τραβήξομε τη μία άκρη ενός συρματόσχοινου, του οποίου η άλλη άκρη είναι γερά στερεωμένη, τότε δημιουργείται στο σημείο στερεώσεως μία άλλη δύναμη, η οποία τραβάει το συρματόσχοινο αντίθετα. Σύμφωνα με το αξίωμα της δράσεως-αντιδράσεως της Φυσικής, η δύναμη που δημιουργείται στο σημείο στερεώσεως είναι η αντίδραση της δυνάμεως που ασκούμε στο άλλο άκρο και έχει ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά μ' αυτήν. Η δύναμη που ασκούμε και η αντίδρασή της ισορροπούν μέσω του συρματόσχοινου.

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η ύλη του συρματόσχοινου αποτελείται από μόρια¹. Μεταξύ των μορίων ασκούνται ελκτικές δυνάμεις, οι οποίες τα συγκρατούν. Όταν τραβάμε το συρματόσχοινο από τη μία άκρη, η δύναμη που ασκούμε προσπαθεί να απομακρύνει τα μόρια μεταξύ τους. Μεταξύ των μορίων ασκούνται πρόσθετες ελκτικές δυνάμεις, οι οποίες προσπαθούν να τα επαναφέρουν στην αρχική τους θέση. Όταν σταματήσομε να τραβάμε το συρματόσχοινο, η αντίδραση, καθώς επίσης και οι πρόσθετες ελκτικές δυνάμεις, μηδενίζονται.

Στο εργαστήριο, με τη χρήση ειδικών μηχανών έλξεως, διαπιστώνομε ότι η άσκηση δυνάμεως στο άκρο του συρματόσχοινου επιφέρει αύξηση του μήκους του. Αν σταματήσει να ασκείται η δύναμη, το συρματόσχοινο επανέρχεται στο αρχικό του μήκος. Η ιδιότητα αυτή οφείλεται στην εσωτερική έλξη μεταξύ των μορίων του συρματόσχοινου, που αυξομειώνεται ανάλογα με τις εξωτερικές δυνάμεις που δρουν σ' αυτό.

Εάν συνεχίσομε τα πειράματα έλξεως του συρμα-

τόσχοινο, παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα όριο στην ασκούμενη δύναμη, πέρα από το οποίο παραμένει μια μόνιμη αύξηση του μήκους, που καλείται **μόνιμη παραμόρφωση**. Αν συνεχίσομε να αυξάνομε και άλλο την ασκούμενη δύναμη, παρατηρούμε ότι το συρματόσχοινο σπάει.

Όλα τα παραπάνω αποτελούν, μεταξύ άλλων, αντικείμενα του μαθήματος της Αντοχής Υλικών. Η μελέτη της Αντοχής των Υλικών είναι απολύτως απαραίτητη για τον σχεδιασμό και την υλοποίηση όλων των κατασκευαστικών έργων και βασίζεται σε κάποιες παραδοχές, όπως είναι η ομοιογένεια των σωμάτων, το ευθύγραμμο σχήμα, η σχέση μεταξύ των διαστάσεών τους κ.ο.κ..

Το πρώτο βήμα για τη δημιουργία μιας κατασκευής είναι η επιλογή των υλικών που θα χρησιμοποιηθούν γι' αυτήν. Η επιλογή των υλικών είναι τεράστιας σημασίας, τόσο για την ασφάλεια και τη λειτουργικότητά της, όσο και για το κόστος της. Όλες οι κατασκευές βρίσκονται υπό την επίδραση φορτίων, τα οποία έχουν ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη εντάσεων σ' αυτές, που είναι ποικίλες και συνήθως σύνθετες. Για την επιλογή των υλικών μιας κατασκευής λαμβάνονται υπόψη όλες οι δυνάμεις που αυτά θα δεχθούν και οι οποίες πηγάζουν από:

- 1) Το ίδιο το βάρος της κατασκευής.
- 2) Το ωφέλιμο φορτίο της κατασκευής.
- 3) Τη λειτουργία των μηχανών.
- 4) Τη λειτουργία γερανογεφυρών.
- 5) Την πίεση κάποιου αερίου ή υγρού που χρησιμοποιείται στην κατασκευή.
- 6) Τη μεταβολή της θερμοκρασίας.
- 7) Τα καιρικά φαινόμενα (π.χ. τη δύναμη του αέρα, το βάρος του χιονιού, τη δύναμη προσκρούσεως από το καλάζι).
- 8) Το φρενάρισμα.

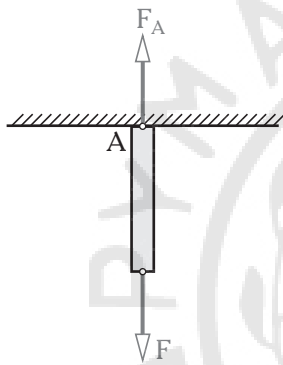
Τα υλικά που σήμερα χρησιμοποιούν οι κατασκευαστές έργων είναι καλά μελετημένα, με αποτέλεσμα να είναι γνωστές οι ιδιότητές τους και ο τρόπος

¹ Για τις ανάγκες της εισαγωγής περιορίζομαστε στην έννοια των μορίων, παρά το γεγονός ότι στα μέταλλα έχουμε κρυσταλλική δομή.

12 mm και μήκους 50 cm εφελκύεται από δύναμη 12.000 N. Να υπολογιστεί η επιμήκυνση της ράβδου εάν το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της είναι ίσο με $2,1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$.

1.3 Εφελκυσμός και πειράματα εφελκυσμού.

Ας θεωρήσουμε το στερεό σώμα του σχήματος 1.3α, πάνω στον άξονα του οποίου ασκούνται δύο δυνάμεις ίσες και αντίθετες, οι οποίες τείνουν να αυξήσουν το μήκος του. Το σώμα του σχήματος 1.3α λέμε ότι υφίσταται εφελκυσμό ή αλλιώς ότι εφελκύεται. Το σώμα είναι στερεωμένο στο ένα άκρο του και δύναμη F ασκείται στο άλλο άκρο του. Η δεύτερη δύναμη $F_A = F$ είναι η **αντίδραση**. Για τους υπολογισμούς μας λαμβάνομε μόνο τη μία από τις δύο δυνάμεις.



Σχ. 1.3α

Στερεό σώμα που εφελκύεται.

Η μελέτη του εφελκυσμού γίνεται με το πείραμα του εφελκυσμού, με το οποίο προσδιορίζουμε την αντοχή ενός υλικού όταν καταπονείται σε εφελκυσμό. Το πείραμα του εφελκυσμού λαμβάνει χώρα σε ειδική μηχανή που καλείται **μηχανή εφελκυσμού** (σχ. 1.3β) και θεωρείται το πλέον ακριβές από τα πειράματα που γίνονται για τον προσδιορισμό της αντοχής των υλικών.

Στο πείραμα του εφελκυσμού χρησιμοποιούνται ράβδοι προκαθορισμένης μορφής και μεγέθους που καλούνται **δοκίμια**, τα οποία συγκρατούνται στη μηχανή εφελκυσμού με δύο σιαγόνες. Συνήθως, τα δοκίμια έχουν κυλινδρική μορφή και το μήκος τους είναι πενταπλάσιο της διαμέτρου τους.

Με τη βοήθεια υδραυλικής πίεσης τα δοκίμια καταπονούνται σε εφελκυσμό, υφίστανται δηλαδή αύξηση του μήκους τους, παραμόρφωση που καλείται **επιμήκυνση** και **ελάττωση** της διατομής τους.

Η μηχανή εφελκυσμού διαθέτει όργανα για να μετρήσει κατά τη διάρκεια των πειραμάτων εφελκυσ-

μού την εφελκυστική δύναμη και την επιμήκυνση που προκαλεί η δύναμη αυτή. Η εφελκυστική δύναμη που εφαρμόζεται στα δοκίμια μεταβάλλεται σταδιακά από μηδέν μέχρι την τιμή στην οποία θραύεται το δοκίμιο. Ταυτόχρονα, καταγράφεται διάγραμμα αναπτυσσομένων τάσεων ή δυνάμεων και επιμηκύνσεων ή ανηγμένων επιμηκύνσεων, το οποίο ονομάζεται **διάγραμμα εφελκυσμού**. Σημειώνεται ότι έχει επικρατήσει η δημιουργία του διαγράμματος τάσεων-ανηγμένων επιμηκύνσεων, γιατί τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτό ισχύουν για κάθε δοκίμιο, από το ίδιο υλικό και όχι για το συγκεκριμένο δοκίμιο για το οποίο έγινε το πείραμα.

Το διάγραμμα εφελκυσμού απεικονίζει τα αποτελέσματα του πειράματος εφελκυσμού και δίνει σημαντικές πληροφορίες για την αντοχή του υλικού, για το οποίο έγινε το πείραμα. Από το διάγραμμα εφελκυσμού μπορούμε να λάβουμε τα μηχανικά χαρακτηριστικά του υλικού που είναι απαραίτητα για τον υπολογισμό της αντοχής των κατασκευών.

Η διαδικασία του πειράματος εφελκυσμού και ο τρόπος επεξεργασίας των μετρήσεων περιγράφονται με κάθε λεπτομέρεια στο Γερμανικό Βιομηχανικό Πρότυπο DIN50145 και στα αντίστοιχα πρότυπα του Διεθνούς Οργανισμού Τυποποιήσεων (ISO).

Για να είναι δυνατή η σύγκριση των αποτελεσμάτων των πειραμάτων εφελκυσμού που πραγματοποιούνται σε διαφορετικά εργαστήρια, το Γερμανικό Βιομηχανικό Πρότυπο DIN50125 καθορίζει επακριβώς τις συνθήκες του πειράματος. Οι «συνθήκες πειράματος» περιλαμβάνουν κυρίως τον αυστηρό καθορισμό της μορφής, του μεγέθους διατομής, του μήκους και της ποιότητας επιφάνειας των δοκιμίων, καθώς και



Σχ. 1.3β

Μηχανή εφελκυσμού.

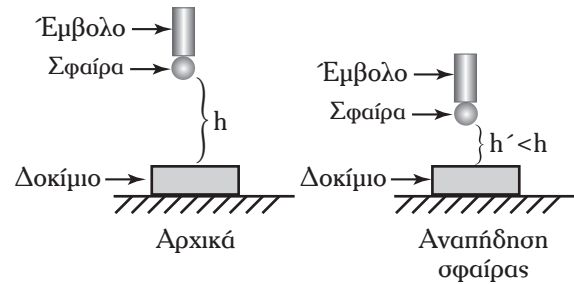
μετρείται και όχι στην παραμόρφωση που προκαλεί η φόρτιση, όπως γίνεται στις μεθόδους των άλλων κατηγοριών. Συγκεκριμένα, οι μέθοδοι της κατηγορίας αυτής στηρίζονται στη μέτρηση της αναπηδήσεως σώματος που πέφτει από ορισμένο ύψος πάνω στην επιφάνεια του υλικού που σκληρομετρούμε.

1) Μέθοδος Shore.

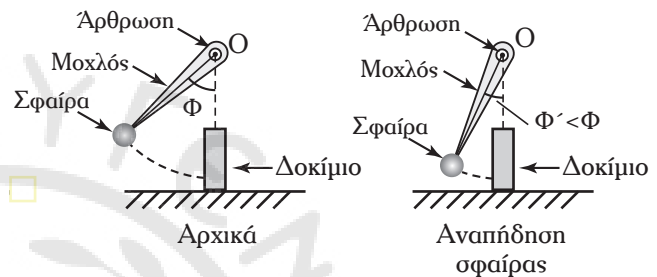
Η αρχή λειτουργίας του σκληρομέτρου Shore παρουσιάζεται στο σχήμα 1.7δ. Περιλαμβάνει ένα έμβολο, στο κάτω μέρος του οποίου υπάρχει μια σφαίρα. Το έμβολο έχει τη δυνατότητα να κινείται ελεύθερα εντός του κελύφους του σκληρομέτρου. Η διαδικασία της σκληρομετρήσεως γίνεται ως εξής: Το έμβολο με τη σφαίρα αφήνεται να πέσει στην επιφάνεια του υλικού που σκληρομετρούμε. Εάν το υλικό είναι πάρα πολύ σκληρό, η σφαίρα δεν το παραμορφώνει και το έμβολο αναπηδά στην αρχική θέση. Αντίθετα, εάν το υλικό στο οποίο προσπίπτει η σφαίρα δεν είναι τόσο σκληρό, τότε η σφαίρα παραμορφώνει το υλικό, χάνει μέρος της κινητικής της ενέργειας και το έμβολο αναπηδά φτάνοντας σε ύψος (ύψος αναπηδήσεως) χαμηλότερο από το αρχικό. Όσο πιο μαλακό είναι το υλικό που σκληρομετρείται, τόσο μεγαλύτερη είναι η παραμόρφωση που υφίσταται η επιφάνειά του από τη σφαίρα, με αποτέλεσμα η αναπήδηση του εμβόλου να φτάνει σε ακόμη χαμηλότερο ύψος αναπηδήσεως. Αυτό που μετρούμε είναι η διαφορά μεταξύ του αρχικού ύψους του εμβόλου και του ύψους αναπηδήσεως. Από τη διαφορά αυτή προσδιορίζεται η σκληρότητα κατά Shore.

2) Μέθοδος Leesen.

Η αρχή λειτουργίας του σκληρομέτρου Leesen παρουσιάζεται στο σχήμα 1.7ε. Περιλαμβάνει έναν μοχλό, το ένα άκρο του οποίου στηρίζεται σε άρθρωση, ενώ στο άλλο άκρο του υπάρχει ο σφαιρικός διεισδυτής. Η άρθρωση επιτρέπει στον μοχλό να κινείται κυκλικά μπροστά από μία κλίμακα γωνιών. Η διαδικασία της σκληρομετρήσεως γίνεται ως εξής: Σηκώνουμε τον μοχλό σ' ένα σημείο της κλίμακας (αρχική γωνία) και τον αφήνουμε να πέσει στην επιφάνεια του υλικού που σκληρομετρούμε. Το άκρο του μοχλού που έχει τον σφαιρικό διεισδυτή κτυπά στην επιφάνεια του υλικού και αναπηδά. Εάν το υλικό είναι πάρα πολύ σκληρό, η σφαίρα δεν το παραμορφώνει και ο μοχλός αναπηδά στην αρχική θέση. Αντίθετα, εάν το υλικό στο οποίο προσπίπτει



Σχ. 1.7δ
Μέθοδος Shore.

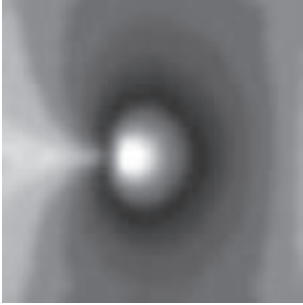


Σχ. 1.7ε
Μέθοδος Leesen.

η σφαίρα δεν είναι τόσο σκληρό, τότε η σφαίρα παραμορφώνει το υλικό, χάνει μέρος της κινητικής της ενέργειας και ο μοχλός αναπηδά φτάνοντας σε γωνία μικρότερη από την αρχική. Όσο πιο μαλακό είναι το υλικό που σκληρομετρείται, τόσο μεγαλύτερη είναι η παραμόρφωση που υφίσταται η επιφάνειά του από τη σφαίρα, με αποτέλεσμα η αναπήδηση του μοχλού να φτάνει σε ακόμη μικρότερη γωνία αναπηδήσεως. Αυτό που μετρούμε είναι η διαφορά μεταξύ της αρχικής γωνίας του μοχλού και της γωνίας αναπηδήσεως. Από τη διαφορά αυτή, με τη βοήθεια των πινάκων του σκληρομέτρου Leesen προσδιορίζεται η σκληρότητα κατά Leesen.

Ασκήσεις.

1. Δοκίμιο από ανθρακοχάλυβα έχει σκληρότητα κατά Brinell $HB = 2.200 \text{ N/mm}^2$. Να βρεθεί η τάση θραύσεώς του σε εφελκυσμό. Δίνεται ο συντελεστής αναλογίας του ανθρακοχάλυβα της σχέσεως τάσεως θραύσεως/σκληρότητας κατά Brinell $k = 0,36$.
2. Η τάση θραύσεως σε εφελκυσμό ενός τεμαχίου από αλουμίνιο είναι $\sigma_{\theta\theta} = 190 \text{ N/mm}^2$. Να υπολογιστεί η σκληρότητά του κατά Brinell. Δίνεται ο συντελεστής αναλογίας του αλουμινίου για τη σχέση τάσεως θραύσεως/σκληρότητας κατά Brinell $k = 0,35$.



Σχ. 1.10β

Εικόνα ρωγμής σε υλικό από εφαρμογή της μεθόδου της ραδιομετρικής θερμοελαστικής ανάλυσης τάσεων.

- 1) Η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στη συγκέντρωση τάσεων και
- 2) ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων.

Λύση.

Για την ελλειπτική οπή ισχύει: $a = 2 \cdot \beta$.

- 1) Η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στη συγκέντρωση τάσεων είναι:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \sigma \cdot \left(1 + \frac{2a}{\beta}\right) = \sigma \cdot \left(1 + \frac{4\beta}{\beta}\right) = \\ &= 5 \cdot \sigma = 15 \text{ N/mm}^2.\end{aligned}$$

- 2) Ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων είναι:

$$k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma} = 5.$$

Παράδειγμα 15.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.20) να υπολογιστούν:

- 1) Η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στη συγκέντρωση τάσεων και
- 2) ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων για την περίπτωση μικρής κυκλικής οπής ακτίνας a που βρίσκεται σε επίπεδη πλάκα, στην οποία αναπτύσσεται εφελκυστική ονομαστική τάση $\sigma = 2 \text{ N/mm}^2$.

Λύση.

Ο κύκλος μπορεί να θεωρηθεί ως έλλειψη με τον μεγάλο ημιάξονά της να είναι ίσος με τον μικρό $a = \beta$.

- 1) Έτσι, για τον υπολογισμό της μέγιστης αναπτυσσόμενης τάσεως στη συγκέντρωση τάσεων, χρησιμοποιούμε τη σχέση (1.20) θέτοντας $a = \beta$:

$$\sigma_{\max} = \sigma \cdot \left(1 + \frac{2a}{a}\right) = 3 \cdot \sigma = 6 \text{ N/mm}^2.$$

Δηλαδή, η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στη συγκέντρωση τάσεων στην κυκλική οπή είναι τριπλάσια της ονομαστικής.

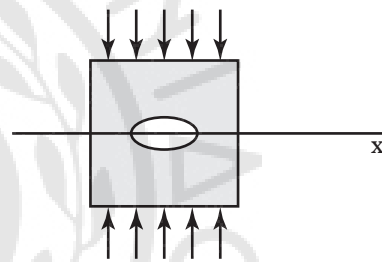
- 2) Ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων είναι:

$$k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma} = 3.$$

Άσκηση

Δίνεται η επίπεδη πλάκα του σχήματος 1.10γ, η οποία έχει πολύ μικρή οπή σε σχήμα ελλείψεως με μεγάλο ημιάξονα τριπλάσιο του μικρού ημιάξονα. Στην πλάκα εφαρμόζεται θλιπτική ονομαστική τάση ίση με $\sigma = 35 \text{ N/mm}^2$. Να υπολογιστούν:

- α) Η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στη συγκέντρωση τάσεων και
- β) ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων.



Σχ. 1.10γ

1.11 Επιφανειακή θλίψη.

Είναι συχνό το φαινόμενο να μεταφέρεται θλιπτική δύναμη από ένα σώμα σ' άλλο μέσω της επιφάνειας επαφής τους. Για παράδειγμα, στο σχήμα 1.11α απεικονίζεται ένα σώμα Σ_1 , στο οποίο ασκείται θλιπτική δύναμη F .

Το σώμα Σ_1 έρχεται σε επαφή με ένα άλλο σώμα Σ_2 μέσω της επιφάνειας επαφής τους A . Η θλιπτική δύναμη F μεταφέρεται από το σώμα Σ_1 στο σώμα Σ_2 μέσω της επιφάνειας επαφής τους A . Η εφαρμογή της δυνάμεως F στην επιφάνεια A έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη πίεσεως στην επιφάνεια A . Η πίεση αυτή ονομάζεται **επιφανειακή πίεση**, συμβολίζεται με p και δίνεται από το πηλίκο της δυνάμεως F προς το εμβαδόν της επιφάνειας A , δηλαδή:

$$p = \frac{F}{A}. \quad (1.23)$$

Οι μονάδες μετρήσεως της **επιφανειακής πίεσεως** στο Διεθνές Σύστημα είναι το 1 N/m^2 , στο C.G.S.

τροπέμενη επιφανειακή πίεση είναι $p_{\text{εν}} = 4 \text{ N/cm}^2$.

Λύση.

Το εμβαδόν της κυκλικής επιφάνειας επαφής δίνεται από τη σχέση:

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot D^2. \quad (1)$$

Η επιφανειακή πίεση p που αναπτύσσεται στην επιφάνεια αυτή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$p = \frac{F}{A}$$

και πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση με την επιτρεπόμενη επιφανειακή πίεση. Δηλαδή πρέπει:

$$\frac{F}{A} \leq p_{\text{εν}} \Leftrightarrow A \geq \frac{F}{p_{\text{εν}}}. \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1) στη σχέση (2) και λύνοντας ως προς τη διάμετρο έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} \cdot D^2 &\geq \frac{F}{p_{\text{εν}}} \Leftrightarrow D^2 \geq \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot p_{\text{εν}}} \Leftrightarrow D \geq \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot p_{\text{εν}}}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow D \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 1.000 \text{ N}}{3,14 \cdot 4 \text{ N/cm}^2}} \Leftrightarrow D \geq 17,85 \text{ cm}. \end{aligned}$$

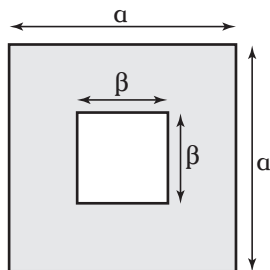
Επομένως, η διάμετρος της κυκλικής επιφάνειας πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση με 17,85cm.

Ασκήσεις.

1. Η επιφάνεια επαφής μεταξύ δύο σωμάτων έχει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα 1.11β, με $a = 60 \text{ cm}$ και $\beta = 30 \text{ cm}$. Η επιφάνεια δέχεται θλιπτικό φορτίο $F = 5.000 \text{ N}$.

Να υπολογιστεί η επιφανειακή πίεση που αναπτύσσεται στην επιφάνεια αυτή.

2. Ποια πρέπει να είναι η πλευρά a τετραγωνικής



Σχ. 1.11β

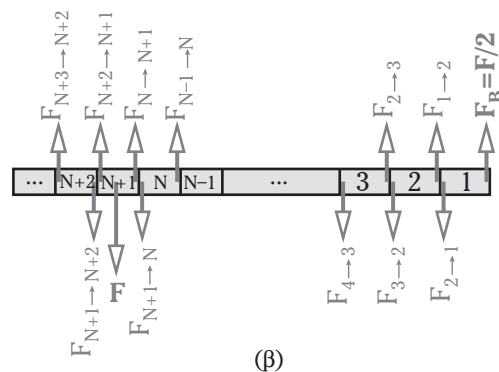
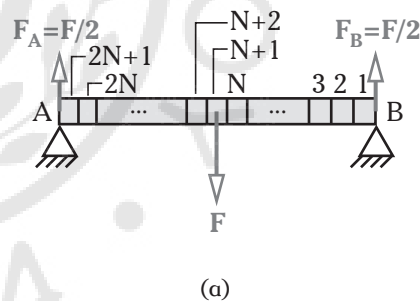
επιφάνειας που χρησιμοποιείται για τη μεταβίβαση θλιπτικής δύναμης $F = 13.500 \text{ N}$; Δίνεται ότι η επιτρεπόμενη επιφανειακή πίεση είναι $p_{\text{εν}} = 60 \text{ N/cm}^2$.

1.12 Εντατική κατάσταση.

As θεωρήσουμε τη ράβδο του σχήματος 1.12(α), η οποία ισορροπεί στηριζόμενη στα άκρα της Α και Β. Στο μέσο της ράβδου ενεργεί εξωτερικό φορτίο F και στα άκρα της Α και Β οι δυνάμεις $F_A = F/2$ και $F_B = F/2$ από τα στηρίγματα. Οι δυνάμεις αυτές αποτελούν τις εξωτερικές δυνάμεις, που ενεργούν στη ράβδο. Γενικότερα:

Οι **εξωτερικές δυνάμεις** που ενεργούν σ' ένα σώμα είναι τα φορτία του και οι δυνάμεις από τα στηρίγματά του.

Η εμφάνιση των δυνάμεων F_A και F_B από τα στηρίγματα οφείλεται στο ότι η εξωτερική δύναμη F «φτάνει» στα άκρα Α και Β διά μέσου του υλικού της ράβδου. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ράβδος αποτελείται από μικρά τμήματα, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.12(α), τα οποία αριθμούνται με 1, 2, 3, ..., N-1, N, N+1, ..., 2N, 2N+1. Στο πρώτο μικρό τμήμα της ράβδου που βρίσκεται στο άκρο Β επιδρούν η



Σχ. 1.12

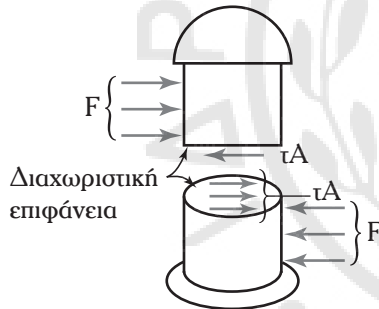
(α) Ράβδος στην οποία ενεργεί εξωτερικό φορτίο. (β) Λεπτομέρεια των εσωτερικών δυνάμεων της ράβδου.

Εάν η επιρεπόμενη τάση συνθλίψεως άνιγας της οπής είναι $\sigma_{\text{επ, αντ}} = 7.200 \text{ N/cm}^2$, να υπολογιστεί η ικανότητα φορτίσεως του ελάσματος.

2.7.2 Καταπόνηση ήλων και κοκλιών σε διάτμηση.

Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 2.7, ο ήλος που συνδέει τα δύο ελάσματα του σχήματος 2.7α καταπονείται σε διάτμηση [βλ. σχ. 2.7β(α)]. Γενικότερα, στους συνδέσμους, όπως είναι οι κοκλίες και οι ήλοι, αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις.

Έστω ότι στα δύο μεταλλικά ελάσματα του σχήματος 2.7α, εφαρμόζονται εφελκυστικές δυνάμεις ίσες με F . Ο ήλος καταπονείται σε διάτμηση (σχ. 2.7γ). Η κρίσιμη διατμητική του επιφάνεια είναι αυτή που βρίσκεται στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο ελασμάτων. Ειδικότερα, στον ήλο δρουν δύο αντίθετες δυνάμεις ίσες με F και κατά συνέπεια ο ήλος ισορροπεί. Κάθε μία από αυτές τις δύο δυνάμεις είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους δυνάμεων που δρουν σε όλη την έκταση της επαφής του αντίστοιχου τμήματος του ελάσματος με τον ήλο.



Σχ. 2.7γ

Καταπόνηση σε διάτμηση μονότιμπτου ήλου.

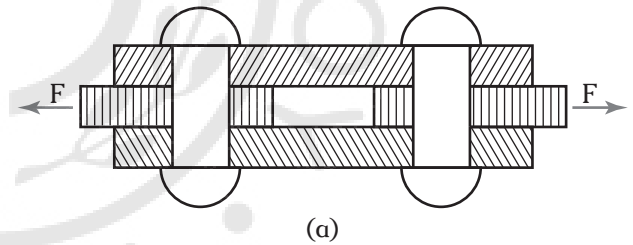
Για να κατανοήσουμε καλύτερα τη διάτμηση στην οποία καταπονείται ο ήλος, ας θεωρήσουμε ότι χωρίζεται σε δύο μέρη γύρω από τη διαχωριστική επιφάνεια των δύο ελασμάτων. Το τμήμα του ήλου που βρίσκεται πάνω από τη διαχωριστική επιφάνεια των δύο ελασμάτων ισορροπεί επειδή η συνισταμένη των διατμητικών δυνάμεων που δρουν στη διατομή της διαχωριστικής επιφάνειας είναι ίση και αντίθετη της δυνάμεως F που συνθλίβει το πάνω μέρος του ήλου. Ομοίως, το τμήμα του ήλου που βρίσκεται κάτω από τη διαχωριστική επιφάνεια των δύο ελασμάτων ισορροπεί επειδή η συνισταμένη των διατμητικών δυνάμεων που δρουν στη διατομή της διαχωριστικής επιφάνειας είναι ίση και αντίθετη

της δυνάμεως F που συνθλίβει το κάτω μέρος του ήλου. Αν ονομάσουμε με τ τη διατμητική τάση που αναπτύσσεται στη διαχωριστική επιφάνεια, τότε η συνισταμένη των διατμητικών δυνάμεων ισούται με $\tau \cdot A$, όπου A είναι η επιφάνεια της διατομής του ήλου. Οι διατμητικές δυνάμεις στο κάτω μέρος του ήλου έχουν αντίθετη φορά από τις αντίστοιχες στο άνω μέρος του ήλου, άρα η συνισταμένη τους ισούται με μηδέν. Επειδή στο συγκεκριμένο παράδειγμα η κρίσιμη διατμητική επιφάνεια είναι μία, ο ήλος ονομάζεται **μονότιμπτος**.

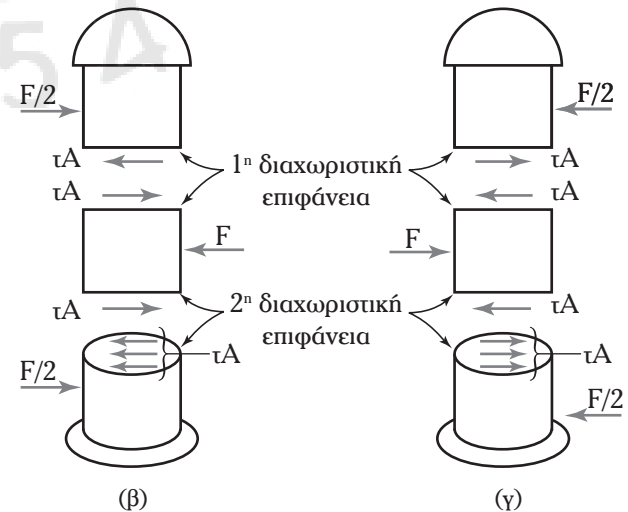
Με βάση τα ανωτέρω, από την ισορροπία των δυνάμεων ($\tau \cdot A - F = 0$) προκύπτει ότι η διατμητική τάση τ που αναπτύσσεται στον μονότιμπτο ήλο είναι ίση με:

$$\tau = \frac{F}{A}. \quad (2.51)$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε την περίπτωση της συνδέσεως ελασμάτων με δίτιμπτους ήλους. Τέτοια είναι η περίπτωση των δύο ήλων του σχήματος 2.7δ(α). Τα δύο ελάσματα, το επάνω και το κάτω, ονομάζονται **ελάσματα επικαλύψεως** ή αλλιώς **αρμοκαλύπτρες** και χρησιμοποιούνται για να συνδεθούν καλύτερα οι δύο πλάκες.



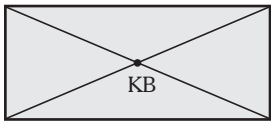
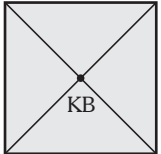
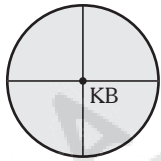
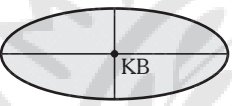
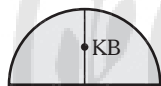
(α)



Σχ. 2.7δ

Καταπόνηση σε διάτμηση δίτιμπτων ήλων.

Πίνακας 3.2.1
Κέντρο βάρους ομογενών διατομών σε απλά σχήματα.

Σχήμα	Χαρακτηριστικά μεγέθη	Θέση κέντρου βάρους
Ορθογώνιο	 Η μικρή πλευρά a και η μεγάλη πλευρά β	Το σημείο τομής των διαγωνίων
Τετράγωνο	 Η πλευρά a	Το σημείο τομής των διαγωνίων
Κύκλος	 Η διάμετρος D	Το κέντρο του κύκλου
Έλλειψη	 Ο μικρός ημιάξονας a και ο μεγάλος ημιάξονας β	Το κέντρο της ελλείψεως
Ημικύκλιο	 Η διάμετρος D	Σε απόσταση $\frac{2 \cdot D}{3 \cdot \pi}$ από το κέντρο του κύκλου πάνω στην κάθετη της διαμέτρου του

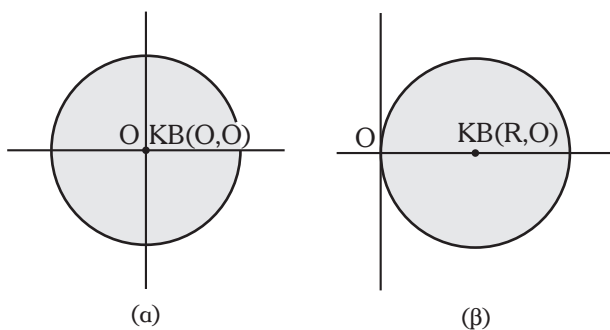
αξόνων πάνω στην περιφέρεια του κύκλου και το κέντρο του κύκλου βρίσκεται πάνω στον οριζόντιο άξονα. Συγκεκριμένα, το κέντρο βάρους βρίσκεται σε απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου από την αρχή των αξόνων. Άρα, το κέντρο βάρους βρίσκεται στη θέση με συντεταγμένες $x_{κβ} = R = 5 \text{ cm}$ και $y_{κβ} = 0$ ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων.

Η εμφάνιση διαφορετικών αποτελεσμάτων στα ερωτήματα (α) και (β) οφείλεται στη χρήση διαφορετικού συστήματος συντεταγμένων και όχι σε αλλα-

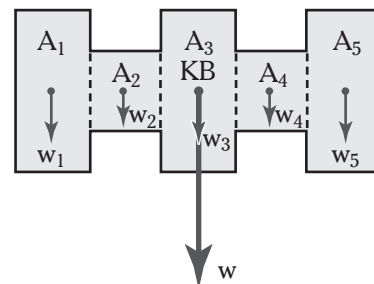
γή της πραγματικής θέσεως του κέντρου βάρους. Η θέση του κέντρου βάρους παραμένει στο κέντρο του κύκλου.

3.2.3 Υπολογισμός κέντρου βάρους συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων.

Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του κέντρου βάρους συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων όπως αυτό του σχήματος 3.2δ, στηρίζεται



Σχ. 3.2γ

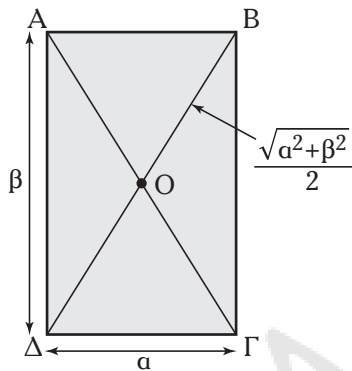


Σχ. 3.2δ

Η θέση του κέντρου βάρους σώματος με σύνθετο γεωμετρικό σχήμα.

υπολογίζουμε την πολική ροπή αντιστάσεως. Η παραπάνω διαδικασία εφαρμόζεται τόσο για τα απλά, όσο και για τα σύνθετα σχήματα.

Για παράδειγμα, στο **ορθογώνιο** (με μικρή πλευρά a και μεγάλη β) τα ακραία σημεία του (σχ. 3.7β) ως προς το σημείο τομής των διαγωνίων του O είναι



Σχ. 3.7β

Οι αποστάσεις των ακραίων σημείων του ορθογωνίου από το σημείο τομής των διαγωνίων του.

οι τέσσερις κορυφές του A, B, Γ και Δ . Οι αποστάσεις τους από το σημείο O είναι:

$$d_A = d_B = d_\Gamma = d_\Delta = \frac{\sqrt{a^2 + \beta^2}}{2} \quad (3.30)$$

Έτσι, η πολική ροπή αντιστάσεως του ορθογωνίου ως προς το σημείο O δίνεται από τη σχέση (3.28), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.27) και (3.30):

$$\begin{aligned} W_{O,A} = W_{O,B} = W_{O,\Gamma} = W_{O,\Delta} &= \frac{I_O}{d_A} = \\ &= \frac{a \cdot \beta \cdot (a^2 + \beta^2)}{\frac{\sqrt{a^2 + \beta^2}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{a^2 + \beta^2}} = \frac{1}{6} a \cdot \beta \cdot \sqrt{a^2 + \beta^2} \quad (3.31) \end{aligned}$$

Η πολική ροπή αντιστάσεως επιφανειών που έχουν απλά σχήματα ως προς το κέντρο βάρους τους παρουσιάζεται συνοπτικά στον πίνακα 3.7.

Πίνακας 3.7

Πολική ροπή αντιστάσεως επιφανειών απλών σχημάτων ως προς το κέντρο βάρους τους.

Σχήμα	Χαρακτηριστικά μεγέθη	Σημείο υπολογισμού της πολικής ροπής αντιστάσεως	Πολική ροπή αντιστάσεως
Ορθογώνιο	 Η μικρή πλευρά a και η μεγάλη πλευρά β .	Το σημείο τομής των διαγωνίων.	$W_{O,A} = W_{O,B} = W_{O,\Gamma} = W_{O,\Delta} =$ $= \frac{a \cdot \beta \cdot \sqrt{a^2 + \beta^2}}{6}$
Τετράγωνο	 Η πλευρά a .	Το σημείο τομής των διαγωνίων.	$W_{O,A} = W_{O,B} = W_{O,\Gamma} = W_{O,\Delta} =$ $= \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$
Κύκλος	 Η διάμετρος D .	Το κέντρο του κύκλου.	$W_O = \frac{\pi \cdot D^3}{16}$
Έλλειψη	 Ο μικρός ημί-αξονας a και ο μεγάλος β .	Το κέντρο της ελλείψεως.	$W_{O,A} = W_{O,B} = \frac{\pi \cdot a \cdot (a^2 + \beta^2)}{4}$
Ημικύκλιο	 Η διάμετρος D .	Το κέντρο βάρους του ημικυκλίου.	$W_{K,A} = W_{K,B} = 0,0578 D^3$

$$\begin{aligned}
 M(x) &= F_A \cdot x - \int_0^x y \cdot q(y) dy \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow M(x) = F_A \cdot x - a \cdot \int_0^x y^2 \cdot dy \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow M(x) = F_A \cdot x - \frac{a \cdot x^3}{3} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow M(x) = 5.168 \text{ N} \cdot x - 333 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot x^3, \\
 &0 < x < \frac{L}{2}. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Το σχήμα 4.3ια(γ) παρουσιάζει τη γραφική παράσταση της εξίσωσης (5) η οποία αποτελεί το ΔΚΡ της δοκού για το τμήμα AM. Η εξίσωση (5) είναι τρίτου βαθμού. Για $x=0$, η (5) δίνει $M(0)=0$ και για $x=L/2=2\text{ m}$ δίνει $M(L/2)=7.672\text{ N}\cdot\text{m}$.

2) Τμήμα MB.

Αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού στο τμήμα MB που βρίσκεται στη θέση x ενεργούν δυνάμεις κάθετα στον άξονα της δοκού. Ειδικότερα, ενεργούν η αντίδραση F_A , το συγκεντρωμένο στη θέση M φορτίο F_1 και το κατακόρυφο τριγωνικό φορτίο από το άκρο A μέχρι την υπόψη θέση της διατομής. Η αντίδραση F_A κατευθύνεται προς τα πάνω, κατά συνέπεια η αντίστοιχη τέμνουσα δύναμη κατευθύνεται προς τα κάτω και είναι θετική. Το συγκεντρωμένο φορτίο F_1 κατευθύνεται προς τα κάτω, κατά συνέπεια η αντίστοιχη τέμνουσα δύναμη κατευθύνεται προς τα πάνω και είναι αρνητική. Το κατακόρυφο τριγωνικό φορτίο από το άκρο A μέχρι την υπόψη θέση της διατομής κατευθύνεται προς τα κάτω, κατά συνέπεια η αντίστοιχη τέμνουσα δύναμη κατευθύνεται προς τα πάνω και είναι αρνητική. Έτσι η συνολική τέμνουσα δύναμη $F(x)$ στη θέση x του τμήματος MB παρέχεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= F_A - F_1 - \int_0^x q(y) dy = \\
 &= F_A - F_1 - \int_0^x a \cdot y dy = \\
 &= F_A - F_1 - \frac{a}{2} \cdot x^2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow F(x) = 168 \text{ N} - 500 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot x^2, \\
 &\frac{L}{2} < x < L. \quad (6)
 \end{aligned}$$

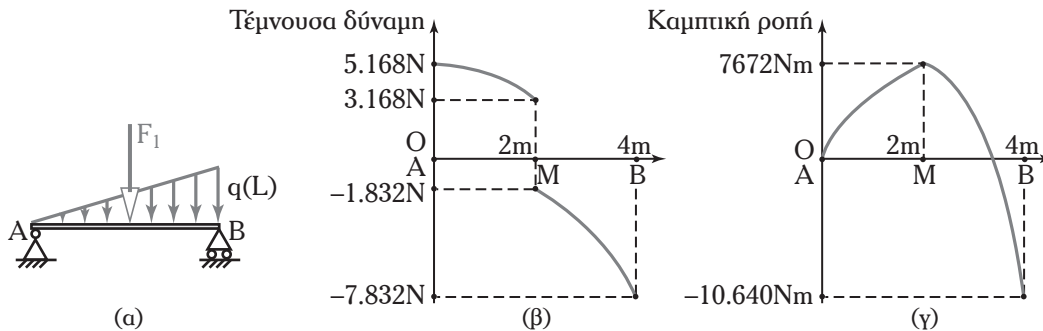
Το σχήμα 4.3ια(β) παρουσιάζει τη γραφική παράσταση της εξίσωσης (6) η οποία αποτελεί το ΔΤΔ της δοκού για το τμήμα MB. Η εξίσωση (6) είναι δευτέρου βαθμού και απεικονίζεται με μία παραβολή.

Για $x=L/2=2\text{ m}$, η (6) δίνει $F(L/2)=-1.832\text{ N}$, ενώ για $x=L=4\text{ m}$, η (6) δίνει $F(L)=-7.832\text{ N}$.

Αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού στο τμήμα MB που βρίσκεται στη θέση x ενεργούν η ροπή της αντιδράσεως F_A , η ροπή του συγκεντρωμένου φορτίου F_1 και η ροπή του κατακόρυφου τριγωνικού φορτίου από το άκρο A μέχρι την θέση της διατομής. Η ροπή της αντιδράσεως F_A έχει μέτρο $F_A \cdot x$ και φορά δεξιόστροφη, κατά συνέπεια η αντίστοιχη καμπτική ροπή είναι αριστερόστροφη και άρα θετική. Η ροπή του συγκεντρωμένου φορτίου F_1 έχει μέτρο:

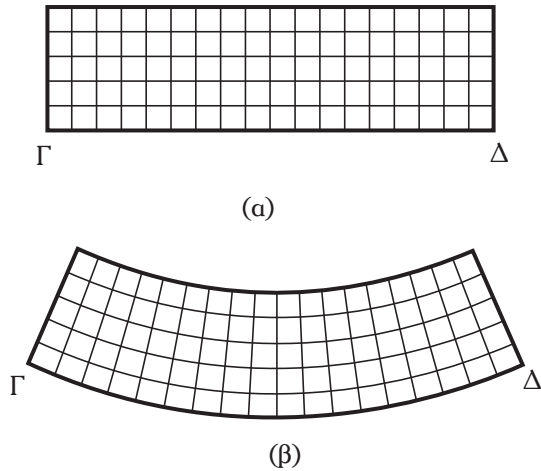
$$F_1 \cdot \left(x - \frac{L}{2} \right)$$

και φορά αριστερόστροφη, κατά συνέπεια η αντίστοιχη καμπτική ροπή είναι δεξιόστροφη και άρα αρνητική. Η ροπή του κατακόρυφου τριγωνικού φορτίου από το άκρο A μέχρι την θέση της διατομής είναι αριστερόστροφη, κατά συνέπεια η αντίστοιχη



Σχ. 4.31α

(α) Η δοκός του Παραδείγματος 10 (β) Το ΔΤΔ (γ) Το ΔΚΡ.



Σχ. 5.3β

Η εικόνα των δεσμών παραλλήλων ινών της δοκού στο τμήμα ΓΔ: (α) Πριν να ενεργήσουν τα φορτία. (β) Κατά την καταπόνηση σε καθαρή κάμψη.

σε εφελκυσμό και θλίψη. Άρα, για τη μελέτη της καθαρής κάμψεως πρέπει να λάβουμε υπόψη τις εμφανιζόμενες ορθές τάσεις θλίψεως και εφελκυσμού². Η μελέτη αυτή απαιτεί την επίλυση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Ωστόσο, η επίλυση του συστήματος αυτού είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη και γι' αυτόν το λόγο δεν μπορεί να τύχει εφαρμογής στα καθημερινά τεχνικά προβλήματα. Έτσι, έχει προταθεί η χρησιμοποίηση μίας άλλης προσεγγίσεως για την αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτών, η οποία ονομάζεται **τεχνική θεωρία της κάμψεως**.

5.3.1 Η τεχνική θεωρία της κάμψεως.

Η τεχνική θεωρία της κάμψεως αναπτύχθηκε στηριζόμενη στις ακόλουθες παραδοχές:

1) Πριν από την παραμόρφωσή της, η δοκός είναι **ευθύγραμμη**.

2) Η δοκός έχει **σταθερή διατομή** σε όλο το μήκος της και η μεγαλύτερη διάσταση της εγκάρσιας διατομής είναι μικρότερη από το μισό του μήκους της δοκού.

3) Οι εξωτερικές δυνάμεις είναι **συνεπίπεδες** (βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο), ενεργούν κάθετα στον άξονα της δοκού και δεν καταπονούν το σώμα σε στρέψη, εφελκυσμό ή θλίψη, αλλά μόνο σε κάμψη.

4) Οι εγκάρσιες διατομές, που είναι επίπεδες πριν την καμπυτική παραμόρφωση παραμένουν **επίπεδες και μετά την παραμόρφωση**.

5) Το υλικό της δοκού είναι **ομογενές**, δηλαδή έχει σε όλα τα σημεία του τις ίδιες ιδιότητες, **ισότροπο**, δηλαδή έχει τις ίδιες μηχανικές ιδιότητες προς όλες τις κατευθύνσεις και **ακολουθεί τον Νόμο του Hooke** έχοντας το ίδιο μέτρο ελαστικότητας για τις αναπτυσσόμενες εφελκυστικές και θλιπτικές τάσεις.

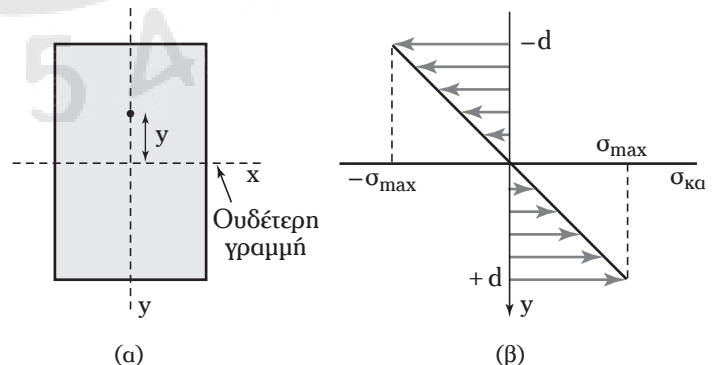
Εάν τουλάχιστον μία από τις ανωτέρω παραδοχές της τεχνικής θεωρίας της κάμψεως δεν ισχύει σε κάποιο πρόβλημα κάμψεως που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε, τότε πρέπει να έχουμε κατά νου ότι οι λύσεις που λαμβάνουμε από την εφαρμογή της δεν θα είναι ικανοποιητικές για το πρόβλημά μας.

5.3.2 Οι τάσεις στη συμμετρική καθαρή κάμψη.

Σύμφωνα με την τεχνική θεωρία της κάμψεως, η τάση κάμψεως σε ένα σημείο της διατομής δοκού που καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη, όπως αυτή του σχήματος 5.3γ(α), εξαρτάται από:

- 1) Το μέγεθος των φορτίων.
- 2) Τη θέση των φορτίων.
- 3) Το μήκος της δοκού.
- 4) Το μέγεθος της διατομής.
- 5) Τη μορφή της διατομής.
- 6) Την τοποθέτηση της διατομής σε σχέση με τη διεύθυνση των φορτίων.
- 7) Την απόσταση του σημείου της διατομής από τον άξονα.

Η εξάρτηση από το μέγεθος των φορτίων, το μήκος της δοκού και τη θέση των φορτίων εκφράζεται μέσω της καμπυτικής ροπής M που είναι συνάρτηση αυτών. Η εξάρτηση από το μέγεθος και τη μορφή τη



Σχ. 5.3γ

(α) Ορθογώνια διατομή δοκού που καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη. (β) Η γραφική παράσταση της τάσεως κάμψεως $\sigma_{κα}$ ως προς την απόσταση y .

² Στην περίπτωση της κοινής κάμψεως επί πλέον των ορθών τάσεων εμφανίζονται και διατμητικές τάσεις.

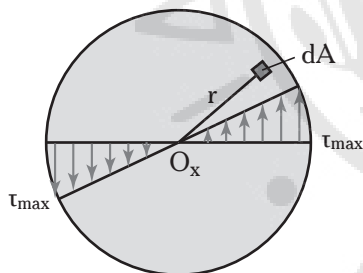
όπου τ_{\max} η μέγιστη τάση στρέψεως (βλ. παράγρ. 6.3.2) και G το μέτρο ολισθήσεως του υλικού.

Επισημαίνεται ότι η γωνιακή παραμόρφωση γ μειώνεται για σημεία στο εσωτερικό μιας διατομής και μηδενίζεται στο κέντρο της. Έτσι οι τάσεις στρέψεως έχουν μηδενική τιμή στο κέντρο της κυκλικής διατομής και μέγιστη τιμή στην περιφέρεια του κύκλου με γραμμική μεταβολή στο ενδιάμεσο.

Ωστόσο, όπως συμβαίνει και στις αντίστοιχες περιπτώσεις των άλλων καταπονήσεων, το ανωτέρω φαινόμενο εμφανίζεται μέχρι ένα όριο. Έτσι και στην περίπτωση της στρέψεως έχουμε το **όριο αναλογίας της στρέψεως**, το **όριο ελαστικότητας της στρέψεως** και το **όριο διαρροής της στρέψεως** (βλ. παράγρ. 1.3 σχετικά με το πείραμα του εφελκυσμού). Εάν κατά τη στρέψη, η εφαρμοζόμενη ροπή στρέψεως υπερβεί το όριο ελαστικότητας της στρέψεως, τότε έχουμε μόνιμη παραμόρφωση, η οποία εκδηλώνεται με μόνιμη στροφή.

6.3.2 Οι τάσεις στρέψεως και η σχέση στρέψεως.

Στο επίπεδο κάθε διατομής της δοκού κυκλικής διατομής του σχήματος 6.3α, αναπτύσσονται, λόγω της ροπής στρέψεως, διατμητικές τάσεις. Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι τάσεις αυτές ονομάζονται **τάσεις στρέψεως**.



Σχ. 6.3δ

Διατομή της δοκού κυκλικής διατομής του σχήματος 6.3α.

Στη συνέχεια, ας θεωρήσουμε τη διατομή A της δοκού που απεικονίζεται στο σχήμα 6.3δ. Σε κάθε στοιχειώδες τμήμα επιφάνειας dA της διατομής υπάρχει τάση στρέψεως $\tau_{\sigma\tau}$, λόγω της εφαρμοζόμενης σε αυτό εσωτερικής δυνάμεως F_{dA} , η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$F_{dA} = \tau_{\sigma\tau} \cdot dA. \quad (6.8)$$

Η δύναμη F_{dA} προκαλεί μία εσωτερική ροπή M_{dA} στο στοιχειώδες τμήμα επιφάνειας dA που βρίσκεται σε απόσταση r από τον άξονα της δοκού. Η ροπή

M_{dA} , λαμβάνοντας υπόψη και την σχέση (6.8), δίνεται από τη σχέση:

$$M_{dA} = F_{dA} \cdot r \Leftrightarrow M_{dA} = \tau_{\sigma\tau} \cdot r \cdot dA. \quad (6.9)$$

Δεδομένου ότι η διατομή βρίσκεται σε ισορροπία, το άθροισμα όλων των ροπών M_{dA} όλων των στοιχειωδών τμημάτων επιφάνειας dA της διατομής ισούται με τη ροπή στρέψεως M , δηλαδή έχουμε:

$$M = \int_A \tau_{\sigma\tau} \cdot r \cdot dA. \quad (6.10)$$

Όμως, η τάση στρέψεως $\tau_{\sigma\tau}$ δεν είναι σταθερή και μάλιστα εξαρτάται από την απόσταση r της στοιχειώδους επιφάνειας dA από το κέντρο της κυκλικής διατομής, στην οποία αντιστοιχεί. Συγκεκριμένα, η τάση στρέψεως $\tau_{\sigma\tau}$ είναι μεγαλύτερη στην περιφέρεια της κυκλικής διατομής και ελαττώνεται όσο η απόσταση r μικραίνει (σχ. 6.3δ). Η τάση στρέψεως $\tau_{\sigma\tau}$ είναι μηδενική στο κέντρο της κυκλικής διατομής. Το σχήμα 6.3ε απεικονίζει τη σχέση μεταξύ της τάσεως στρέψεως $\tau_{\sigma\tau}$ και της αποστάσεως r . Η σχέση αυτή είναι της μορφής:

$$\tau_{\sigma\tau} = K \cdot r \quad (6.11)$$

όπου K είναι μια σταθερά αναλογίας.

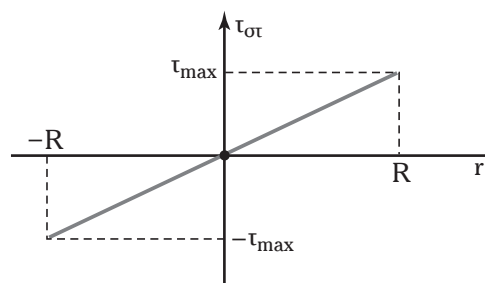
Γράφοντας τη σχέση (6.11) για την τάση στρέψεως στην περιφέρεια της κυκλικής διατομής της δοκού (όπου $r = R$) έχουμε:

$$\tau_{\max} = K \cdot R. \quad (6.12)$$

Η τάση τ_{\max} αντιπροσωπεύει τη μέγιστη τάση στρέψεως που αντιστοιχεί στην περιφέρεια της κυκλικής διατομής της δοκού. Απαλείφοντας τη σταθερά K από τις σχέσεις (6.11) και (6.12) έχουμε:

$$\tau_{\sigma\tau} = \frac{\tau_{\max}}{R} \cdot r. \quad (6.13)$$

Περαιτέρω, εισάγοντας τη σχέση (6.13) στη σχέση (6.10) λαμβάνουμε:



Σχ. 6.3ε

Η τάση στρέψεως είναι ανάλογη της αποστάσεως από το κέντρο της κυκλικής διατομής.

$$\frac{M}{2\pi \cdot Gr^3 t} \cdot L \leq \theta_{L, \text{en}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{M}{2\pi \cdot Gr^3 t} \cdot L \leq \theta_{\text{en}} \cdot L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{M}{2\pi \cdot G \cdot \theta_{\text{en}} r^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{30.000 \text{ N} \cdot \text{cm}}{2\pi \cdot 7 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2 \cdot 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ rad/cm} \cdot 4^3 \text{ cm}^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \geq 0,31 \text{ cm.}$$

Από τις δύο παραπάνω τιμές λαμβάνομε τη μεγαλύτερη, στρογγυλοποιώντας τη στη μεγαλύτερη τυποποιημένη τιμή. Άρα έχουμε $t = 0,40 \text{ cm}$.

Άσκηση.

Κοιλοδοκός με λεπτά τοιχώματα έχει μήκος $L = 80 \text{ cm}$ και μέση ακτίνα $r = 5 \text{ cm}$. Η κοιλοδοκός καταπονείται σε στρέψη με εξωτερική ροπή στρέψεως $M = 48.000 \text{ N} \cdot \text{cm}$. Να υπολογιστεί το πάχος των τοιχωμάτων της εάν η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $\tau_{\text{en}} = 4.800 \text{ N/cm}^2$ και η επιτρεπόμενη στροφή είναι $\theta_{\text{en}} = 0,30^\circ/\text{m}$. Δίνεται το μέτρο ολιθίσεως του υλικού της δοκού $G = 6 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$.

6.6 Στρέψη περιστρεφόμενου άξονα.

Στην παράγραφο αυτή εξετάζομε τη στρέψη περιστρεφόμενου άξονα ή αλλιώς ατράκτου.

Ατράκτος ονομάζεται κάθε άξονας κυκλικής ή κοίλης διατομής ή μερικές φορές τετραγωνικής δι-

ατομής, ο οποίος περιστρεφόμενος μεταφέρει ισχύ και καταπονείται σε στρέψη ή ταυτόχρονα σε κάμψη και στρέψη, λόγω των γραναζιών ή τροχαλιών που φέρει για τη μετάδοση της κινήσεως.

Το σχήμα 6.6 παρουσιάζει ατράκτους που φέρουν γρανάζια ή ιμάντες για τη μετάδοση της κινήσεως.

Σύμφωνα με όσα έχομε αναφέρει στις προηγούμενες παραγράφους, για τη μελέτη της στρέψεως της ατράκτου πρέπει να γνωρίζομε τη ροπή στρέψεως. Ωστόσο, στην περίπτωση των ατράκτων, συνήθως δεν είναι γνωστή η ροπή στρέψεως M , αλλά είναι γνωστά τα ακόλουθα μεγέθη:

1) Η ισχύς P την οποία η ατράκτος (καλείται να) μεταφέρει, και

2) ο αριθμός των στροφών, n της ατράκτου ανά μονάδα χρόνου.

Όμως, από τα μεγέθη αυτά είναι δυνατός ο προσδιορισμός της ροπής στρέψεως μέσω της σχέσεως:

$$P = M \cdot \omega \quad (6.43)$$

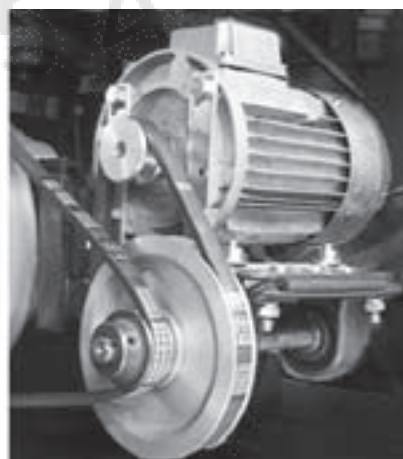
όπου με ω συμβολίζεται η γωνιακή ταχύτητα της ατράκτου που δίνεται από τη σχέση:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n. \quad (6.44)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (6.43) και (6.44) και λύνοντας ως προς τη ροπή στρέψεως, λαμβάνομε:

$$M = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n}. \quad (6.45)$$

Έχοντας υπολογίσει τη ροπή στρέψεως, εφαρμόζομε τις υπόλοιπες σχέσεις που συναντήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους ανάλογα με τη διατομή της ατράκτου.



Σχ. 6.6

Παραδείγματα ατράκτων που φέρουν γρανάζια ή ιμάντα.

Πίνακας 7.7.1.
Τιμές του συντελεστή ω για διάφορα υλικά
και διάφορες τιμές της λυγηρότητας λ .

λ	Χάλυβας St 37 St 38	Χάλυβας St 52	Ξύλο	Χυτοσίδηρος
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	1,00	1,00	1,07	1,01
20	1,04	1,06	1,15	1,05
30	1,08	1,11	1,25	1,11
40	1,14	1,19	1,36	1,22
50	1,21	1,28	1,50	1,39
60	1,30	1,41	1,67	1,67
70	1,41	1,58	1,87	2,21
80	1,55	1,79	2,14	3,50
90	1,71	2,05	2,50	4,43
100	1,90	2,53	3,00	5,45
110	2,11	3,06	3,73	6,63
120	2,43	3,65	4,55	7,78
130	2,85	4,28	5,48	9,25
140	3,31	4,96	6,51	10,70
150	3,80	5,70	7,65	12,30
160	4,32	6,48	8,91	14,00
170	4,88	7,32	10,29	15,80
180	5,47	8,21	11,80	17,70
190	6,10	9,14	13,43	19,70
200	6,75	10,13	15,20	21,90
210	7,45	11,17	17,11	
220	8,17	12,26	19,17	
230	8,93	13,40	21,37	
240	9,73	14,59	23,73	
250	10,55	15,83	26,25	

Πίνακας 7.7.2
Πίνακας συντελεστών λυγισμού.

λ	$\lambda+$									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02
20	1,02	1,03	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05
...

Παράδειγμα 10.

Η τιμή της λυγηρότητας μιας ράβδου από χάλυβα St 37 είναι $\lambda = 111,5$. Ποιος είναι ο συντελεστής ω της ράβδου;

Λύση.

Ο πίνακας 7.7.1 δεν μας δίνει απευθείας τη ζητούμενη τιμή για $\lambda = 111,5$. Η τιμή $\lambda = 111,5$ βρίσκεται μεταξύ των τιμών $\lambda_1 = 110$ και $\lambda_2 = 120$, με αντίστοιχες τιμές $\omega_1 = 2,11$ και $\omega_2 = 2,43$. Για να υπολογίσουμε τη ζητούμενη τιμή πραγματοποιούμε γραμμική παρεμβολή εφαρμόζοντας την ακόλουθη σχέση:

$$\omega = \omega_1 + \frac{\omega_2 - \omega_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda - \lambda_1) =$$

$$= 2,11 + \frac{2,43 - 2,11}{120 - 110} (111,5 - 110) = 2,158.$$

7.7.3 Τα βήματα της μεθόδου των συντελεστών ω .

Η μέθοδος βασίζεται στην ακόλουθη ανισότητα:

$$\sigma = \omega \cdot \frac{F}{A} \leq \sigma_{\text{εν,θλ}}. \quad (7.19)$$

Δηλαδή, σύμφωνα με τη μέθοδο των συντελεστών ω , το θλιπτικό φορτίο F πολλαπλασιάζεται με τον συντελεστή ω και το γινόμενο διαιρείται με το εμβαδό A της διατομής. Το αποτέλεσμα που θα προκύψει πρέπει να είναι μικρότερο απ' την επιτρεπόμενη τάση στη θλίψη.

Η ανισότητα (7.19) θυμίζει την ανισότητα

$$\sigma_{\text{θλ}} = \frac{F}{A} \leq \sigma_{\text{εν,θλ}}$$

που ισχύει στην καθαρή θλίψη χωρίς λυγισμό. Δηλαδή, η μέθοδος των συντελεστών ω μετατρέπει τους υπολογισμούς του λυγισμού σε υπολογισμούς θλίψεως με τη χρήση των συντελεστών ω .

Η μέθοδος των συντελεστών ω εφαρμόζεται ακολουθώντας τα εξής βήματα:

- 1) Επιλογή των διαστάσεων της διατομής:
 - α) Κατ' εκτίμηση ή
 - β) με τη βοήθεια της σχέσεως που ισχύει για τη θλίψη:

$$A > \frac{F}{\sigma_{\text{εν,θλ}}}$$

και σχετική προσαύξηση.

- 2) Υπολογισμός του ισοδύναμου μήκους λυγισμού: $l_a = a \cdot l$.

$$\sigma_{\max} = \frac{2 \cdot F}{3 \cdot \beta \cdot h} \cdot \sigma_{\text{εν,θλ}} \quad (8.14)$$

Τα προβλήματα που εμφανίζονται στην έκκεντρη θλίψη ορθογώνιας διατομής χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό είναι αντίστοιχα των προβλημάτων που συναντήσαμε στις περιπτώσεις των απλών καταπονήσεων. Δηλαδή, αφορούν:

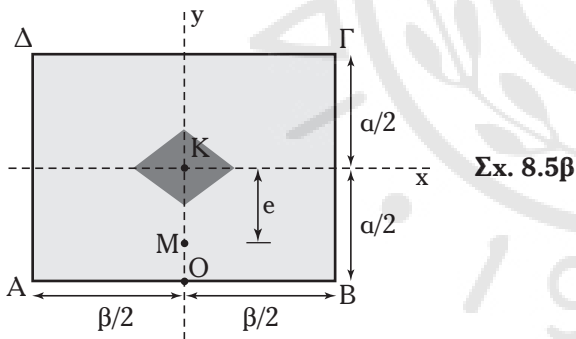
1) Στον υπολογισμό της μέγιστης τάσεως λειτουργίας.

2) Στον υπολογισμό των διαστάσεων της ορθογώνιας διατομής.

3) Στον υπολογισμό του φορτίου που αντέχει η ορθογώνια διατομή και αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο, όπως και στις περιπτώσεις των απλών καταπονήσεων.

Παράδειγμα 4.

Ράβδος από υλικό με μηδενική αντοχή σε εφελκυσμό έχει ορθογώνια διατομή διαστάσεων $a = 3 \text{ cm} \times \beta = 4 \text{ cm}$. Η ράβδος καταπονείται σε έκκεντρη θλίψη από δύναμη που ενεργεί σε σημείο M που απέχει απόσταση $e = 1 \text{ cm}$ από το κέντρο βάρους της διατομής K , όπως δείχνει το σχήμα 8.5β. Να προσδιοριστεί το μέγιστο επιτρεπόμενο φορτίο, εάν η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως είναι $\sigma_{\text{εν,θλ}} = 8.000 \text{ N/cm}^2$.



Λύση.

Το σημείο M βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας y της διατομής και απέχει απόσταση

$$h = \frac{a}{2} - e = \frac{3 \text{ cm}}{2} - 1 \text{ cm} = 0,5 \text{ cm}$$

από το σημείο O . Ο πυρήνας της διατομής καλύπτει αποστάσεις μέχρι $a/6 = 0,5 \text{ cm}$ από το κέντρο βάρους K πάνω στον άξονα y . Επομένως, το σημείο M βρίσκεται εκτός του πυρήνα της διατομής.

Το ζητούμενο φορτίο δίνεται από τη σχέση έκκεντρης θλίψεως ορθογώνιας διατομής, χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό⁴:

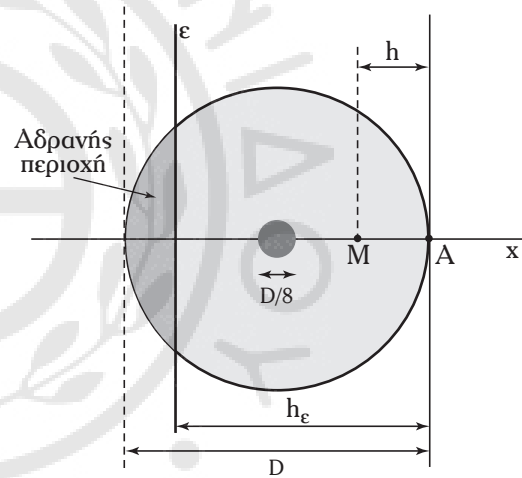
$$\frac{2 \cdot F}{3 \cdot \beta \cdot h} \leq \sigma_{\text{εν,θλ}} \Leftrightarrow F \leq \frac{3}{2} \cdot \beta \cdot h \cdot \sigma_{\text{εν,θλ}} \Leftrightarrow$$

$$F \leq \frac{3}{2} \cdot 4 \text{ cm} \cdot 0,5 \text{ cm} \cdot 8.000 \text{ N/cm}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F \leq 24.000 \text{ N.}$$

8.5.2 Κυκλική διατομή.

As θεωρήσουμε την κυκλική διατομή διαμέτρου D του σχήματος 8.5γ. Το σχήμα απεικονίζει και τον πυρήνα της διατομής. Στο σημείο M που βρίσκεται πάνω στον άξονα των x , σε απόσταση h από το σημείο A , εφαρμόζεται έκκεντρα κάθετο θλιπτικό φορτίο F .



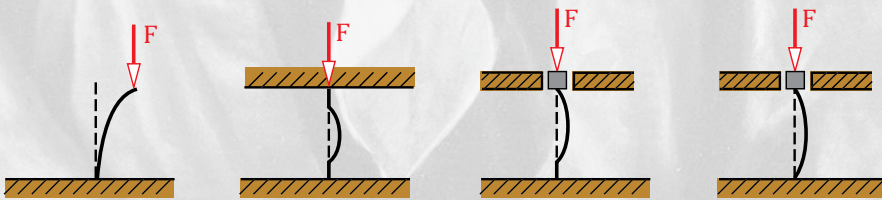
Κυκλική διατομή με τον πυρήνα της που καταπονείται σε έκκεντρη θλίψη με την εφαρμογή φορτίου στο σημείο M .

Για να υπάρχει αδρανής περιοχή, το σημείο M πρέπει να βρίσκεται εκτός του πυρήνα της κυκλικής διατομής. Δηλαδή, πρέπει να ισχύει:

$$h < \frac{7 \cdot D}{16}. \quad (8.15)$$

Η γραμμή που διαχωρίζει τη θλιβόμενη περιοχή από την αδρανή είναι η ευθεία ϵ που εικονίζεται στο σχήμα 8.5γ. Αποδεικνύεται ότι η γραμμή αυτή βρίσκεται σε απόσταση h_e από το σημείο A , η οποία

⁴ Χρησιμοποιούμε στον παρονομαστή την πλευρά β , καθώς αυτή είναι η κάθετη στον άξονα y .



Ο Λέοναρντ Όιλερ (1707 – 1783)
πρωτοπόρος Ελβετός μαθηματικός και φυσικός.
Επίδειξη των διαφορετικών τρόπων λυγισμού κατά «Όιλερ»
ανάλογα με τον τρόπο στηρίξεως της δοκού.