ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
1954

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Θεοδώρου Η. Αποστολόπουλου

ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΩΝ

1954

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Ο Ευγένιος Ευγενίδης, ο ιδρυτής και χορηγός του «Ιδρύματος Ευγενίδου», πολύ νωρίς προέβλεψε και σχημάτισε την πεποίθηση ότι η άρτια κατάρτιση των τεχνικών μας, σε συνδυασμό με την εθνική αγωγή, θα ήταν αναγκαίος και αποφασιστικός παράγων για την πρόοδο του Έθνους μας.

Την πεποίθησή του αυτή ο Ευγενίδης εκδήλωσε με τη γενναιόφρονα πράξη ευεργεσίας, να κληροδοτήσει σεβαστό ποσό για τη σύσταση Ιδρύματος, που θα είχε ως σκοπό να συμβάλλει στην τεχνική εκπαίδευση των νέων της Ελλάδας.

Έτσι, το Φεβρουάριο του 1956 συστήθηκε το «Ίδρυμα Ευγενίδου», του οποίου τη διοίκηση ανέλαβε η αδελφή του Μαρ. Σίμου, σύμφωνα με την επιθυμία του διαθέτη. Το έργο του Ιδρύματος συνεχίζει από το 1981 ο κ. Νικόλαος Βερνίκος - Ευγενίδης.

Από το 1956 έως σήμερα η συμβολή του Ιδρύματος στην τεχνική εκπαίδευση πραγματοποιείται με διάφορες δραστηριότητες. Όμως απ' αυτές η σημαντικότερη, που κρίθηκε από την αρχή ως πρώτης ανάγκης, είναι η έκδοση βιβλίων για τους μαθητές των Τεχνικών και Επαγγελματικών Σχολών και Λυκείων.

Μέχρι σήμερα, με τη συνεργασία με τα Υπουργεία Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων και Εμπορικής Ναυτιλίας, εκδόθηκαν εκατοντάδες τόμοι βιβλίων, που έχουν διατεθεί σε πολλά εκατομμύρια αντίτυπα. Τα βιβλία αυτά κάλυπταν ή καλύπτουν ανάγκες των Κατωτέρων και Μέσων Τεχνικών Σχολών του Υπ. Παιδείας, των Σχολών του Οργανισμού Απασχολήσεως Εργατικού Δυναμικού (ΟΑΕΔ), των Τεχνικών και Επαγγελματικών Λυκείων, των Τεχνικών Επαγγελματικών Σχολών και των Δημοσίων Σχολών Εμπορικού Ναυτικού.

Μοναδική φροντίδα του Ιδρύματος σ' αυτή την εκδοτική του προσπάθεια ήταν και είναι η συγγραφή και έκδοση βιβλίων ποιότητας, από άποψη όχι μόνον επιστημονική, παιδαγωγική και γλωσσική, αλλά και ως προς την εμφάνιση, ώστε το βιβλίο να αγαπηθεί από τους μαθητές.

Για την επιστημονική και παιδαγωγική αρτιότητα των βιβλίων τα κείμενα υποβάλλονται σε πολλές επεξεργασίες και βελτιώνονται πριν από κάθε νέα έκδοση συμπληρούμενα καταλλήλως.

Ιδιαίτερη σημασία απέδωσε το Ίδρυμα από την αρχή στη γλωσσική διατύπωση των βιβλίων, γιατί πιστεύει ότι και τα τεχνικά βιβλία, όταν είναι γραμμένα σε γλώσσα σωστή και ομοιόμορφη αλλά και κατάλληλη για τη στάθμη των μαθητών, μπορούν να συμβάλλουν στη γλωσσική κατάρτιση των μαθητών.

Έτσι, με απόφαση που ίσχυσε ήδη από το 1956, όλα τα βιβλία της Βιβλιοθήκης του Τεχνίτη, δηλαδή τα βιβλία για τις τότε Κατώτερες Τεχνικές Σχολές, όπως αργότερα και για τις Σχολές του ΟΑΕΔ, ήταν γραμμένα σε γλώσσα δημοτική, με βάση τη γραμματική του Τριανταφυλλίδη, ενώ όλα τα άλλα βιβλία ήταν γραμμένα στην απλή καθαρεύουσα. Σήμερα ακολουθείται η γραμματική που διδάσκεται στα σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαιδεύσεως. Η γλωσσική επεξεργασία των βιβλίων ανατίθε-

ται σε φιλολόγους του Ιδρύματος και έτσι εξασφαλίζεται η ενιαία σύνταξη και ορολογία κάθε κατηγορίας βιβλίων.

Η ποιότητα του χαρτιού, το είδος των τυπογραφικών στοιχείων, τα σωστά σχήματα, η καλαίσθητη σελιδοποίηση, το εξώφυλλο και το μέγεθος του βιβλίου, περιλαμβάνονται και αυτά στις φροντίδες του Ιδρύματος και συμβάλλουν στη σωστή «λειτουργικότητα» των βιβλίων.

Το Ίδρυμα θεώρησε ότι είναι υποχρέωσή του, σύμφωνα με το πνεύμα του ιδρυτή του, να θέση στη διάθεση του Κράτους όλη αυτή την πείρα του των 20 ετών, αναλαμβάνοντας το 1978 και την έκδοση των βιβλίων για τις νέες Τεχνικές Επαγγελματικές Σχολές και τα Τεχνικά και Επαγγελματικά Λύκεια, σύμφωνα πάντοτε με τα εγκεκριμένα Αναλυτικά Προγράμματα του Π.Ι. και του ΥΠΕΠΘ.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Μιχαήλ Αγγελόπουλος, καθηγητής ΕΜΠ, Πρόεδρος.
Αλέξανδρος Σταυρόπουλος, καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς, Αντιπρόεδρος.
Ιωάννης Τεγόπουλος, καθηγητής ΕΜΠ.
Σταμάτης Παλαιοκρασσάς, Σύμβουλος – Αντιπρόεδρος Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.
Εμμανουήλ Τρανούδης, Δ/ντής Σπ. Δευτ. Εκπαιδεύσεως ΥΠΕΠΘ.
Σύμβουλος επί των εκδόσεων του Ιδρύματος **Κων. Μανάφης**, καθηγ. Φιλ. Σχολής Παν/μίου Αθηνών.
Γραμματέας της Επιτροπής, **Γεώργιος Ανδρεάκος**.

Διατελέσαντα μέλη ή σύμβουλοι της Επιτροπής

Γεώργιος Κακριδής (1955-1959) Καθηγητής ΕΜΠ, *Άγγελος Καλογεράς* (1957-1970) Καθηγητής ΕΜΠ, *Δημήτριος Νιάνιας* (1957-1965) Καθηγητής ΕΜΠ, *Μιχαήλ Σπετσιέρης* (1956-1959), *Νικόλαος Βασιώτης* (1960-1967), *Θεόδωρος Κουζέλης* (1968-1976) Μηχ. Ηλ. ΕΜΠ, *Παναγιώτης Χατζηιωάννου* (1977-1982) Μηχ. Ηλ. ΕΜΠ, *Αλέξανδρος Ι. Παππάς* (1955-1983) Καθηγητής ΕΜΠ, *Χρυσόστομος Καβουνίδης* (1955-1984) Μηχ. Ηλ. ΕΜΠ, *Γεώργιος Ρούσσος* (1970-1987) Χημ.-Μηχ. ΕΜΠ, Δρ.*Θεοδόσιος Παπαθεοδοσίου* (1982-1984) Δ/ντής Σπουδών Δευτεροβάθμιας Εκπαιδεύσεως ΥΠΕΠΘ, *Ιγνάτιος Χατζηευστρατίου* (1985-1988) Μηχανολόγος, Δ/ντής Σπουδών Δευτεροβάθμιας Εκπαιδεύσεως ΥΠΕΠΘ, *Γεώργιος Σταματίου* (1988-1990) Ηλεκτρολόγος ΕΜΠ, Δ/ντής Σπουδών Δευτεροβάθμιας Εκπαιδεύσεως ΥΠΕΠΘ, *Σωτ. Γκλαβάς* (1989-1993) , Φιλόλογος, Δ/ντής Σπουδών Δευτεροβάθμιας Εκπαιδεύσεως ΥΠΕΠΘ.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΟΔΩΡΟΥ Η. ΑΠΟΣΤΟΛΟΠΟΥΛΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΗ Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΩΝ

ΑΘΗΝΑ
1996

Α' ΕΚΔΟΣΗ 1979

Β' ΕΚΔΟΣΗ 1985

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τα Μαθηματικά των Επιχειρήσεων είναι ο κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών, που ασχολείται με τη λύση προβλημάτων, τα οποία δημιουργούνται κυρίως στις τραπεζικές και γενικά στις οικονομικοεμπορικές συναλλαγές.

Ο βασικότερος παράγοντας που υπεισέρχεται στα προβλήματα των Μαθηματικών των Επιχειρήσεων είναι το χρήμα.

Η έκδοση αυτού του βιβλίου έχει διδακτικό χαρακτήρα. Σκοπός του είναι να εφοδιάσει τον απόφοιτο του Επαγγελματικού Λυκείου (Τομέας: Οικονομίας και Διοικήσεως) με τις βασικές γνώσεις των μαθηματικών, που απαιτούνται στις οικονομικοεμπορικές συναλλαγές.

Κατά τη συγγραφή του βιβλίου ακολουθήθηκε η **Επαγωγική Μέθοδος** *και ως οδηγός ίσχυσε η αρχή ότι:* **Κάθε βιβλίο γίνεται τόσο ωφελιμότερο, όσο πιο απλά και επαγωγικά είναι γραμμένο,** *γιατί η επαγωγική μέθοδος διδασκαλίας διευκολύνει την κατανόηση και αφομοίωση κάθε ζητήματος.*

Είναι γεγονός ότι τα Μαθηματικά δημιουργούν στους μαθητές αντιπάθεια και φόβο, γιατί νομίζουν ότι μόνον ορισμένοι άνθρωποι είναι προικισμένοι με μαθηματική ικανότητα. Κατά τη γνώμη μου, δεν υπάρχουν «μαθηματικά μυαλά» — εκτός βεβαίως από ορισμένες ιδιοφυΐες — αλλά μαθηματική συνήθεια (άσκηση). Μόνο με τη συστηματική μελέτη, την επανάληψη και τη συνεχή άσκηση θα γεννηθεί στο μαθητή η συμπάθεια και το ενδιαφέρον για τα μαθηματικά.

Το βιβλίο διαιρέθηκε σε τρία μέρη. Το Πρώτο Μέρος περιλαμβάνει τις βασικές μεθόδους της Πρακτικής Αριθμητικής, τις οποίες συναντάμε συχνά στην καθημερινή πρακτική. Το Δεύτερο Μέρος περιέχει προβλήματα απλού τόκου, προεξοφλήσεως συναλλαγματικών και αντικαταστάσεως γραμματίων. Το Τρίτο Μέρος περιλαμβάνει προβλήματα ανατοκισμού και ραντών ως και την απόσβεση των ενιαίων και ομολογιακών δανείων.

Για την πλήρη κατανόηση, αφομοίωση και εμπέδωση κάθε ζητήματος, παράθεσα πολλά παραδείγματα, σχήματα και διαγράμματα. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχει σημαντικός αριθμός ασκήσεων και προβλημάτων, στα οποία δίνεται μόνον η απάντηση. Έτσι ο μαθητής θα επαληθεύει τη λύση κάθε προβλήματος. Το πλήθος των προβλημάτων είναι αρκετά μεγάλο και δεν είναι δυνατόν να διδαχθούν όλα, αλλά ο μαθητής πρέπει να βρίσκει στο βιβλίο του αρκετά προβλήματα για εξάσκηση και ο διδάσκων να έχει την ευχέρεια επιλογής θεμάτων για τις εξετάσεις.

Σύμφωνα με το ωρολόγιο πρόγραμμα του Υπουργείου Παιδείας, τα Μαθηματικά των Επιχειρήσεων θα διδάσκονται στους μαθητές όλων των ειδικοτήτων των Λυκείων Οικονομίας και Διοικήσεως, στο Β΄ εξάμηνο του Β΄ έτους. Η διδασκαλία *του βιβλίου πρέπει, φυσικά, να αρχίσει με την Εισαγωγή, ώστε ο μαθητής να μάθει πρώτα τις βασικές οικονομικές έννοιες και τα ζητήματα που πρόκειται να διδαχθεί. Ο περισσότερος όμως χρόνος πρέπει να διατεθεί για τη διδασκαλία των Κεφαλαίων 4,5,6,7,8 και 9 δηλαδή των σπουδαίων Κεφαλαίων: Απλός Τόκος, Προεξόφληση με Απλό Τόκο, Γραμμάτια Ισοδύναμα, Ανατοκισμός, Ράντες και Δάνεια, γιατί αυτά τα ζητήματα είναι τελείως άγνωστα στους μαθητές που απευθύνεται το βιβλίο και έχουν άμεση εφαρμογή στην τραπεζική πρακτική. Επειδή οι μέθοδοι της Πρακτικής Αριθμητικής είναι γνωστές στους μαθητές των Λυκείων, γι' αυτό στα Κεφάλαια 2 και 3 μπορεί να γίνει μια σύντομη επανάληψη, γιατί στην καθημερινή ζωή συναντάμε συχνότατα προβλήματα που λύνονται με τη μέθοδο των τριών, καθώς και προβλήματα μερισμού και εταιρείας.*

ΘΕΟΔΩΡΟΣ Η. ΑΠΟΣΤΟΛΟΠΟΥΛΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Διάκριση των Μαθηματικών.

Τα μαθηματικά διακρίνονται σε **θεωρητικά** ή **αφηρημένα** μαθηματικά και σε **εφαρμοσμένα** μαθηματικά.

Θεωρητικά Μαθηματικά είναι το σύνολο των κλάδων της Μαθηματικής Επιστήμης που ασχολείται με τη θεωρητική θεμελίωση, διερεύνηση και απόδειξη των νόμων, στους οποίους στηρίζεται η Μαθηματική Επιστήμη.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά είναι το σύνολο των κλάδων των διαφόρων επιστημών (Αστρονομία, Φυσική, Μετεωρολογία, Στατιστική, Οικονομική κλπ.), οι οποίες θεμελιώνονται όχι μόνο στους δικούς τους νόμους, αλλά και στους νόμους της Μαθηματικής Επιστήμης. Ένας από τους κλάδους των εφαρμοσμένων μαθηματικών είναι τα **Οικονομικά Μαθηματικά.**

1.2 Οικονομικά Μαθηματικά. Έννοια και διαίρεση αυτών.

Η κατάρτιση ενός προγράμματος οικονομικής αναπτύξεως μιας χώρας στηρίζεται, βασικά, στις αρχές και τους νόμους της Οικονομικής Επιστήμης. Για να καταστρωθούν όμως τα διάφορα οικονομετρικά υποδείγματα χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά. Ο υπάλληλος μιας τράπεζας, για να υπολογίσει τους τόκους των καταθέσεων, για να προεξοφλήσει συναλλαγματικές, για να χορηγήσει ένα δάνειο, κλπ. χρησιμοποιεί τα μαθηματικά. Ο κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών, ο οποίος έχει ως αντικειμενικό σκοπό τη σπουδή και τη λύση των διαφόρων προβλημάτων της Οικονομικής Επιστήμης, ονομάστηκε **«Οικονομικά Μαθηματικά».**

Τα Οικονομικά Μαθηματικά, αναλόγως με τα προβλήματα με τα οποία ασχολούνται, διαιρούνται σε δύο βασικούς κλάδους: α) Τα **Μαθηματικά των Οικονομικών Πράξεων** και β) την **Οικονομετρία.**

Τα Μαθηματικά των Οικονομικών Πράξεων υποδιαιρούνται πάλι σε δύο κλάδους:

α) Ο πρώτος κλάδος ασχολείται με προβλήματα, τα οποία δημιουργούνται στις τραπεζικές και οικονομικοεμπορικές συναλλαγές. Στα προβλήματα αυτά, οι βασικοί παράγοντες είναι το χρήμα και ο τόκος. Τα μαθηματικά που ασχολούνται με τέτοια προβλήματα, ονομάζονται ειδικότερα **Μαθηματικά των Επιχειρήσεων** (Business Mathematics) ή **Τραπεζικά Μαθηματικά** ή και **Εμπορικά Μαθηματικά.**

β) Ο δεύτερος κλάδος των Μαθηματικών των Οικονομικών Πράξεων ασχολείται με τα προβλήματα των διαφόρων ασφαλίσεων. Τα μαθηματικά που ασχολούνται με τα προβλήματα των διαφόρων ασφαλιστικών οργανισμών, ονομάζονται **Ασφαλιστικά Μαθηματικά** ή **Αναλογιστικά** (Actuaries).

Η **Οικονομετρία** (Econometrics), με τη βοήθεια των Μαθηματικών και της Στατιστικής, ασχολείται με όλα τα προβλήματα της Οικονομικής Επιστήμης, εκτός από τα προβλήματα εκείνα που παρουσιάζονται στις οικονομικοεμπορικές συναλλαγές.

1.3 Θεμελιώδεις οικονομικές έννοιες και ορισμοί.

Στην προηγούμενη παράγραφο είπαμε ότι τα Μαθηματικά των Επιχειρήσεων είναι κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών και ασχολούνται με τη λύση προβλημάτων, στα οποία εισέρχεται ως βασικός παράγοντας το χρήμα. Συνεπώς, είναι απαραίτητο να δοθεί η έννοια και ο ορισμός του χρήματος.

Είναι γνωστό, ότι οι συναλλαγές των πρωτόγονων ανθρώπων είχαν τη μορφή του λεγόμενου **αντιπραγματισμού** (ανταλλαγή σε είδος). Π.χ., ο Α έδινε στο Β κρασί, σιτάρι κλπ. και έπαιρνε λάδι, ρύζι, κλπ. Στην αρχή, λοιπόν, οι άνθρωποι χρησιμοποίησαν ως ανταλλακτικά μέσα διάφορα αγαθά, όπως το σιτάρι, τα δέρματα, τα κοχύλια, τα ζώα, το αλάτι, το ρύζι, κ.ά. Όλα όμως αυτά τα αγαθά, εκτός του ότι αλλοιώνονταν με την πάροδο του χρόνου, ήταν και ογκώδη και δεν μεταφέρονταν εύκολα, γι' αυτό εγκαταλείφθηκαν όλα σιγά - σιγά και οι άνθρωποι στράφηκαν προς τα διάφορα μέταλλα και κυρίως στα πολύτιμα μέταλλα: τον άργυρο και το χρυσό. Τελικά, ως ανταλλακτικό μέσο των αγαθών χρησιμοποιήθηκε ο χρυσός, γιατί έχει ορισμένα σπάνια πλεονεκτήματα: 1) Παραμένει αναλλοίωτος με την πάροδο του χρόνου. 2) Δεν υπάρχει άφθονος στη φύση και, επομένως, έχει μεγάλη αξία. 3) Σε μικρό όγκο έχει μεγάλη αξία και μπορεί να μεταφέρεται και να φυλάγεται εύκολα. 4) Η αξία του δεν χάνεται αν κοπεί σε μικρότερα κομμάτια. Επειδή όμως και ο χρυσός με την πολλαπλή χρήση φθείρεται και πολλές φορές χάνεται, γι' αυτό το λόγο έπαψε από πολύ καιρό να χρησιμοποιείται ως μέσο ανταλλαγής των αγαθών.

Με την πάροδο όμως του χρόνου και την εξέλιξη του πολιτισμού, οι άνθρωποι επινόησαν ένα κοινό ανταλλακτικό μέσο όλων των αγαθών και του έδωσαν το όνομα **χρήμα.** Στη σύγχρονο ανταλλακτική οικονομία, το χρήμα εμφανίζεται με τη μορφή των **Χαρτονομισμάτων.** Τα διάφορα κράτη ανάθεσαν την έκδοση των χαρτονομισμάτων στις Εκδοτικές Τράπεζες, γι' αυτό ονομάζονται και **Τραπεζογραμμάτια.**

Από την Οικονομική Θεωρία είναι γνωστό ότι για να θεωρηθεί κάτι ως χρήμα πρέπει να έχει τα εξής χαρακτηριστικά: 1) Να είναι γενικό ανταλλακτικό μέσο όλων των αγαθών και 2) να είναι κοινό μέτρο των αξιών όλων των αγαθών.

Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός του χρήματος:

Χρήμα είναι το γενικό ανταλλακτικό μέσο και το κοινό μέτρο των αξιών όλων των αγαθών.

Το κοινό μέτρο, με το οποίο μετριέται η αξία όλων των αγαθών, ονομάζεται **Νομισματική Μονάδα.** Κάθε χώρα έχει τη δική της νομισματική μονάδα. Έτσι, η Ελλάδα έχει τη δραχμή, οι Η. Π. Α. το δολλάριο ($), η Γερμανία το μάρκο (D. M.), η Γαλλία το γαλλικό φράγκο (F. F.), η Αγγλία τη λίρα (£), η Ιταλία τη λιρέττα (Lit.), η Ελβετία το ελβετικό φράγκο (F. S.), η Ιαπωνία το γίεν, κλπ.

Αν θεωρήσομε ένα σύνολο νομισματικών μονάδων, τότε έχομε την έννοια του **Χρηματικού Ποσού.** Είναι γεγονός ότι, αν δανεισθεί κάποιος ένα χρηματικό ποσό, μετά πάροδο ορισμένου χρόνου, πρέπει να επιστρέψει μαζί με το ποσό και κάποια αποζημίωση στο δανειστή. Θεωρητικώς, το ποσό που δανείσθηκε και εκείνο που επιστράφηκε πρέπει να είναι οικονομικώς ισοδύναμα **(αρχή της οικονομικής ισοδυναμίας)**· για να υπάρξει όμως οικονομική ισοδυναμία πρέπει το ποσό που θα εισπραχθεί στο μέλλον να είναι μεγαλύτερο από το ποσό που έχει δανεισθεί στο παρελθόν. Π.χ., καταθέτει κάποιος σε μια τράπεζα 1.000 δρχ. και μετά ένα έτος παίρνει 1.100 δρχ. Τα ποσά αυτά αν και είναι αριθμητικώς άνισα, εν τούτοις είναι οικονομικώς ισοδύναμα. Συνεπώς, κάθε χρηματικό ποσό που δανείζεται **εντόκως** έχει παραγωγική ικανότητα. Το χρηματικό ποσό που δανείζεται ή αποταμιεύεται και έχει παραγωγική ικανότητα, ονομάζεται **Κεφάλαιο.**

Ώστε: **Κεφάλαιο καλείται κάθε χρηματικό ποσό, το οποίο όταν δανεισθεί ή αποταμιευθεί έχει παραγωγική ικανότητα.**

Τα χρήματα που έχομε στο σπίτι μας ή που δανείζομε σε φιλικά ή συγγενικά μας πρόσωπα ατόκως δεν είναι κεφάλαια από οικονομική άποψη.

Το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο οφειλέτης χρησιμοποιεί το κεφάλαιο του δανειστή καλείται **Χρόνος.**

Άρα: **Χρόνος είναι το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το κεφάλαιο έχει παραγωγική ικανότητα.**

Μονάδα μετρήσεως του χρόνου είναι συνήθως το έτος, αλλά και οι υποδιαιρέσεις του έτους: το εξάμηνο, το τρίμηνο, ο μήνας, κλπ.

Είναι γεγονός ότι, αν ο Β δανεισθεί από τον Α (για ορισμένο χρόνο) ένα κεφάλαιο, μαζί με την επιστροφή του κεφαλαίου που δανείσθηκε ο Β δίνει στον Α και μια πρόσθετη αμοιβή για τη χρησιμοποίηση του κεφαλαίου που δανείσθηκε. Η πρόσθετη αυτή αμοιβή ονομάζεται **Τόκος.**

Ώστε: **Τόκος καλείται η πρόσθετη αμοιβή, την οποία δίνει ο οφειλέτης στο δανειστή, για το δικαίωμα της χρησιμοποιήσεως ή εκμεταλλεύσεως του κεφαλαίου του.**

Το μέγεθος του τόκου εξαρτάται κυρίως από το μέγεθος του τοκιζομένου κεφαλαίου και από το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το κεφάλαιο είναι τοποθετημένο εντόκως.

Πιο πάνω είπαμε, ότι κάθε χρηματικό ποσό (κεφάλαιο) που δανείζεται εντόκως αποκτά παραγωγική ικανότητα. Για τη μέτρηση τώρα της παραγωγικής ικανότητας του κεφαλαίου, θεωρούμε τον τόκο που παράγει το κεφάλαιο μιας νομισματικής μονάδας σε μια χρονική περίοδο (π.χ. σε ένα έτος). Ο συντελεστής αυτός, ο οποίος μετράει την παραγωγική ικανότητα του κεφαλαίου, ονομάζεται **Επιτόκιο.**

Ώστε: **Επιτόκιο είναι ο τόκος κεφαλαίου μιας νομισματικής μονάδας για μια χρονική περίοδο ή ο συντελεστής μετρήσεως του τόκου.**

Στην τραπεζική πρακτική, το επιτόκιο εκφράζεται ως ο τόκος των 100 νομισματικών μονάδων σε ένα έτος και παριστάνεται με το σύμβολο % (π.χ 6%, 8%). Όταν λέμε, λόγου χάρη, ότι ο Α δανείζει χρήματα προς 10%, εννοούμε ότι οι 100 δραχμές, σε ένα έτος, του δίνουν τόκο 10 δρχ. Το επιτόκιο, ανάλογα με τη χρονική περίοδο (έτος, εξάμηνο κλπ.) στην οποία αναφέρεται, ονομάζεται ετήσιο, εξαμηνιαίο κλπ.

Είδη επιτοκίων. Έχομε τρία είδη επιτοκίων:

1) **Προεξοφλητικό επιτόκιο.** Το ύψος του προεξοφλητικού επιτοκίου καθορίζεται κάθε φορά από το Διοικητικό Συμβούλιο της Εκδοτικής Τράπεζας (Τράπεζα Ελλάδος) και αποτελεί το βασικό επιτόκιο υπολογισμού στις οικονομικοεμπορικές συναλλαγές.

2) **Νόμιμο επιτόκιο.** Ο Νόμος καθορίζει κάθε φορά ένα ανώτατο επιτόκιο, το οποίο δεν μπορεί κανείς να υπερβεί στις συναλλαγές, διαφορετικά χαρακτηρίζεται ως τοκογλύφος και τιμωρείται από το Νόμο.

3) **Συμβατικό επιτόκιο.** Πολλές φορές, το ύψος του επιτοκίου καθορίζεται συμβατικώς μεταξύ του δανειστή και του οφειλέτη· αυτό το επιτόκιο λέγεται συμβατικό.

1.4 Απλός και σύνθετος τόκος. Βραχυπρόθεσμες και μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις.

Στην προηγούμενη παράγραφο είπαμε, ότι ο δανειζόμενος ένα κεφάλαιο για μια ορισμένη χρονική περίοδο, πρέπει να επιστρέψει στο δανειστή το ποσό που δανείσθηκε και τον τόκο που έχει ήδη παραχθεί. Είναι όμως ενδεχόμενο, στο τέλος της πρώτης χρονικής περιόδου, να συμβούν δύο πράγματα:

1) Ο δανειστής να εισπράξει τον τόκο και να αφήσει το αρχικό κεφάλαιο να τοκισθεί και για δεύτερη, τρίτη, κ.ο.κ. περίοδο, δηλαδή ο δανειστής να εισπράττει κάθε χρονική περίοδο μόνο τον τόκο και κατά τη λήξη του δανείου να εισπράξει και το κεφάλαιο που δάνεισε.

2) Ο δανειστής να αφήσει τον τόκο που έχει παραχθεί στα χέρια του οφειλέτη, με σκοπό να προστεθεί ο τόκος στο αρχικό κεφάλαιο, οπότε από την επόμενη χρονική περίοδο θα φέρει τόκο το αρχικό κεφάλαιο συν ο τόκος του αρχικού κεφαλαίου. Το ίδιο θα γίνεται και στις επόμενες χρονικές περιόδους μέχρι τη λήξη του δανείου.

Στην πρώτη περίπτωση, ο τόκος και το κεφάλαιο, σε όλες τις χρονικές περιόδους, παραμένουν τα ίδια και λέμε ότι το δάνειο έγινε με **απλό τόκο.**

Στη δεύτερη περίπτωση, τόσο ο τόκος όσο και το τοκιζόμενο κεφάλαιο αυξάνουν κάθε χρονική περίοδο και λέμε ότι το δάνειο έγινε με **σύνθετο τόκο** ή με **ανατοκισμό.**

Κατά τη λύση των διαφόρων προβλημάτων των Μαθηματικών των Επιχειρήσεων γίνονται ορισμένες πράξεις πρακτικης αριθμητικής και άλγεβρας, οι οποίες, επειδή τα συμπλεκόμενα ποσά (κεφάλαιο, τόκος, επιτόκιο) είναι οικονομικά μεγέθη, ονομάζονται **οικονομικές πράξεις.** Οι οικονομικές πράξεις διακρίνονται σε δυο μεγάλες κατηγορίες:

1) **Βραχυπρόθεσμες οικονομικές πράξεις,** δηλαδή οικονομικές πράξεις χρονικής διάρκειας τριων μηνών ή το πολύ μέχρι ένα έτος. Τέτοιες οικονομικές πράξεις είναι ο απλός τόκος, η προεξόφληση, κλπ.

2) **Μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις,** δηλαδή οικονομικές πράξεις χρονικής διάρκειας πολλών ετων. Τέτοιες οικονομικές πράξεις είναι ο ανατοκισμός, τα μακροπρόθεσμα δάνεια, κ.ά.

1.5 Περιεχόμενο των Μαθηματικών των Επιχειρήσεων.

Όπως είπαμε πιο πάνω, τα Μαθηματικά των Επιχειρήσεων είναι ο κλάδος των Οικονομικών Μαθηματικών που ασχολείται με προβλήματα, τα οποία παρουσιάζονται στις οικονομικοεμπορικές συναλλαγές και στα οποία εισέρχεται ως βασικός παράγοντας το χρήμα.

Τα όρια και το περιεχόμενο των Μαθηματικών των Επιχειρήσεων δεν είναι επακριβώς καθορισμένα στην ελληνική και ξένη βιβλιογραφία· άλλωστε, στην επιστήμη δεν υπάρχουν σύνορα. Κάθε επιστημονικός κλάδος, για να επιλύσει τα παρουσιαζόμενα, κάθε φορά, προβλήματα, χρησιμοποιεί μεθόδους άλλου επιστημονικού κλάδου. Έτσι, π.χ., η σύγχρονη Οικονομική Επιστήμη, για να προσδιορίσει τα διάφορα οικονομικά μεγέθη μιας οικονομίας, χρησιμοποιεί στατιστικές μεθόδους, ανώτερα μαθηματικά και ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Οι διάφορες εμπορικές, βιομηχανικές, ναυτιλιακές κλπ. επιχειρήσεις, για να υπολογίσουν τις αποσβέσεις των στοιχείων του παγίου ενεργητικού, για τον καταρτισμό του προγράμματος των επενδύσεων τους και γενικά για την επίλυση κάθε προβλήματος της επιχειρηματικής τους δραστηριότητας, χρησιμοποιούν τα μαθηματικά, τα οποία — επειδή ασχολούνται με τα προβλήματα των επιχειρήσεων — ονομάσθηκαν **Μαθηματικά των Επιχειρήσεων.**

Το παρόν βιβλίο διαιρείται σε τρία μέρη:

Το **πρώτο μέρος** περιλαμβάνει ορισμένα κεφάλαια της Πρακτικής Αριθμητικής, διότι στην καθημερινή ζωή συναντάμε συχνά προβλήματα που λύνονται με μεθόδους της πρακτικής Αριθμητικής — π.χ. προβλήματα της μεθόδου των τριών, προβλήματα ποσοστών, προβλήματα μερισμού και εταιρίας — τα οποία πρέπει να γίνουν κτήμα στον απόφοιτο του Επαγγελματικού Λυκείου, για να μπορεί να λύνει τέτοιου είδους προβλήματα.

Το **δεύτερο μέρος** ασχολείται με προβλήματα των βραχυπρόθεσμων οικονομικών πράξεων, δηλαδή με προβλήματα: απλού τόκου, προεξοφλήσεως συναλλαγματικών και γραμματίων και αντικαταστάσεως γραμματίων.

Το **τρίτο μέρος** ασχολείται με προβλήματα των μακροπρόθεσμων οικονομικών πράξεων, δηλαδή με προβλήματα ανατοκισμού και ραντών, καθώς και με την απόσβεση (εξόφληση) των ενιαίων και ομολογιακών δανείων.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ – ΠΟΣΟΣΤΑ

2.1 Είδη ποσών. Ποσά ανάλογα. Ποσά αντίστροφα.

Είδη ποσών. Κάθε πράγμα που μπορεί να αυξηθεί ή να ελαττωθεί, ονομάζεται **ποσό** ή **μέγεθος.** Π.χ., το βάρος ενός εμπορεύματος, το μήκος ενός υφάσματος, το ύψος και το πλάτος ενός γεωμετρικού σχήματος, οι καταθέσεις σε ένα ταμιευτήριο και ο τόκος τους, κλπ. είναι ποσά.

Κάθε ποσό που μπορεί να πάρει διάφορες τιμές, λέγεται **μεταβλητό ποσό.** Π.χ. η τιμή ενός αγαθού, το βάρος ενός εμπορεύματος, το μήκος ενός υφάσματος, η θερμοκρασία, κλπ. είναι μεταβλητά ποσά.

Κάθε ποσό που έχει πάντοτε την ίδια αριθμητική τιμή, λέγεται **σταθερό ποσό.** Π.χ. ο λόγος μιας περιφέρειας κύκλου προς τη διάμετρό του είναι ένα σταθερό ποσό ($\pi = 3,14159...$), η απόσταση από την Αθήνα στην Πάτρα είναι ένα σταθερό ποσό (= 240 km).

Ας εξετάσομε τώρα το εξής απλό πρόβλημα: Το 1 μέτρο ενός υφάσματος κοστίζει 400 δραχμές. Πόσο κοστίζουν τά 2,3,4... μέτρα καί πόσο το $^1/_2$, $^1/_4$... του μέτρου;

Ο πίνακας 2.1.1 δείχνει την αντιστοιχία μεταξύ του μήκους του υφάσματος και του κόστους του.

Πίνακας 2.1.1.

Μηκος (σε μέτρα)	1	2	3	4	...	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	...
Κόστος (σε δρχ.)	400	800	1200	1600	...	200	100	...

Από τον Πίνακα 2.1.1 παρτηρούμε ότι: Αν το μήκος του υφάσματος μεταβληθει (δηλαδή αυξηθεί ή ελαττωθει) κατά ορισμένη έννοια, τότε μεταβάλλεται κατά την ίδια έννοια και το κόστος του υφάσματος. Δύο τέτοια ποσά ονομάζονται **συμμεταβλητά ή εξαρτημένα ποσά.** Ειδικότερα: Το κόστος του υφάσματος ονομάζεται **εξαρτημένο** μεταβλητό, ενώ το μήκος του λέγεται **ανεξάρτητο** μεταβλητό. Επειδή το κόστος του υφάσματος εξαρτάται από το μήκος του, λέμε ότι το κόστος του υφάσματος είναι **συνάρτηση** του μήκους του.

Συμμεταβλητά ποσά είναι: η περιφέρεια ενός κύκλου και η ακτίνα του· ο χρόνος εργασίας ενός εργάτη και η αμοιβή του με σταθερό ωρομίσθιο· η τιμή ενός εμπορεύματος και το βάρος του· ο φόρος και το εισόδημα· η τιμή και η ζητούμενη ποσότητα ενός αγαθού.

Ποσά ανάλογα. Έστω ότι ένας καθηγητής παίρνει 200 δρχ. για κάθε ώρα ιδιαίτερης διδασκαλίας. Πόσες δραχμές θα πάρει σε 2, 3, 4,... ώρες και πόσες δραχμές θα πάρει σε μισή ώρα, σε ένα τέρτατο της ώρας κλπ;

Ο Πίνακας 2.1.2 δείχνει την αντιστοιχεία μεταξύ του χρόνου διδασκαλίας σε ώρες και της αμοιβής του καθηγητή σε δραχμές.

Πίνακας 2.1.2.

Χρόνος (σε ωρες)	1	2	3	4	...	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	...
Αμοιβή (σε δρχ.)	200	400	600	800	...	100	50	...

Από τους Πίνακες 2.1.1 και 2.1.2 παρατηρούμε ότι τα ποσά: «Μήκος» σε μέτρα και «κόστος» σε δραχμές, «χρόνος» σε ώρες και «αμοιβή» σε δραχμές, έχουν τέτοια σχέση μεταξύ τους, ώστε, όταν η τιμή του ενός ποσού διπλασιασθεί, τριπλασιασθεί, τετραπλασιασθεί, κλπ. και η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, τετραπλασιάζεται κλπ.

Επίσης, όταν η τιμή του ενός ποσού (π.χ. του μήκους του υφάσματος ή του χρόνου διδασκαλίας) γίνει το μισό ($^1/_2$) το τέταρτο ($^1/_4$), κλπ., τότε και η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού (π.χ. κόστους ή αμοιβής), γίνεται το μισό, το τέταρτο, κλπ. Δύο τέτοια ποσά ονομάζονται **ανάλογα ποσά**. Συνεπώς, το **μήκος** ενός υφάσματος και το **κόστος** του, ο **χρόνος** εργασίας και η **αμοιβή** (με σταθερό ωρομίσθιο) είναι ανάλογα ποσά.

Από την παραπάνω ανάλυση συνάγομε τον ακόλουθο ορισμό:

Δύο (συμμεταβλητά) ποσά θα τα λέμε ανάλογα, όταν δούμε ότι, όταν πολλαπλασιάζεται ή διαιρείται μια τιμή του ενός ποσού με έναν αριθμό, να πολλαπλασιάζεται ή να διαιρείται και η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού με τον ίδιο αριθμό.

Ανάλογα ποσά είναι: το κόστος ενός υφάσματος είναι ανάλογο προς το μήκος του· η αξία ενός εμπορεύματος είναι ανάλογη προς το βάρος του· η περιφέρεια ενός κύκλου είναι ανάλογη προς την ακτίνα του· η αμοιβή ενός προσώπου (με σταθερό ωρομίσθιο) είναι ανάλογη με το χρόνο εργασίας· ο (απλός) τόκος είναι ανάλογος προς το τοκιζόμενο κεφάλαιο (για τον ίδιο χρόνο τοκισμού και το ίδιο επιτόκιο).

Παρατήρηση. Από τον Πίνακα 2.1.1 παίρνομε δύο τιμές του ποσού «μήκος», π.χ. τις τιμές 2 και 3 και σχηματίζομε το λόγο τους $^2/_3$. Έπειτα, παίρνομε τις αντίστοιχες προς αυτές τιμές 800 και 1200 του άλλου ποσού «κόστος» και σχηματίζομε το λόγο τους $^{800}/_{1200} = {}^8/_{12} = {}^2/_3$.

Από τον πίνακα 2.1.2 παίρνομε πάλι δύο τιμές, έστω 2 και 4, του ποσού «χρόνος». Αυτές έχουν λόγο: $^2/_4 = ^1/_2$. Οι αντίστοιχες προς αυτές τιμές 400 και 800 του άλλου ποσού «αμοιβή» έχουν λόγο: $^{400}/_{800} = ^1/_2$.

Παρατηρούμε ότι: δυο (οποιεσδήποτε) τιμές του ενός ποσού έχουν τον ίδιο λόγο που έχουν και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού.

Ώστε: **Δυο ποσά είναι ανάλογα, αν ο λόγος δύο τιμών του ενός ποσού είναι ίσος με το λόγο των αντιστοίχων τιμών του άλλου ποσού.**

Ποσά αντίστροφα. Ας εξετάσομε τώρα το εξής πρόβλημα: Ένας εργάτης για να εκτελέσει ένα έργο χρειάζεται 240 ώρες. Σε πόσες ώρες θα εκτελέσουν το ίδιο έργο 2,3,4,... εργάτες;

Ο πίνακας 2.1.3 δείχνει την αντιστοιχία μεταξύ του αριθμού των εργατων και του απαιτούμενου χρόνου για την εκτέλεση του έργου.

Πίνακας 2.1.3.

Αριθμός εργατών	1	2	3	4	...
Απαιτούμενος χρόνος σε ώρες	240	120	80	60	...

Από τον Πίνακα 2.1.3 παρατηρούμε ότι, όταν οι τιμές του ποσού «αριθμός εργατών» πολλαπλασιασθούν επί 2,3,4,... τότε οι αντίστοιχες τιμές του ποσού «χρόνος» διαιρούνται δια 2,3,4... Με άλλα λόγια, όταν ο αριθμός των εργατων διπλασιασθεί, τριπλασιασθει, κλπ., τότε για την εκτέλεση του έργου χρειάζεται ο μισός χρόνος, το ένα τρίτο του χρόνου, κλπ.

Δύο ποσά που έχουν μεταξύ τους τέτοια σχέση, ονομάζονται **αντίστροφα ποσά.**

Ώστε: **Δυο (συμμεταβλητά) ποσά θα λέμε ότι είναι αντίστροφα, όταν δούμε ότι, όταν πολλαπλασιάζεται μια τιμή του ενός ποσού με έναν αριθμό, να διαιρείται η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού με τον ίδιο αριθμό ή όταν διαιρείται μια τιμή του ενός ποσού με έναν αριθμό, να πολλαπλασιάζεται η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού με τον ίδιο αριθμό.**

Αντίστροφα ποσά είναι: Ο αριθμός των τεχνιτών και ο απαιτούμενος χρόνος κατασκευής ενός έργου· η (σταθερή) ταχύτητα ενός κινητού και ο χρόνος που χρειάζεται το κινητό για να διανύσει ορισμένη απόσταση· η ημερήσια κατανάλωση μιας ορισμένης ποσότητας τροφίμων και ο χρόνος που θα επαρκέσουν τα τρόφιμα· η ωριαία παροχή μιας βρύσης και ο χρόνος που χρειάζεται για να γεμίσει μια δεξαμενή· το μήκος και το πλάτος ενός ορθογωνίου με σταθερό εμβαδό· ο αριθμός των στροφών που κάνει ένας τροχός για να διανύσει μια ορισμένη απόσταση και το μήκος της ακτίνας του.

Παρατήρηση. Από τον Πίνακα 2.1.3 παίρνομε δύο τιμές του ενός ποσού (αριθμός εργατών) π.χ. τις 2 και 3 και σχηματίζομε το λόγο τους $^2/_3$. Έπειτα παίρνομε τις αντίστοιχες τιμές (120 και 80) του άλλου ποσού (χρόνος σε ώρες) και σχηματίζομε το λόγο τους $^{120}/_{80} = ^{12}/_8$. Συγκρίνοντας τώρα τους δύο λόγους παρατηρούμε ότι:

$$\frac{2}{3} \neq \frac{12}{8}$$

Εάν όμως αντιστρέψομε το λόγο $^{12}/_{8}$ παρατηρούμε οτι:

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνομε ότι:
Δύο ποσά είναι αντίστροφα, αν ο λόγος δύο τιμών του ενός ποσού είναι ίσος με τον αντίστροφο λόγο των αντιστοίχων τιμών του άλλου ποσού.

ΑΠΛΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

2.2 Προβλήματα με ποσά ανάλογα και ποσά αντίστροφα.

Πρόβλημα 1ο. Τα 12 μέτρα ενός υφάσματος κοστίζουν 4800 δρχ. Πόσο κοστίζουν τα 8 μέτρα του ίδιου υφάσματος;

Κατάταξη:

Λύση.

Τα 12 μέτρα κοστίζουν 4800 δρχ.
Τα 8 μέτρα κοστίζουν x; δρχ.

Στο πρόβλημα αυτό, τα ποσά «μήκος» και «κόστος» είναι **ποσά ανάλογα,** διπλάσια, τριπλάσια, κλπ., μέτρα κοστίζουν διπλάσιες, τριπλάσιες, κλπ., δραχμές. Συνεπώς, ο λόγος $^{12}/_{8}$ των τιμών 12 και 8 του ποσού «μήκος σε μέτρα» είναι ίσος με το λόγο $^{4800}/_{x}$ των αντιστοίχων τιμών 4800 και x του ποσού «κόστους σε δρχ.» Δηλαδή ισχύει η αναλογία:

$$\frac{12}{8} = \frac{4800}{x}$$

Λύνοντας ως πρός x έχομε:

$$12 \cdot x = 4800 \times 8 \implies x = 4800 \times \frac{8}{12} = 3200$$

Ώστε: Τα 8 μέτρα κοστίζουν 3200 δρχ.

Πρόβλημα 2ο. Δέκα εργάτες χρειάζονται 2400 ώρες για να τελειώσουν ένα έργο. Σε πόσες ώρες θα τελειώσουν το ίδιο έργο 12 εργάτες; (Οι εργάτες έχουν την ίδια απόδοση).

Κατάταξη:

Λύση.

Οι 10 εργάτες τελειώνουν το έργο σε 2400 ώρες
Οι 12 εργάτες τελειώνουν το έργο σε x; ώρες

Στο πρόβλημα αυτό, τα ποσά «αριθμός εργατών» και απαιτούμενος «χρόνος» εκτελέσεως του έργου είναι **ποσά αντίστροφα,** διότι αφού οι δέκα εργάτες χρειάζονται 2400 ώρες για να τελειώσουν το έργο, οι διπλάσιοι εργάτες θα τελειώσουν το έργο στο μισό του χρόνου και οι τριπλάσιοι εργάτες στο τρίτο του χρόνου. Συνεπώς, ο λόγος $^{10}/_{12}$ των τιμών 10 και 12 του ποσού «αριθμός εργατών» είναι ίσος με τον **αντίστροφο λόγο** $^{x}/_{2400}$ των αντιστοίχων τιμών 2400 και x του ποσού «χρόνος» σε ώρες. Δηλαδή ισχύει η εξής αναλογία:

$$\frac{10}{12} = \frac{x}{2400}$$

Λύνοντας ως προς x έχομε:

$$12 \cdot x = 10 \times 2400 \implies \mathbf{x = 2400 \times \frac{10}{12}} = 2000$$

Άρα: οι 12 εργάτες θα τελειώσουν το έργο σε 2000 ώρες.

Από τη λύση των προβλημάτων 1 και 2 παρατηρούμε τα εξής:

Παρατήρηση 1η. Στα προβλήματα αυτά (και τα όμοια με αυτά), επειδή δίνονται **τρεις αριθμοί** και ζητείται να βρεθεί **τέταρτος** (= x) γι' αυτό το λόγο, ο γενικός τρόπος με τον οποίο λύνονται όλα τα προβλήματα αυτού του είδους, ονομάσθηκε **απλή μέθοδος των τριών.**

Παρατήρηση 2η. Για τη λύση προβλημάτων με την απλή μέθοδο των τριών πρέπει πρώτα να εξετάσομε αν τα συμπλεκόμενα ποσά είναι **ανάλογα** ή **αντίστροφα** και έπειτα να εφαρμόσομε τον ακόλουθο πρακτικό κανόνα:

Για να βρούμε την τιμή του αγνώστου x, σε ένα πρόβλημα της απλής μεθόδου των τριών, πολλαπλασιάζομε τον υπεράνω του αγνώστου x αριθμό επί το σχηματιζόμενο κλάσμα των γνωστών τιμών αντεστραμμένο, αν τα ποσά είναι ανάλογα, όπως είναι στην κατάταξη, αν τα ποσά είναι αντίστροφα.

Πρόβλημα 3ο. Τα 10 κιλά ενός εμπορεύματος αξίζουν 800 δρχ. Πόσες δραχμές αξίζουν τα 16 κιλά;

Κατάταξη:

Λύση.

Τα 10 κιλά αξίζουν 800 δρχ.
Τα 16 κιλά αξίζουν x; δρχ.

Αφού τα 10 κιλά αξίζουν 800 δρχ. τα διπλάσια κιλά αξίζουν διπλάσιες δραχμές. Επομένως, τα ποσά «βάρος» σε κιλά και «αξία» σε δρχ. είναι **ανάλογα.**

Εφαρμόζοντας τον πιο πάνω κανόνα βρίσκομε:

$$x = 800 \times \frac{16}{10} = 1280$$

Άρα: τα 16 κιλά αξίζουν 1280 δρχ.

Πρόβλημα 4ο. Ένα αυτοκίνητο, με ταχύτητα 75 km/h, διανύει την απόσταση: Αθήνα - Θεσ/νίκη σε 8 ώρες. Με πόση ταχύτητα θα διανύσει την ίδια διαδρομή σε 10 ώρες; (Υποθέτομε ότι το αυτοκίνητο τρέχει με σταθερή ταχύτητα ή όπως λέμε με μέση ταχύτητα).

Κατάταξη:

Λύση.

Με ταχύτητα 75 km/h κάνει 8 ώρες
Με ταχύτητα x; km/h κάνει 10 ώρες

Αφού με ταχύτητα 75 km/h το αυτοκίνητο κάνει τη διαδρομή σε 8 ώρες, για να διανύσει την ίδια απόσταση σε διπλάσιες ώρες πρέπει να τρέχει με τη μισή ταχύτητα από την προηγούμενη. Άρα τα ποσά «ταχύτητα» και «χρόνος» είναι **αντίστροφα.** Συνεπώς θα έχομε:

$$x = 75 \times \frac{8}{10} = \frac{600}{10} = 60 \text{ km/h}$$

Ώστε: Το αυτοκίνητο πρέπει να τρέχει με (μέση) ταχύτητα 60 km/h για να διανύσει την απόσταση: Αθήνα - Θεσ/νίκη σε 10 ώρες.

2.2.1 Προβλήματα απλής μεθόδου των τριών.

1. Τα 23 μέτρα ενός υφάσματος αξίζουν 2553 δρχ. Πόσες δραχμές αξίζουν τα 15 μέτρα;
(Απ. 1665)

2. Δέκα εργάτες σκάβουν σε 28 ημέρες ένα κτημα. Πόσοι εργάτες θα σκάψουν το ίδιο κτήμα σε 8 ημέρες;
(Απ. 35)

3. Με 900 δρχ. αγοράζομε 3 κιλά καφέ. Πόσα κιλά καφέ θα αγοράσομε με 24.600 δρχ.;
(Απ. 82)

4. Ενας οικοδόμος σε μια εβδομάδα (= 6 ημέρες) παίρνει 2550 δρχ. Πόσες δραχμές θα πάρει για 15 ημέρες εργασίας;
(Απ. 6375)

5. Ένα αυτοκίνητο, με 45 λίτρα βενζίνης, διανύει 450 χιλιόμετρα. Αν τώρα τρέχει με την ίδια ταχύτητα, πόσα χιλιόμετρα θα διανύσει με 35 λίτρα;
(Απ. 350)

6. Ένα αυτοκίνητο, με ταχύτητα 80 km/h κάνει τη διαδρομή « Αθήνα - Πάτρα» σε 3 ώρες. Με πόση ταχύτητα θα κάνει την ίδια διαδρομή σε 6 ώρες;

(Απ. 40 km/h)

7. Ένας έμπορος αγόρασε ύφασμα προς 150 δρχ. το μέτρο. Τα $^{2}/_{3}$ του υφάσματος τα πούλησε προς 250 δρχ. το μέτρο και τα υπόλοιπα μέτρα προς 120 δρχ. το μέτρο και κέρδισε συνολικά 17.000 δρχ. Πόσα μέτρα υφάσματος είχε αγοράσει;

(Απ. 300)

8. Ένας έμπορος αγόρασε μοκέττα προς 540 δρχ. το μέτρο. Πούλησε τα $^{5}/_{8}$ της μοκέττας προς 650 δρχ. το μέτρο και τα υπόλοιπα μέτρα προς 580 δρχ. το μέτρο και κέρδισε συνολικά 67.000 δρχ. Πόσα μέτρα είχε αγοράσει;

(Απ. 800)

9. 240 κατασκηνωτές έχουν τρόφιμα για 30 ημέρες. Έπειτα από 10 ημέρες ήλθαν στην κατασκήνωση 60 τουρίστες χωρίς τρόφιμα. Πόσες ημέρες θα επαρκέσουν τα τρόφιμα;

(Απ. 16)

10. Σε ένα κάστρο ήταν πολιορκημένοι 1000 άνθρωποι και είχαν τρόφιμα για 54 ημέρες. Έπειτα από 18 ημέρες έφθασαν στο κάστρο άλλοι 500 άνθρωποι. Μετά από πόσες ημέρες θα εξαντληθούν τα τρόφιμα;

(Απ. 42)

11. Οκτώ άνδρες ή δώδεκα παιδιά εκτελούν ένα έργο σε 30 ημέρες. Οι έξι άνδρες και έντεκα παιδιά σε πόσες ημέρες θα εκτελέσουν το ίδιο έργο;

(Απ. 18)

12. Ένας χονδρέμπορος αγόρασε πατάτες προς 11,20 δρχ. το κιλό· πουλάει τα $^{6}/_{9}$ τους προς 13 δρχ. το κιλό και τις υπόλοιπες προς 12,70 δρχ. το κιλό και κερδίζει 25.500 δρχ. Πόσους τόννους είχε αγοράσει;

(Απ. 50)

13. Ένας έμπορος πούλησε λάδι και κέρδισε ποσό ίσο προς τα $^{10}/_{94}$ της τιμής πωλήσεώς του. Αν όμως κέρδιζε 340 δρχ. περισσότερο, το κέρδος θα ήταν ίσο προς το $^{1}/_{5}$ της τιμής αγοράς του λαδιού. Να βρεθεί: α) η τιμή πωλήσεως του λαδιού, β) το κέρδος που είχε από την πώληση και γ) το βάρος, του λαδιού αν με το κέρδος που πραγματοποίησε αγόραζε 20 κιλά λαδιού.

(Απ. α) 4700 δρχ. β) 500 δρχ. γ) 168 κιλά)

14. Ένας έμπορος αγόρασε ύφασμα προς 420 δρχ. το μέτρο. Πούλησε τα $^{2}/_{5}$ της ποσότητας προς 500 δρχ. το μέτρο και τα υπόλοιπα προς 350 δρχ. το μέτρο. Αν ζημιώθηκε 5000 δρχ., πόσα μέτρα είχε αγοράσει;

(Απ. 500)

ΣΥΝΘΕΤΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

2.3 Προβλήματα με ποσά ανάλογα και ποσά αντίστροφα.

Πρόβλημα 1ο. Δέκα εργάτες, όταν εργασθούν 8 ημέρες παίρνουν 36.000 δρχ. Πόσες δραχμές θα πάρουν 14 εργάτες, αν εργασθούν 16 ημέρες;

Λύση. Κατατάσσομε τα ομοειδή ποσά το ένα κάτω από το άλλο, ως εξής:

10 εργάτες σε 8 ημ. παίρνουν 36.000 δρχ.
14 εργάτες σε 16 ημ. παίρνουν x; δρχ.

Σύγκριση ποσών. α) Τα ποσά «εργάτες» και «δραχμές» είναι **ανάλογα**, διότι διπλάσιοι εργάτες, για τον ίδιο χρόνο εργασίας, θα πάρουν διπλάσιες δραχμές. β) Τα ποσά «ημέρες» και «δραχμές» είναι **ανάλογα**, διότι σε διπλάσιες ημέρες οι ίδιοι εργάτες θα πάρουν, διπλάσιες δραχμές. Παρατηρούμε οτι κάθε ποσό συγκρίνεται με το ποσό του αγνώστου.

Το πιο πάνω πρόβλημα αναλύεται σε δύο προβλήματα της απλής μεθόδου των τριων.

1α) Οι 10 εργάτες, αν εργασθούν 8 ημ., θα πάρουν 36.000 δρχ. Οι 14 εργάτες πόσες δραχμές θα πάρουν;

Κατάταξη:

Οι 10 εργ. σε 8 ημ. παίρνουν 36.000 δρχ.
Οι 14 εργ. σε 8 ημ. παίρνουν x; δρχ.

Επειδή, όπως είπαμε, τα ποσά «εργάτες», και «δραχμές» είναι ανάλογα, θα έχομε:

$$\boxed{x = 36.000 \times \frac{14}{10} \text{ δρχ.}}$$

Ώστε: Οι 14 εργάτες, αν εργασθούν 8 ημέρες, θα πάρουν

$$36.000 \times \frac{14}{10} \text{ δραχμές}$$

1β) Οι 14 εργάτες, αν εργασθούν 8 ημέρες, θα πάρουν 36.000 × $\frac{14}{10}$ δραχμές. Πόσες δραχμές θα πάρουν αν εργασθούν 16 ημέρες;

Κατάταξη:

Οι 14 εργ. σε 8 ημ. παίρνουν $36.000 \times \frac{14}{10}$ δρχ.
Οι 14 εργ. σε 16 ημ. παίρνουν x; δρχ.

Επειδή τα ποσά «ημέρες» και «δραχμές» είναι ανάλογα, θα έχομε:

$$\boxed{x = 36.000 \times \frac{14}{10} \times \frac{16}{8} = 100.800 \text{ δρχ.}} \qquad (E_1)$$

Ώστε: Οι 14 εργάτες, αν εργασθούν 16 ημέρες, θα πάρουν 100.800 δραχμές.

Πρόβλημα 2ο. Δεκαπέντε εργάτες σκάβουν ένα κτήμα 40 στρεμμάτων σε 40 ημέρες. Σε πόσες ημέρες 20 εργάτες θα σκάψουν κτήμα 60 στρεμμάτων;

Λύση. Κατατάσσομε τα ομοειδή ποσά το ένα κάτω από το άλλο, ως εξής:

Οι 15 εργ. σε 40 ημ. σκάβουν 40 στρέμματα
Οι 20 εργ. σε x; ημ. σκάβουν 60 στρέμματα

Σύγκριση ποσών. α) Τα ποσά «εργάτες» και «ημέρες» είναι **αντίστροφα**, διότι διπλάσιοι εργάτες θα σκάψουν το κτήμα σε μισές ημέρες (αν όλοι οι εργάτες έχουν την ίδια απόδοση και εργάζονται π.χ. 8 ώρες την ημέρα). β) Τα ποσά «στρέμματα» και «ημέρες» είναι **ανάλογα**, διότι ένα κτήμα 40 στρεμμάτων σκάβεται από κάποιο αριθμό εργατών σε 40 ημέρες· άλλο κτήμα, με διπλάσιο αριθμό στρεμμάτων, σκάβεται, από τους ίδιους εργάτες, σε διπλάσιο αριθμό ημερών.

Το πιο πάνω πρόβλημα μπορεί να αναλυθεί στα ακόλουθα δύο προβλήματα απλής μεθόδου των τριών:

2α) Οι 15 εργάτες σκάβουν ένα κτήμα (40 στρεμμάτων) σε 40 ημέρες. Οι 20 εργάτες σε πόσες ημέρες θα σκάψουν το ίδιο κτήμα;

Κατάταξη:

Οι 15 εργ. σκάβουν το κτήμα σε 40 ημ.
Οι 20 εργ. σκάβουν το κτήμα σε x; ημ.

Επειδή, όπως είπαμε, τα ποσά «εργάτες» και «ημέρες» είναι αντίστροφα, θα έχομε:

$$x = 40 \times \frac{15}{20} \text{ ημ.}$$

Ώστε: Οι 20 εργάτες θα σκάψουν το κτήμα των 40 στρεμμάτων σε $40 \times \frac{15}{20}$ ημέρες.

2β) Οι 20 εργάτες, για να σκάψουν το κτήμα των 40 στρεμμάτων, χρειάζονται $40 \times {}^{15}/_{20}$ ημέρες. Πόσες ημέρες θα χρειασθούν (οι ίδιοι εργάτες) για να σκάψουν ένα κτήμα 60 στρεμμάτων;

Κατάταξη:

Οι 20 εργ. για 40 στρέμματα χρειάζονται $40 \times \frac{15}{20}$ ημ.
Οι 20 εργ. για 60 στρέμματα χρειάζονται x; ημ.

Επειδή τα ποσά «στρέμματα» και «ημέρες» είναι, όπως είπαμε, ανάλογα θα είναι:

$$\boxed{x = 40 \times \frac{15}{20} \times \frac{60}{40} = 45 \text{ ημ.}} \qquad (E_2)$$

Ώστε: Οι 20 εργάτες, θα χρειασθούν 45 ημέρες, για να σκάψουν ένα κτήμα 60 στρεμμάτων.

Όπως βλέπομε, για να λύσομε τα προηγούμενα δύο προβλήματα, αναλύσαμε το κάθε ένα σε δύο προβλήματα απλής μεθόδου των τριών, γι' αυτό το λόγο, τα προβλήματα τέτοιου είδους ονομάζονται **προβλήματα σύνθετης μεθόδου των τριών.**

Από τα τελικά εξαγόμενα (E_1) και (E_2) των πιο πάνω προβλημάτων, προκύπτει ο ακόλουθος γενικός κανόνας:

Για να βρούμε την τιμή του αγνώστου x, πολλαπλασιάζομε τον αριθμό που είναι πάνω από τον άγνωστο x με κάθε ένα από τα κλάσματα που σχηματίζονται από τις δύο άλλες τιμές κάθε ποσού, αντεστραμμένο, αν τα ποσά είναι ανάλογα προς το ποσό του x, όπως είναι το κλάσμα, αν τα ποσά είναι αντίστροφα προς το ποσό του αγνώστου.

Πρόβλημα 3ο. Δέκα εργάτες, εργαζόμενοι 8 ώρες την ημέρα, παίρνουν σε 20 ημέρες 80.000 δρχ. Πόσες ώρες την ημέρα, πρέπει να εργασθούν 8 εργάτες για να πάρουν σε 15 ημέρες 60.000 δρχ.;

Λύση. Κατατάσσομε τα ομοειδή ποσά το ένα κάτω από το άλλο:

Οι 10 εργ. με 8 ώρες την ημ. παίρνουν σε 20 ημ. 80.000 δρχ.
Οι 8 εργ. με x; ώρες την ημ. παίρνουν σε 15 ημ. 60.000 δρχ.

Σύγκριση ποσών. α) Τα ποσά «εργάτες» και «ώρες» είναι **αντίστροφα**, διότι ο μισός αριθμός εργατών τελειώνει το ίδιο έργο σε διπλάσιες ώρες. β) Τα ποσά «ημέρες» και «ώρες» είναι **αντίστροφα**, διότι σε μισό αριθμό ημερών θα χρειασθούν διπλάσιες ώρες, για να τελειώσουν το έργο οι ίδιοι εργάτες. γ) Τα ποσά «αμοιβή» σε δρχ. και «ώρες εργασίας» είναι **ανάλογα**, διότι για διπλάσιες ώρες, οι ίδιοι εργάτες, θα παίρνουν διπλάσια αμοιβή. Συνεπώς, σύμφωνα με τον πιο πάνω κανόνα, θα έχομε:

$$x = 8 \times \frac{10}{8} \times \frac{20}{15} \times \frac{60.000}{80.000} = 10 \text{ ωρες}$$

Ώστε: Οι 8 εργάτες, για να πάρουν 60.000 δρχ. σε 15 ημέρες, πρέπει να εργάζονται 10 ώρες την ημέρα.

2.3.1 Προβλήματα σύνθετης μεθόδου των τριών.

1. Δεκαέξι εργάτες σε δώδεκα ημέρες σκάβουν ένα αγρόκτημα είκοσι τεσσάρων στρεμμάτων. Σε πόσες ημέρες είκοσι εργάτες θα σκάψουν αγρόκτημα δέκα στρεμμάτων;

   (Απ. 4)

2. Διακόσιοι στρατιώτες χρειάζονται 400 κιλά ψωμί για να περάσουν 4 ημέρες. Πόσα κιλά ψωμί θα χρειασθούν 350 στρατιώτες για να περάσουν 14 ημέρες;

   (Απ. 2450)

3. Για εργασία 8 ημερών 10 εργάτες, πήραν 48.000 δρχ. Πόσες δραχμές θα πάρουν 12 εργάτες αν εργασθούν 14 ημέρες;

   (Απ. 100.800)

4. Δεκαπέντε εργάτες, εργαζόμενοι 8 ώρες την ημέρα, σκάβουν ένα κτήμα 40 στρεμμάτων σε 40 ημέρες. Είκοσι εργάτες, εργαζόμενοι 10 ώρες την ημέρα, σε πόσες ημέρες θα σκάψουν ένα κτήμα 60 στρεμμάτων;

(Απ. 36)

5. Ένα εξοχικό σπίτι συμφωνήθηκε να κατασκευασθεί από 9 εργάτες σε 16 ημέρες. Οι εργάτες όμως σε 6 ημέρες, εργαζόμενοι 10 ώρες την ημέρα, κατασκεύασαν το ένα τρίτο του σπιτιού. Πόσες ώρες την ημέρα πρέπει να εργασθούν οι ίδιοι εργάτες τις υπόλοιπες ημέρες για να τελειώσουν το σπίτι σε 16 ημέρες πού είχαν συμφωνήσει;

(Απ. 12 ωρ/ημ.)

6. Με 36 κιλά νήματος υφαίνομε 54 μέτρα υφάσματος πλάτους 0,80 m. Με 50 κιλά νήματος πόσα μέτρα θα υφάνομε, αν τώρα το πλάτος του υφάσματος είναι 1,20 m;

(Απ. 50 m)

7. Είκοσι τέσσερις εργάτες μπορούν να εκτελέσουν ένα έργο σε 28 ημέρες, αν εργάζονται 7 ώρες την ημέρα. Μετά 10 ημέρες εργασίας 6 εργάτες αρρώστησαν· οι υπόλοιποι εργάτες αύξησαν την εργασία τους κατά μία ώρα την ημέρα. Σε πόσες ημέρες θα τελειώσει το έργο και τι ποσό θα πάρει ο καθένας αν πάρουν 70.560 δρχ. για ολόκληρο το έργο;

(Απ. 21 ημ. - 1050 - 3570)

8. Ένα πλοιο έχει πλήρωμα140 ανδρών και τρόφιμα για 70 ημέρες. Μετά 10 ημερων πλου παρέλαβε ναυαγούς και το ταξίδι αυξήθηκε κατά 10 ημέρες. Ελαττώθηκε τότε η μερίδα κατά τα $^2/_5$ της αρχικής. Πόσους ναυαγούς παρέλαβε;

(Απ. 60)

9. Εργολάβος ανέλαβε να εκτελέσει μια εργασία σε τριάντα ημέρες αν μίσθωνε δύο εκσκαφείς, οι οποίοι εργάζονται εννέα ώρες την ημέρα. Μετά παρέλευση δέκα ημερών, από την ημέρα που συμφώνησε την εργασία, κατόρθωσε να μισθώσει δύο εκσκαφείς, τριπλής αποδόσεως από τους πρώτους, οι οποίοι εργάζονται έξι ώρες την ημέρα. Να βρεθεί πόσες ημέρες νωρίτερα του προβλεπόμενου χρόνου θα τελειώσει η εργασία.

(Απ. 5 ημ.)

10. Ένα οικόπεδο μήκους 32 μέτρων και πλάτους 30 μέτρων τιμάται 480.000 δρχ. Πόσο πλάτος θα είχε το οικόπεδο, αν είχε μήκος 20 μέτρα και τιμή 450.000 δρχ.;

(Απ. 45 m)

ΠΟΣΟΣΤΑ

2.4 Βασικές έννοιες και ορισμοί.

Οι άνθρωποι στις οικονομικοεμπορικές τους συναλλαγές, για να υπολογίσουν τα κέρδη, τις ζημίες, τις μεσιτείες, τις εκπτώσεις, τις προμήθειες, τα ασφάλιστρα, τις αυξήσεις των μισθών και ημερομισθίων, κλπ., χρησιμοποιούν για βάση τον αριθμό 100 και σε ορισμένες περιπτώσεις τον αριθμό 1000.

Στην καθημερινή πρακτική συναντάμε π.χ. τα ακόλουθα προβλήματα:

1) Ο έμπορος Ε πούλησε εμπορεύματα που του κόστισαν 36.500 δρχ. με κέρδος 18%. Πόσες δραχμές κέρδισε;

2) Ο πελάτης Π αγόρασε «τοις μετρητοίς», από ένα εμπορικό κατάστημα, μια συσκευή τηλεοράσεως αξίας 16.000 δρχ. με έκπτωση 25%. Πόση έκπτωση είχε ο πελάτης και πόσες δραχμές εισέπραξε το κατάστημα;

3) Ο μεσίτης Μ, για την πώληση ενός διαμερίσματος αξίας 1.800.000 δρχ., παίρνει 14‰ για μεσιτικά. Πόσες δραχμές θα εισπράξει;

Λύσεις.

1) Όταν λέμε ότι ο έμπορος πούλησε τα εμπορεύματα με κέρδος 18%, εννοούμε ότι σε κάθε 100 δραχμές ο έμπορος κερδίζει 18 δρχ. Δηλαδή, πρέπει να λύσομε το εξής πρόβλημα της απλής μεθόδου των τριών:

Στις 100 δρχ. ο Ε κερδίζει 18 δρχ.
Στις 36.500 δρχ. ο Ε κερδίζει x; δρχ.

Επειδή τα ποσά είναι ανάλογα, θα έχομε:

$$x = 18 \times \frac{36.500}{100} = 6570 \text{ δρχ.}$$

Άρα, ο Ε κέρδισε 6570 δραχμές.

2) Όταν λέμε ότι το κατάστημα κάνει έκπτωση 25%, εννοούμε ότι εμπόρευμα αξίας 100 δρχ. το πουλάει 75 δρχ.

Δηλαδή:

Στις 100 δρχ. κάνει έκπτωση 25 δρχ. και εισπράττει 75 δρχ.
Στις 16.000 δρχ. κάνει έκπτωση x_1; δρχ. και εισπράττει x_2; δρχ.

Επειδή τα ποσά είναι ανάλογα, θα έχομε:

$$\text{Έκπτωση} = x_1 = 25 \times \frac{16.000}{100} = 4000 \text{ δρχ.}$$

$$\text{Είσπραξη} = x_2 = 75 \times \frac{16.000}{100} = 12.000 \text{ δρχ.}$$

3) Όταν λέμε ότι ο μεσίτης παίρνει 14‰ μεσιτικά, εννοούμε ότι για κάθε 1000 δρχ. αυτός θα εισπράττει 14 δρχ. για μεσιτικά.

Δηλαδή:

Για αξία 1000 δρχ. παίρνει 14 δρχ. μεσιτικά
Για αξία 1.800.000 δρχ. παίρνει x; δρχ. μεσιτικά

Τα ποσά είναι ανάλογα, άρα θα έχομε:

$$x = 14 \times \frac{1.800.000}{1000} = 25.200 \text{ δρχ.}$$

Ώστε ο μεσίτης θα εισπράξει 25.200 δρχ.

Από τα παραπάνω προβλήματα συνάγομε τις ακόλουθες έννοιες:

Τα 18%, 25%, 14‰ παριστάνουν τα δεκαδικά κλάσματα:

$$\frac{18}{100}, \frac{25}{100}, \frac{14}{1000}$$

και απαγγέλλονται: **18 στα εκατό** (18 τοις εκατό), **25 στα εκατό** (25 τοις εκατό) και **14 στα χίλια** (τοις χιλίοις).

Το ποσό που, με βάση το 100 ή το 1000, βρίσκεται ότι αναλογεί στο αρχικό ποσό, ονομάζεται **ποσοστό.** Στα πιο πάνω προβλήματα βρήκαμε τα ποσοστά:

1) 6570 δρχ. 2) 4000 δρχ. και 3) 25.200 δρχ.

Το ποσό, βάσει του οποίου υπολογίζεται το ποσοστό, ονομάζεται **αρχικό ποσό.** Στα παραπάνω προβλήματα, αρχικά ποσά είναι:

1) 36.500 δρχ. 2) 16.000 δρχ. και 3) 1.800.000 δρχ.

Το τόσο τοις εκατό (%) ή τοις χιλίοις (‰) είναι ο λόγος του κέρδους ή της εκπτώσεως ή της μεσιτείας, κλπ. προς το αρχικό ποσό. Έτσι, στα πιο πάνω προβλήματα έχομε:

1) $\dfrac{6570}{36.000} = 0{,}18 = \dfrac{18}{100}$ που γράφεται 18%

2) $\dfrac{4000}{16.000} = 0{,}25 = \dfrac{25}{100}$ που γράφεται 25%

3) $\dfrac{25.200}{1.800.000} = 0{,}014 = \dfrac{14}{1000}$ που γράφεται 14‰

Τέλος, το ποσό που προκύπτει από το αρχικό ποσό, αυξημένο ή ελαττωμένο κατά το ποσοστό, λέγεται **τελικό ποσό.** Στα προβλήματα 1 και 2 τελικά ποσά είναι:

36.500 + 6570 = 43.070 δρχ. και 16.000 − 4000 = 12.000 δρχ.

Τα ποσοστά είναι ανάλογα των ποσών βάσει των οποίων υπολογίζονται, γι' αυτό όλα τα προβλήματα των ποσοστών λύνονται με την απλή μέθοδο των τριών και **τα ποσά είναι πάντοτε ανάλογα.** Πρέπει όμως να προσέχομε, κατά την κατάταξη των δεδομένων του προβλήματος, να βάζομε τα ομοειδή ποσά στην ίδια κατακόρυφη στήλη.

Τα προβλήματα που θα εξετάσομε στις επόμενες παραγράφους είναι: 1) Η εύρεση του ποσοστού, 2) η εύρεση του αρχικού ποσού, 3) η εύρεση του τόσο τοις % ή τόσο τοις ‰ κ.ά.

2.5 Εύρεση του ποσοστού.

Πρόβλημα 1ο. Ο έμπορος Ε πουλάει τα εμπορεύματά του με κέρδος 26%. Πόσες δραχμές θα κερδίσει αν πουλήσει εμπορεύματα αξίας 44.500 δραχμών;

Λύση. Για τη λύση οποιουδήποτε προβλήματος ποσοστών, πρέπει να προσέχομε ώστε, κατά την κατάταξη των δεδομένων του προβλήματος, να βάζομε τα ομοειδή ποσά στην ίδια στήλη. Έτσι, για το πιο πάνω πρόβλημα έχομε:

Κατάταξη:

Για εμπ/τα αξίας 100 δρχ. κερδίζει 26 δρχ.
Για εμπ/τα αξίας 44.500 δρχ. κερδίζει x; δρχ.

Τα ποσά είναι ανάλογα, άρα ισχύει η αναλογία:

$$\frac{100}{44.500} = \frac{26}{x}$$

ή $100 \cdot x = 26 \times 44.500$

και $$x = 26 \times \frac{44.500}{100} = 11.570$$

Άρα: Ο Ε θα κερδίσει 11.570 δρχ.

Σημείωση. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγομε αν εφαρμόσομε το γνωστό πρακτικό κανόνα: Ο άγνωστος x είναι ίσος με τον υπεράνω αυτού αριθμό επί το κλάσμα (που σχηματίζουν οι άλλες τιμές) αντεστραμμένο. Ο ίδιος κανόνας εφαρμόζεται σε όλα τα προβλήματα των ποσοστών, γιατί, όπως είπαμε, τα ποσά είναι πάντοτε ανάλογα.

Πρόβλημα 2ο. Ένα κατάστημα ηλεκτρικών ειδών κάνει έκπτωση 30% (επί της αναγραφόμενης τιμής) για κάθε αγορά «τοις μετρητοίς». Ο πελάτης Π αγόρασε ένα ηλεκτρικό ψυγείο, στο οποίο αναγράφεται η τιμή: 28.600 δρχ. Πόση είναι η έκπτωση και πόσες δραχμές εισέπραξε το κατάστημα;

Λύση. Όταν λέμε ότι το κατάστημα κάνει έκπτωση 30%, εννοούμε ότι εμπόρευμα αξίας 100 δρχ. το πουλάει 70 δρχ. (= 100 — 30).

Κατάταξη:

Στις 100 δρχ. κάνει έκπτωση 30 δρχ. και εισπράττει 70 δρχ.
Στις 28.600 δρχ. κάνει έκπτωση x_1 δρχ. και εισπράττει x_2 δρχ.

Επειδή τα ποσά είναι ανάλογα, θα έχομε:

$$\text{Έκπτωση} = x_1 = 30 \times \frac{28.600}{100} = 8.580 \text{ δρχ.}$$

$$\text{Είσπραξη} = x_2 = 70 \times \frac{28.600}{100} = 20.020 \text{ δρχ.}$$

Πρόβλημα 3ο. Ένας εξαγωγέας φρούτων πούλησε πέντε τόννους ροδάκινα με ζημία 18% επί της τιμής της αγοράς και εισέπραξε 160.000 δρχ. Πόσες δραχμές ζημιώθηκε;

Λύση. Όταν λέμε ότι ο εξαγωγέας πούλησε με ζημία 18%, εννοούμε ότι σε κάθε 100 δρχ. χάνει 18 δρχ., δηλαδή ροδάκινα αξίας αγοράς 100 δραχμών τα πουλάει 82 δρχ. (= 100 — 18).

Κατάταξη:

Αγορά 100 δρχ.	ζημία 18 δρχ.	πώληση	82 δρχ.
	ζημία x; δρχ.	πώληση	160.000 δρχ.

$$x = 18 \times \frac{160.000}{82} = 35.122 \text{ δρχ.}$$

Πρόβλημα 4ο. Ένα διαμέρισμα, αξίας 1.875.000 δρχ., ασφαλίσθηκε (για περίπτωση πυρκαγιάς) με 4‰ το έτος. Σε πόσες δραχμές ανέρχονται τα ετήσια ασφάλιστρα;

Λύση. Όταν λέμε ότι τα ασφάλιστρα είναι 4‰, εννοούμε ότι ο ιδιοκτήτης του διαμερίσματος, για κάθε 1000 δρχ., καταβάλλει 4 δρχ. για ασφάλιστρα.

Κατάταξη:

Στις	1000 δρχ.	καταβάλλει 4	δρχ. ασφάλιστρα
Στις	1.875.000 δρχ.	καταβάλλει x;	δρχ. ασφάλιστρα

$$x = 4 \times \frac{1.875.000}{1000} = 7500 \text{ δρχ.}$$

Ώστε: Ο ιδιοκτήτης του διαμερίσματος πρέπει να πληρώνει 7500 δρχ. το χρόνο για ασφάλιστρα.

Πρόβλημα 5ο. Αντιπροσωπεία αυτοκινήτων πούλησε ένα αυτοκίνητο αξίας αγοράς 260.000 δρχ. με κέρδος 32%. Πόσες δραχμές κέρδισε και πόσες δραχμές εισέπραξε από την πώληση;

Λύση.

Κατάταξη:

Αγορά 100 δρχ.	κέρδος 32 δρχ.	είσπραξη	132 δρχ.
Αγορά 260.000 δρχ.	κέρδος x_1 δρχ.	είσπραξη	x_2 δρχ.

$$\text{Κέρδος} = x_1 = 32 \times \frac{260.000}{100} = 83.200 \text{ δρχ.}$$

$$\text{Είσπραξη} = x_2 = 132 \times \frac{260.000}{100} = 343.200 \text{ δρχ.}$$

2.6 Εύρεση του αρχικού ποσού.

Πρόβλημα 1ο. Έμπορος ηλεκτρικων ειδων πούλησε ένα ηλεκτρικό ψυγείο με κέρδος 25% και εισέπραξε 23.250 δρχ. Πόσες δραχμές του είχε κοστίσει το ψυγείο και πόσες δρχ. κέρδισε;

Λύση.

Κατάταξη:

Όταν εισπράττει 125 δρχ. το εμπόρευμα κοστίζει 100 δρχ.
Όταν εισπράττει 23.250 δρχ. το εμπόρευμα κοστίζει x; δρχ.

$$x = 100 \times \frac{23.250}{125} = 18.600 \text{ δρχ.}$$

Ώστε: Το ηλεκτρικό ψυγείο είχε κοστίσει 18.600 δρχ.
Κέρδος = τιμή πωλήσεως — τιμή κόστους = 23.250 — 18.600 = 4650 δρχ.

Πρόβλημα 2ο. Έμπορος ετοίμων ενδυμάτων πούλησε ενδύματα παλαιάς μόδας με ζημία 32% και εισέπραξε 34.000 δρχ. Πόσες δραχμές του είχαν κοστίσει τα εμπορεύματα και πόσες δραχμές ζημιώθηκε ο έμπορος;

Λύση. Όταν λέμε ότι ο έμπορος πούλησε με ζημία 32%, εννοούμε ότι σε 100 δρχ. χάνομε 32 δρχ., άρα πουλάμε με 68 (= 100 — 32) δρχ.

Κατάταξη:

Όταν πουλιέται 68 δρχ. το εμπ/μα κοστίζει 100 δρχ.
Όταν πουλιέται 34.000 δρχ. το εμπ/μα κοστίζει x; δρχ.

$$x = 100 \times \frac{34.000}{68} = 50.000 \text{ δρχ.}$$

Άρα, τα ενδύματα είχαν κοστίσει στον έμπορο 50.000 δρχ.
Επειδή: Τιμή πωλήσεως — τιμή κόστους = 34.000 — 50.000 = — 16.000, συμπεραίνομε ότι ο έμπορος ζημιώθηκε 16.000 δρχ.

Πρόβλημα 3ο. Αντιπροσωπεία αυτοκινήτων πούλησε ένα αυτοκίνητο με κέρδος 32% επί της τιμής της αγοράς και κέρδισε 83.200 δρχ. Πόσες δραχμές είχε κοστίσει το αυτοκίνητο;

Λύση.

Κατάταξη:

Σε αγορά 100 δρχ. το κέρδος είναι 32 δρχ.
Σε αγορά x; δρχ. το κέρδος είναι 83.200 δρχ.

$$x = 100 \times \frac{83.200}{32} = 260.000$$

Ώστε: Το αυτοκίνητο είχε κοστίσει 260.000 δρχ.

2.7 Εύρεση του τόσο τοις % ή τοις ‰.

Πρόβλημα 1ο. Έμπορος πούλησε εμπορεύματα αντί 12.000 δρχ. και κέρδισε 3600 δρχ. Πόσο τοις εκατό κέρδισε;

Λύση.

Κατάταξη:

Για εμπ/τα αξίας 12.000 δρχ. το κέρδος είναι 3600 δρχ.
Για εμπ/τα αξίας 100 δρχ. το κέρδος είναι x; δρχ.

$$x = 3600 \times \frac{100}{12.000} = 30\%$$

Άρα, κέρδισε 30%.

Πρόβλημα 2ο. Ο ιδιοκτήτης ενός διαμερίσματος αξίας 1.875.000 δρχ. πληρώνει για πυρασφάλεια 7500 δρχ. το έτος. Πόσο τοις ‰ είναι τα ετήσια ασφάλιστρα;

Λύση.

Κατάταξη:

Στις 1.875.000 δρχ. πληρώνει 7500 δρχ. ασφάλιστρα
Στις 1000 δρχ. πληρώνει x; δρχ. ασφάλιστρα

$$x = 7500 \times \frac{1000}{1.875.000} = 4‰$$

Ώστε: Για κάθε 1000 δρχ. ο ιδιοκτήτης πληρώνει 4 δρχ. για ασφάλιστρα.

Πρόβλημα 3ο. Αντιπροσωπεία αυτοκινήτων πούλησε ένα αυτοκίνητο αντί 300.000 δρχ. και κέρδισε 60.000 δρχ. Πόσο τοις % κέρδισε επί του κόστους αγοράς;

Λύση. Το αυτοκίνητο είχε στοιχίσει στην αντιπροσωπεία: 300.000 — 60.000 = 240.000 δρχ.

Κατάταξη:

Για πώληση 300.000 δρχ. έχει κέρδος 60.000 δρχ. και κόστος 240.000 δρχ.
κέρδος x; δρχ. και κόστος 100 δρχ.

$$x = 60.000 \times \frac{100}{240.000} = 25\%$$

Πρόβλημα 4ο. Εξαγωγέας φρούτων πούλησε ροδάκινα αντί 72.000 δρχ. με ζημία 48.000 δρχ. Πόσο τοις % επί του κόστους ζημιώθηκε;

Λύση. Ο εξαγωγέας, για να αγοράσει τα ροδάκινα είχε δώσει 72.000 + 48.000 = 120.000 δρχ.

Άρα: Για πώληση 72.000 δρχ. έχει ζημία 48.000 και κόστος 120.000 δρχ.
ζημία x; και κόστος 100 δρχ.

$$x = 48.000 \times \frac{100}{120.000} = 40\%$$

2.8 Προβλήματα ποσοστών.

1. Ένας έμπορος πούλησε εμπορεύματα κόστους 22.500 δρχ. Με κέρδος 28%. Ερωτάται: α) Πόσες δρχ. κέρδισε και β) πόσες δρχ. εισέπραξε;

   (Απ. α) 6300. β) 28.000)

2. Κάποιος ασφάλισε τα εμπορεύματά του που τα μετέφερε με πλοίο προς 4‰ και πλήρωσε 720 δρχ. για ασφάλιστρα. Ποια ήταν η αξία των εμπορευμάτων;

   (Απ. 180.000)

3. Έμπορος πούλησε εμπορεύματα με κέρδος 25%. Ποια ήταν η αξία τους, αν είναι γνωστό ότι κέρδισε 23.500 δρχ.;

   (Απ. 94.000)

4. Οι κτηματομεσίτες, στις αγοραπωλησίες, παίρνουν μεσιτικά 4‰ επί της αξίας των διαμερισμάτων, οικοπέδων, κλπ. Για την πώληση ενός οικόπεδου, αξίας 1.785.000 δρχ., πόσες δρχ. θα πάρει ο μεσίτης;

   (Απ. 7140)

5. Ένα εμπορικό κατάστημα πουλάει τα εμπορεύματά του με έκπτωση 30%. Πόσες δρχ. θα πληρώσομε αν αγοράσομε εμπορεύματα αξίας 28.750 δρχ. και πόσες δρχ. θα είναι η έκπτωση;

   (Απ. 20.125 - 8625)

6. Έμπορος κερδίζει 25% επί της τιμης αγοράς των εμπορευμάτων του. Πόσες δρχ. πρέπει να πουλήσει ένα εμπόρευμα που το αγόρασε 18.500 δρχ.;

   (Απ. 23.125)

7. Εμπόρευμα πουλήθηκε με ζημία 20% αντί 16.000 δρχ. Πόση ήταν η αξία του εμπορεύματος;

   (Απ. 20.000)

8. Για εμπόρευμα αξίας 62.500 δρχ. πληρώσαμε 50.000 δρχ. Με πόσο τοις % υπολογίσθηκε η έκπτωση;

   (Απ. 20%)

9. Αγόρασε κάποιος ένα διαμέρισμα και μετά από δύο χρόνια το πούλησε με κέρδος 40% επί της τιμής της αγοράς. Αν από την πώληση κέρδισε 320.000 δρχ., να βρεθεί η αξία της αγοράς του διαμερίσματος.

   (Απ. 800.000)

10. Έμπορος αγόρασε 5200 μέτρα υφάσματος προς 102 δρχ. το μέτρο και πλήρωσε για μεταφορικά 5000 δρχ. Το υφασμα πουλήθηκε προς 134 δρχ. το μέτρο. Πόσο τοις % κέρδισε: α) επί του κόστους αγοράς και β) επί της τιμής πωλήσεως;

(Απ. 30,15% - 23,16%)

11. Αγόρασε κάποιος 8000 κιλά σιτάρι προς 6,50 δρχ. το κιλό. Κατά τη μεταφορά χάθηκε το 5% του σιταριού. Πόσο πρέπει να πουλήσει το κιλό του υπόλοιπου σιταριού, για να κερδίσει 15%;

(Απ. 7,86 δρχ. το κιλό)

12. Ένας έμπορος αγόρασε 3250 κιλά λάδι προς 25,40 δρχ. το κιλό και πλήρωσε: για μεταφορικά 0,40 δρχ. το κιλό και για αποθήκευτρα 600 δρχ. Το λάδι το πούλησε προς 30,60 δρχ. το κιλό. Το λάδι είχε 1% φύρα. Να βρεθεί αν κέρδισε ή ζημιώθηκε και πόσο τοις % επί του κόστους.

(Απ. κέρδος 16,58%)

13. Ένας παραγγελιοδόχος, όταν πηγαίνει σε επαρχιακές πόλεις παίρνει έξοδα εκτός έδρας 1200 δρχ. την ημέρα και 2,5% προμήθεια για τα εμπορεύματα που πουλάει. Ύστερα από περιοδεία 24 ημερων πήρε για προμήθειες και έξοδα 58.800 δρχ. Να βρεθεί η αξία των εμπορευμάτων που πούλησε.

(Απ. 1.200.000)

14. Αγόρασε κάποιος ένα οικόπεδο 15 στρεμμάτων και έδωσε για μεσιτικά 31.250 δρχ. Ο μεσίτης πήρε 2% επί της αξίας του οικοπέδου. Πόσο κόστισε το στρέμμα;

(Απ. 106.250)

15. Ασφάλισε κάποιος ένα διαμέρισμα αξίας 2.000.000 δρχ. για 5 έτη με 1,5‰ ετήσια ασφάλιστρα. Επειδή πλήρωσε αμέσως ολόκληρο το ποσό του χαρίσθηκαν ενός έτους ασφάλιστρα. Πλήρωσε επί πλέον για φόρο δημοσίου 14% επί των ασφαλίστρων και 990 δρχ. για χαρτόσημο. Πόσες δραχμές πλήρωσε συνολικά;

(Απ. 15.090)

16. Έμπορος αγόρασε μια ποσότητα σιταριού. Στην αρχή πούλησε το ένα τέταρτο της ποσότητας με κέρδος 5%. Έπειτα, πούλησε άλλο ένα τέταρτο με κέρδος 15% και τα υπόλοιπο με ζημία 4,67%. Από την πώληση κέρδισε 5000 δρχ. Πόσο του κόστισε η αγορά;

(Απ. 187.617)

17. Αγόρασε κάποιος δυο κομμάτια υφάσματος. Για το α' έδωσε 45.000 δρχ. και για το β' 40.000 δρχ. Το α' το πούλησε με ζημία 4,8%· πόσο τοις % πρέπει να πουλήσει το β' για να κερδίσει και από τα δυο κομμάτια 1560 δρχ.;

(Απ. 9,3%)

18. Αντιπροσωπεία αυτοκινήτων έκανε σε αγοραστή αυτοκινήτου, αξίας 600.000 δρχ., έκπτωση 12%. Τα έξοδα μεταβιβάσεως κλπ., που βαρύνουν τον αγοραστή, είναι κατά 28.500 δρχ. λιγότερα της εκπτώσεως. Πόσο τοις % επί της τιμής της αγοράς ανέρχεται η έκπτωση και πόσο επί της τιμής του κόστους του αγοραστή;

(Απ. 13,64% - 5%)

19. Έμπορος αγόρασε 1200 μέτρα ύφασμα προς 580 δρχ. το μέτρο και πλήρωσε για μεταφορικά 2000 δρχ. Το ύφασμα πουλήθηκε προς 720 δρχ. το μέτρο. Να βρεθεί πόσο τοις % κέρδισε: α) επί του κόστους αγοράς και β) επί της τιμής πωλήσεως.

(Απ. α) 23,78%. β) 19,21%)

20. Έμπορος αγόρασε 2150 κιλά ρύζι προς 32 δρχ. το κιλό και πλήρωσε 2 δρχ. κατά κιλό για μεταφορικά και 5000 δρχ. για αποθήκευτρα. Το ρύζι πουλήθηκε προς 39 δρχ. το κιλό. Κατά την πώληση το ρύζι παρουσίασε φύρα 2%. Να βρεθεί αν ο έμπορος κέρδισε ή ζημιώθηκε και πόσο τοις % επί του κόστους.

(Απ. κέρδος 5,21%)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΕ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

3.1 Αριθμοί: ανάλογοι προς άλλους, αντίστροφοι και αντιστρόφως ανάλογοι.

Έστω ότι έχομε τους αριθμούς:

2, 3, 5

Αν πολλαπλασιάσομε τους πιο πάνω αριθμούς επί τον ίδιο αριθμό, π.χ. επί 5, τότε προκύπτουν οι αριθμοί: 10, 15, 25.

Οι αριθμοί 10,15, 25 λέγονται **ανάλογοι** προς τους αριθμούς 2, 3, 5.

Αν τώρα οι αριθμοί 10, 15, 25 πολλαπλασιασθούν επί τον αριθμό $1/_5$ τότε προκύπτουν οι αριθμοί:

$$10 \times \frac{1}{5} = 2, \qquad 15 \times \frac{1}{5} = 3, \qquad 25 \times \frac{1}{5} = 5$$

Οι αριθμοί 2, 3, 5 λέγονται **ανάλογοι** προς τους αριθμούς 10, 15, 25, διότι προκύπτουν από αυτούς δια πολλαπλασιασμού επί τον ίδιο αριθμό.

Ώστε: **Δύο ή περισσότεροι αριθμοί λέγονται ανάλογοι προς άλλους, αν γίνονται από αυτούς δια του πολλαπλασιασμού επί τον ίδιο αριθμό.**

Π.χ. οι αριθμοί 28, 40, 48 είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 7,10, 12 γιατί προκύπτουν από αυτούς δια του πολλαπλασιασμού επί τον αριθμό 4, αλλά και οι αριθμοί 7, 10, 12 είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 28, 40, 48, γιατί γίνονται από αυτούς δια του πολλαπλασιασμού επί τον ίδιο αριθμό $1/_4$.

Από τά πιο πάνω παραδείγματα παρατηρούμε ότι:

Ο αριθμός 28 προκύπτει από τον αριθμό 7 δια πολλαπλασιασμού επί 4, αλλά και ο 7 προκύπτει από τον 28 δια πολλαπλασιασμού επί $1/_4$.

Οι αριθμοί 7 και 28 λέγονται **ομόλογοι** αριθμοί. Επίσης, οι αριθμοί 10 και 40, καθώς και οι 12 και 48 είναι ομόλογοι αριθμοί.

Παρατηρούμε επίσης ότι ισχύουν οι αναλογίες:

$$\frac{7}{28} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{10}{40} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

Από την παραπάνω ανάλυση συμπεραίνομε ότι:

Αν οι αριθμοί x, ψ, ω,... είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς α, β, γ,.. τότε ο λόγος των ομολόγων αριθμών είναι ο ίδιος για όλους.

Δηλαδή, αν x, ψ, ω είναι αριθμοί ανάλογοι προς τους αριθμούς α, β, γ, τότε ισχύει η σχέση:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{\omega}{\gamma} = \lambda$$

Από αυτή τη σχέση έχομε:

$$x = \lambda \cdot \alpha, \quad \psi = \lambda \cdot \beta, \quad \omega = \lambda \cdot \gamma$$

Αν το γινόμενο δύο αριθμών είναι ίσο με τη μονάδα, τότε οι αριθμοί λέγονται **αντίστροφοι.** Π.χ., οι αριθμοί 6 και $^1/_6$ είναι αντίστροφοι, διότι $6 \times {}^1/_6 = 1$. Επίσης, το κλάσμα $^4/_8$ έχει αντίστροφο το κλάσμα $^8/_4$, διότι $^4/_8 \times {}^8/_4 = 1$.

Αν τώρα δύο ή περισσότεροι αριθμοί είναι ανάλογοι προς τους αντιστρόφους τους, τότε οι αριθμοί αυτοί λέγονται **αντιστρόφως ανάλογοι** προς άλλους ισοπληθείς.

Έστω π.χ. οι αριθμοί 3, 4, 5. Οι αντίστροφοί τους είναι: $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$. Οι αριθμοί 12, 16, 20 είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 3, 4, 5, αλλά αντιστρόφως ανάλογοι προς τους $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$.

Α΄ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΡΙΣΜΟΥ

3.2 Μερισμός αριθμού Μ σε μέρη ανάλογα.

Μερισμός ενός αριθμού Μ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς α, β, γ, είναι η εύρεση άλλων αριθμών x, ψ, ω,... τέτοιων, ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{\omega}{\gamma} = \ldots \qquad \text{με } x + \psi + \omega = M$$

Ο αριθμός Μ που θέλομε να μερίσομε λέγεται **μεριστέος** αριθμός. Από τις ιδιότητες των αναλογιών, είναι γνωστό ότι: Αν οι αριθμοί x, ψ, ω είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς α, β, γ, τότε ισχύει η σχέση:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{\omega}{\gamma} = \ldots = \frac{x + \psi + \omega + \ldots}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots} = \frac{M}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots} = \lambda$$

Λύνοντας ως προς x,ψ,ω βρίσκομε ότι:

$$x = \lambda \cdot \alpha \qquad \psi = \lambda \cdot \beta \qquad \omega = \lambda \cdot \gamma$$

Από τα παραπάνω συνάγομε τον ακόλουθο κανόνα:

Για να μερίσομε έναν αριθμό Μ σε μέρη ανάλογα προς άλλους αριθμούς α,β,γ,... διαιρούμε το μεριστέο αριθμό Μ με το άθροισμα α + β + γ +... και με το πηλίκο (= λ) πολλαπλασιάζομε καθένα από τους αριθμούς α,β,γ...

Παράδειγμα. Να μερισθεί ο αριθμός 1000 σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 2, 3 και 5.

Εάν x,ψ,ω είναι οι άγνωστοι αριθμοί που είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 2,3,5, τότε θα έχομε x + ψ + ω = 1000 και επειδή οι x, ψ,ω είναι ανάλογοι προς τους 2,3 και 5 θα ισχύει η σχέση:

$$\frac{x}{2} = \frac{\psi}{3} = \frac{\omega}{5} = \frac{x+\psi+\omega}{2+3+5} = \frac{1000}{10} = 100$$

Από την τελευταία σχέση έχομε:

$$\frac{x}{2} = 100 \text{ και } x = 200, \quad \frac{\psi}{3} = 100 \text{ και } \psi = 300, \quad \frac{\omega}{5} = 100 \text{ και } \omega = 500.$$

Επαλήθευση: x + ψ + ω = 200 + 300 + 500 = 1000.

3.3 Μερισμός σε μέρη ανάλογα ακεραίων αριθμών.

Πρόβλημα 1ο. Ένας εργολάβος οικοδομών χρησιμοποίησε (στο ίδιο χρονικό διάστημα) τέσσερις εργάτες για να σκάψουν ένα πηγάδι με τα εξής ημερομίσθια: Α εργάτης 550 δρχ., Β εργάτης 650 δρχ., Γ 500 δρχ. και Δ 700 δρχ. Ο εργολάβος έδωσε συνολικά 48.000 δρχ. Πόσες δρχ. θα πάρει ο κάθε εργάτης;

Λύση. Για να βρούμε το μερίδιο κάθε εργάτη, θα πρέπει να μοιράσομε το ποσό των 48.000 δρχ. σε μέρη ανάλογα των ημερομισθίων των εργατών, δηλαδή σε μέρη ανάλογα των αριθμών:

550, 650, 500, 700

Το άθροισμα των ημερομισθίων είναι:

550 + 650 + 500 + 700 = 2400 = Α + Β + Γ + Δ

Το μεριστέο ποσό είναι 48.000 = Μ

Αν τώρα παραστήσομε με φ,x,ψ,ω τα τέσσερα μερίδια, θα είναι:
φ + x + ψ + ω = 48.000 και ισχύει η σχέση:

$$\frac{\phi}{550} = \frac{x}{650} = \frac{\psi}{500} = \frac{\omega}{700} = \frac{\phi+x+\psi+\omega}{550+650+500+700} = \frac{48.000}{2400} = 20$$

Άρα: $\frac{\phi}{550} = 20$ και $\phi = 11.000$, $\frac{x}{650} = 20$ και $x = 13.000$

$\frac{\psi}{500} = 20$ και $\psi = 10.000$, $\frac{\omega}{700} = 20$ και $\omega = 14.000$

Ώστε: Ο Α εργάτης θα πάρει 11.000 δρχ.
Ο Β εργάτης θα πάρει 13.000 δρχ.
Ο Γ εργάτης θα πάρει 10.000 δρχ.
Ο Δ εργάτης θα πάρει 14.000 δρχ.
Σύνολο: 48.000 δρχ.

Πρόβλημα 2ο. Ένα φιλανθρωπικό σωματείο θέλει να μοιράσει 15.000 δρχ. σε τρεις πτωχές οικογένειες, ανάλογα με τα άτομα κάθε οικογένειας. Η α' οικογένεια έχει 4 άτομα, η β' 6 άτομα και η γ' 10 άτομα. Πόσα χρήματα θα πάρει κάθε οικογένεια;

Λύση. Μεριστέος = 15.000, α = 4, β = 6, γ = 10

Για να βρούμε πόσα χρήματα θα πάρει κάθε οικογένεια, θα πρέπει να μερίσομε τον αριθμό 15.000 σε μέρη ανάλογα των αριθμών 4, 6, 10.

Πρακτικός κανόνας μερισμού:

Για να μερίσομε έναν αριθμό Μ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς α,β,γ,..., πολλαπλασιάζομε το μεριστέο αριθμό Μ με καθένα από τους αριθμούς α,β,γ,... και το γινόμενο διαιρούμε με το άθροισμα α + β + γ + ...

Δηλαδή ο μερισμός γίνεται βάσει των σχέσεων:

$$\alpha = \frac{M\cdot\alpha}{\alpha+\beta+\gamma} \qquad \beta = \frac{M\cdot\beta}{\alpha+\beta+\gamma} \qquad \gamma = \frac{M\cdot\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Εφαρμόζοντας τον πιο πάνω κανόνα βρίσκομε ότι:

Η α' οικογένεια θα πάρει: $\dfrac{15.000 \times 4}{4+6+10} = 3000$ δρχ.

Η β' οικογένεια θα πάρει: $\dfrac{15.000 \times 6}{4+6+10} = 4500$ δρχ.

Η γ' οικογένεια θα πάρει: $\dfrac{15.000 \times 10}{4+6+10} = 7500$ δρχ.

3.4 Μερισμός σε μέρη ανάλογα κλασματικών αριθμών.

Πρόβλημα 1ο. Να μερισθεί ο αριθμός 250.000 σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς $^1/_2$, $^3/_4$, $^5/_6$.

Λύση. Μ = 250.000, $\alpha = {}^1/_2$, $\beta = {}^3/_4$, $\gamma = {}^5/_6$.

Για να βρούμε το άθροισμα α + β+ γ τρέπομε τα ετερώνυμα κλάσματα $^1/_2$, $^3/_4$, $^5/_6$ στα ισοδύναμα ομώνυμα $^6/_{12}$, $^9/_{12}$, $^{10}/_{12}$, οπότε:

$$\alpha+\beta+\gamma = \frac{6}{12} + \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{25}{12}$$

Μερίζομε τώρα τον αριθμό 250.000 ανάλογα προς τα ομώνυμα κλάσματα $^6/_{12}$, $^9/_{12}$, $^{10}/_{12}$.

Εφαρμόζοντας τώρα τον πρακτικό κανόνα μερισμού έχομε:

$$\frac{250.000 \times \frac{6}{12}}{\frac{25}{12}} = \frac{250.000 \times \mathbf{6}}{25} = 60.000$$

$$\frac{250.000 \times \frac{9}{12}}{\frac{25}{12}} = \frac{250.000 \times \mathbf{9}}{25} = 90.000$$

$$\frac{250.000 \times \frac{10}{12}}{\frac{25}{12}} = \frac{250.000 \times \mathbf{10}}{25} = 100.000$$

Σύνολο: 250.000 = Μ

Από τη λύση του πιο πάνω προβλήματος συμπεραίνομε ότι: **Για να μερίσομε έναν αριθμό Μ σε μέρη ανάλογα κλασματικών αριθμών, τρέπομε τα κλάσματα σε ισοδύναμα ομώνυμα και έπειτα μερίζομε τον αριθμό Μ ανάλογα προς τους αριθμητές των ομωνύμων κλασμάτων.**

Πρόβλημα 2ο. Κάποιος θείος που πέθανε άφησε στους ανεψιούς του Α,Β,Γ 600.000 δρχ. Στη διαθήκη του όρισε ότι: ο Α θα πάρει τα $^2/_5$ των χρημάτων, ο Β το $^1/_3$ και ο Γ τα υπόλοιπα. Πόσα χρήματα θα πάρει ο κάθε ανεψιός;

Λύση. Μ = 600.000, $\alpha = \frac{2}{5}$, $\beta = \frac{1}{3}$, γ=;

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$$ Άρα: $$\gamma = \frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$$

Άρα: Ο Α θα πάρει τα $\frac{6}{15}$ των χρημάτων

Ο Β θα πάρει τά $\frac{5}{15}$ των χρημάτων

Ο Γ θα πάρει τα $\frac{4}{15}$ των χρημάτων

Εφαρμόζοντας τον πιο πάνω κανόνα βρίσκομε ότι:

$$\text{Ο Α θα πάρει: } \frac{600.000 \times \mathbf{6}}{15} = 240.000 \text{ δρχ.}$$

$$\text{Ο Β θα πάρει: } \frac{600.000 \times \mathbf{5}}{15} = 200.000 \text{ δρχ.}$$

$$\text{Ο Γ θα πάρει: } \frac{600.000 \times \mathbf{4}}{15} = 160.000 \text{ δρχ.}$$

Σύνολο: 600.000 δρχ.

Πρόβλημα 3ο. Ένας πατέρας όρισε στη διαθήκη του να μοιρασθεί η περιουσία του στα παιδιά του α,β,γ, ηλικίας 10,12, και 15 χρονών, σε μέρη αντιστρόφως ανάλογα με τις ηλικίες τους. Η περιουσία του ήταν 600 στρέμματα· πόσα στρέμματα θα πάρει το κάθε παιδί;

Λύση. Ο μερισμός ενός αριθμού Μ σε μέρη αντιστρόφως ανάλογα προς τους αριθμούς α,β,γ, ανάγεται στο μερισμό του Μ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 1/α, 1/β, 1/γ, οι οποίοι είναι αντίστροφοι των αριθμών α,β,γ.

Οι αντίστροφοι των αριθμών 10, 12, 15, που εκφράζουν τις ηλικίες των παιδιών, είναι $^1/_{10}$, $^1/_{12}$, $^1/_{15}$.

Ο αριθμός Μ = 600 στρέμματα θα μερισθεί ανάλογα προς τα κλάσματα $^1/_{10}$, $^1/_{12}$, $^1/_{15}$, τα οποία άμα τραπούν σε ομώνυμα είναι: $^6/_{60}$, $^5/_{60}$, $^4/_{60}$. Συνεπώς τα 600 στρέμματα θα μοιρασθούν ανάλογα προς τους αριθμούς 6,5,4. Είναι 6 + 5 + 4 = 15. Εφαρμόζοντας τον πρακτικό κανόνα βρίσκομε ότι:

$$\text{Το α' παιδί θα πάρει: } \frac{600 \times \mathbf{6}}{15} = 240 \text{ στρέμματα}$$

$$\text{Το β' παιδί θα πάρει: } \frac{600 \times \mathbf{5}}{15} = 200 \text{ στρέμματα}$$

$$\text{Το γ' παιδί θα πάρει: } \frac{600 \times \mathbf{4}}{15} = 160 \text{ στρέμματα}$$

Σύνολο: 600 στρέμματα

Παρατηρούμε ότι το μικρότερο σε ηλικία παιδί πήρε τα περισσότερα στρέμματα, ενώ το μεγαλύτερο παιδί πήρε τα λιγότερα στρέμματα. Τούτο οφείλεται στο ότι η περιουσία μοιράσθηκε σε μέρη αντιστρόφως ανάλογα προς τις ηλικίες των παιδιών.

Β΄ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

3.5 Βασικές έννοιες.

Για την οργάνωση και τη διοίκηση μιας σύγχρονης επιχειρήσεως, δεν επαρκεί μόνο η προσωπική εργασία και εποπτεία ενός ατόμου· χρειάζεται η συμβολή περισσοτέρων ατόμων. Γι' αυτό το λόγο, δύο ή περισσότεροι άνθρωποι ενώνουν τά χρήματά τους για να κάνουν μαζί μια εμπορική, βιομηχανική, κλπ. επιχείρηση, η οποία ονομάζεται **Εταιρεία.** Τα πρόσωπα που συμμετέχουν σε μια εταιρεία ονομάζονται **εταίροι** ή **συνεταίροι.** Τα χρηματικά ποσά που καταθέτουν οι συνεταίροι στην εταιρεία λέγονται **κεφάλαια,** γιατί είναι χρηματικά ποσά που έχουν παραγωγική ικανότητα.

Οι εμπορικές εταιρείες διακρίνονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες:

1) Προσωπικές εταιρείες: Προσωπικές εταιρείες είναι οι **ομόρρυθμες** και οι **ετερόρρυθμες** εταιρείες.

2) Κεφαλαιουχικές εταιρείες: Οι κεφαλαιουχικές εταιρείες είναι ο πιο συνηθισμένος εταιρικός τύπος και ονομάζονται **ανώνυμες εταιρείες.** Οι συνεταίροι μιας ανώνυμης εταιρείας ονομάζονται **μέτοχοι,** διότι το κεφάλαιο μιας ανώνυμης εταιρείας διαιρείται σε χρηματικούς τίτλους που λέγονται **μετοχές.**

3) Μεικτής φύσεως εταιρείες: Τέτοιες εταιρείες είναι: α) Οι διάφοροι προμηθευτικοί, οικοδομικοί, γεωργικοί κλπ. **συνεταιρισμοί.** β) Οι **εταιρείες περιορισμένης ευθύνης.**

Οι συνεταίροι είναι ενδεχόμενο να συμμετέχουν στην εταιρεία όλοι με τα ίδια κεφάλαια· είναι όμως ενδεχόμενο να συμμετέχουν και με διαφορετικά κεφάλαια, δηλαδή άλλοι με περισσότερα και άλλοι με λιγότερα κεφάλαια. Τα κεφάλαια των συνεταίρων μπορεί να μείνουν στην εταιρεία ίσο χρονικό διάστημα, μπορεί όμως να μείνουν και διαφορετικό χρονικό διάστημα.

Τα κέρδη ή οι ζημίες που θα προκύψουν από τις εργασίες μιας εταιρείας, μοιράζονται στους συνεταίρους ανάλογα με τα κεφάλαια συμμετοχής κάθε εταίρου ή ανάλογα προς το χρόνο που μένουν στην εταιρεία τα κεφάλαια.

Τα προβλήματα που έχουν σχέση με τη διανομή των κερδών ή ζημιών στους συνεταίρους μιας εταιρείας, ονομάζονται **προβλήματα εταιρείας** και λύνονται όπως ακριβώς και τα προβλήματα μερισμού σε μέρη ανάλογα.

3.6 Μερισμός κέρδους (ή ζημίας) ανάλογα προς τα κεφάλαια συμμετοχής.

Πρόβλημα 1ο. Τέσσερα άτομα αποφάσισαν να συνεταιρισθούν. Ο Α εισέφερε 450.000 δρχ., ο Β 500.000 δρχ., ο Γ 700.000 δρχ. και ο Δ 850.000 δρχ. Στο τέλος του πρώτου έτους η εταιρεία είχε πραγματοποιήσει κέρδη 400.000 δρχ. Ποιο είναι το κέρδος κάθε συνεταίρου;

Λύση. Το κέρδος των 400.000 δρχ. θα μοιρασθεί ανάλογα προς τα κεφάλαια συμμετοχής κάθε συνεταίρου. Δηλαδή πρέπει να μερίσομε τον αριθμό 400.000 σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 450.000, 500.000, 700.000 και 850.000 ή προς τους αριθμούς: 450, 500, 700 και 850. (Τα μέρη του μεριστέου αριθμού 400.000 δέν μεταβάλλονται, αν τα κεφάλαια διαιρεθούν δια του αριθμού 1000).

Μεριστέος $= M = 400.000$

$A + B + \Gamma + \Delta = 450 + 500 + 700 + 850 = 2500$

Εφαρμόζοντας τον πρακτικό κανόνα μερισμού βρίσκομε ότι:

$$\text{Ο Α θα πάρει: } \frac{400.000 \times \mathbf{450}}{2500} = 72.000 \text{ δρχ.}$$

$$\text{Ο Β θα πάρει: } \frac{400.000 \times \mathbf{500}}{2500} = 80.000 \text{ δρχ.}$$

$$\text{Ο Γ θα πάρει: } \frac{400.000 \times \mathbf{700}}{2500} = 112.000 \text{ δρχ.}$$

$$\text{Ο Δ θα πάρει: } \frac{400.000 \times \mathbf{850}}{2500} = 136.000 \text{ δρχ.}$$

Σύνολο: 400.000 δρχ.

Πρόβλημα 2ο. Τρεις έμποροι συνεταιρίσθηκαν. Ο Α εισέφερε 1.500.000 δρχ., ο Β 1.200.000 δρχ. και ο Γ 8.000.000 δρχ. Στο τέλος του πρώτου έτους, η εταιρεία πραγματοποίησε κέρδη 900.000 δρχ. Ο Α, ο οποίος εκτελεί και καθήκοντα διαχειριστή της εταιρείας, δικαιούται 10% επί πλέον επί των κερδών. Πόσο κέρδος θα πάρει ο κάθε συνεταίρος;

Λύση. Το κέρδος του πρώτου έτους είναι 900.000 δρχ. Ο Α, ως διαχειριστής, παίρνει 10% πριν από τη διανομή των κερδών, δηλαδή 900.000 x 0,1 = 90.000 δρχ. Συνεπώς, το κέρδος που θα διανεμηθεί είναι:

$$900.000 - 90.000 = 810.000 \text{ δρχ.}$$

Το κέρδος των 810.000 θα μοιρασθεί ανάλογα προς τα κεφάλαια συμμετοχής των συνεταίρων: 1.500.000, 1.200.000 και 8.000.000, ή ανάλογα προς τους αριθμούς: 15 = α, 12 = β και 80 = γ.

Έχομε: Μ = 810.000 και α+β+γ= 107

Εφαρμόζοντας τώρα τον πρακτικό κανόνα μερισμού βρίσκομε ότι:

$$\text{Ο Α θα πάρει: } \frac{810.000 \times \mathbf{15}}{107} = 113.551{,}40 + 90.000 = 203.551{,}40$$

$$\text{Ο Β θα πάρει: } \frac{810.000 \times \mathbf{12}}{107} = 90.841{,}12$$

$$\text{Ο Γ θα πάρει: } \frac{810.000 \times \mathbf{80}}{107} = 605.607{,}48$$

Σύνολο: 900.000.–

Πρόβλημα 3ο. Εταιρεία από δύο πρόσωπα κέρδισε 133.000 δρχ. Ο Α, που εκτελεί και καθήκοντα διαχειριστή της εταιρείας, πήρε πριν από

τη διανομή των κερδών τα 18% αυτών και τα υπόλοιπα κέρδη μοιράσθηκαν ανάλογα με τα κεφάλαια συμμετοχής, τα οποία ήταν όπως οι αριθμοί 5 και 9. Να βρεθεί το κεφάλαιο που εισέφερε κάθε συνεταίρος, αν είναι γνωστό ότι το κεφάλαιο και το συνολικό κέρδος του Α ανέρχονται σε 275.065 δρχ.

Λύση. Βρίσκομε πρώτα την ιδιαίτερη αμοιβή του Α με 18% επί των κερδών.

Στις 100 δρχ. κέρδος η αμοιβή είναι 18 δρχ.
Στις 133.000 δρχ. κέρδος η αμοιβή είναι x; δρχ.

και $$x = 18 \times \frac{133.000}{100} = 23.940 \text{ δρχ.}$$

Άρα, ο Α πήρε 23.940 δρχ. πρόσθετη αμοιβή, γιατί εκτελούσε καθήκοντα διαχειριστή. Το υπόλοιπο κέρδος 109.060 (= 133.000 — 23.940) θα μοιρασθεί ανάλογα προς τους αριθμούς:

$$5 = \alpha \text{ και } 9 = \beta, \quad \alpha + \beta = 5 + 9 = 14, \; M = 109.060.$$

Εφαρμόζομε τον πρακτικό κανόνα μερισμού και βρίσκομε ότι:

$$\text{Ο Α θα πάρει: } \frac{109.060 \times 5}{14} = 38.950 \text{ δρχ.}$$

$$\text{Ο Β θα πάρει: } \frac{109.060 \times 9}{14} = 70.110 \text{ δρχ.}$$

Σύνολο: 109.060 δρχ.

Το συνολικό κέρδος του Α είναι: 23.940 + 38.950 = 62.890 δρχ.

Αφού το κεφάλαιο και το συνολικό κέρδος του Α ανέρχονται σε 275.065 δρχ., συμπεραίνομε ότι το κεφάλαιο που εισέφερε ο Α θα είναι: 275.065 — 62.890 = 212.175 δρχ. Για να βρούμε τώρα το κεφάλαιο που εισέφερε ο Β σκεπτόμαστε ως εξής:

Τα 5 μερίδια του Α αποτελούν κεφάλ. 212.175 δρχ.
Τα 9 μερίδια του Β αποτελούν κεφάλ. x; δρχ.

και $$x = 212.175 \times \frac{9}{5} = 381.915 \text{ δρχ.}$$

Ώστε. Το κεφάλαιο που εισέφερε ο Β ανέρχεται σε 381.915 δρχ.

3.7 Μερισμός κέρδους (ή ζημίας) ανάλογα προς τους χρόνους συμμετοχής.

Πρόβλημα 1ο. Τρεις έμποροι συνεταιρίσθηκαν με τα ίδια κεφάλαια συμμετοχής. Τα χρήματα του Α έμειναν στην εταιρεία ένα έτος, του Β 10 μήνες και του Γ 8 μήνες. Στο τέλος του έτους βρέθηκε κέρδος 300.000 δρχ. Πόσα χρήματα πήρε ο κάθε συνεταίρος από το κέρδος;

Λύση. Αφού και οι τρεις συνεταίροι εισέφεραν το ίδιο κεφάλαιο, είναι φανερό ότι το κέρδος των 300.000 δρχ. θα μοιρασθεί ανάλογα προς τους χρόνους που τα κεφάλαια έμειναν στην εταιρεία, δηλαδή ανάλογα προς τους αριθμούς 12, 10, και 8 μήνες.

Έχομε: $M = 300.000$, $\alpha = 12$, $\beta = 10$, $\gamma = 8$ και

$$\alpha + \beta + \gamma = 12 + 10 + 8 = 30$$

Εφαρμόζομε τώρα τον πρακτικό κανόνα μερισμού και βρίσκομε ότι:

$$\text{Ο Α θα πάρει: } \frac{300.000 \times \mathbf{12}}{30} = 120.000 \text{ δρχ.}$$

$$\text{Ο Β θα πάρει: } \frac{300.000 \times \mathbf{10}}{30} = 100.000 \text{ δρχ.}$$

$$\text{Ο Γ θα πάρει: } \frac{300.000 \times \mathbf{8}}{30} = \underline{80.000} \text{ δρχ.}$$

$$\text{Σύνολο: } 300.000 \text{ δρχ.}$$

Πρόβλημα 2ο. Ένας έμπορος άρχισε μια εμπορική επιχείρηση με κεφάλαιο 6.000.000 δρχ. Τέσσερις μήνες αργότερα πήρε και συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε το ίδιο κεφάλαιο. Έξι μήνες μετά την πρόσληψη του β' συνεταίρου πήρε και τρίτο συνεταίρο με το ίδιο κεφάλαιο. Όταν συμπληρώθηκε ένα έτος από τη συμμετοχή του τρίτου συνεταίρου βρέθηκε κέρδος 520.000 δρχ. Πόσο κέρδος θα πάρει ο κάθε συνεταίρος;

Λύση. Εύκολα βρίσκομε ότι: το κεφάλαιο του Γ έμεινε στην εταιρεία 12 μήνες, το κεφάλαιο του Β έμεινε $12 + 6 = 18$ μήνες και το κεφάλαιο του Α έμεινε $12 + 6 + 4 = 22$ μήνες.

Αφού και οι τρεις συνεταίροι εισέφεραν το ίδιο κεφάλαιο, είναι φανερό ότι το κέρδος των 520.000 δρχ. θα μοιρασθεί στους τρεις συνεταίρους ανάλογα προς τους χρόνους που τα κεφάλαια έμειναν στην εταιρεία, δηλαδή ανάλογα προς τους αριθμούς: $22 = \alpha$, $18 = \beta$, $12 = \gamma$.

Έχομε: $M = 520.000$ και $\alpha + \beta + \gamma = 22 + 18 + 12 = 52$.

Εφαρμόζομε τον πρακτικό κανόνα μερισμού και βρίσκομε ότι:

$$\text{Ο Α θα πάρει: } \frac{520.000 \times \mathbf{22}}{52} = 220.000 \text{ δρχ.}$$

$$\text{Ο Β θα πάρει: } \frac{520.000 \times \mathbf{18}}{52} = 180.000 \text{ δρχ.}$$

$$\text{Ο Γ θα πάρει: } \frac{520.000 \times \mathbf{12}}{52} = \underline{120.000} \text{ δρχ.}$$

$$\text{Σύνολο: } 520.000 \text{ δρχ.}$$

3.8 Μερισμός κέρδους (ή ζημίας) ανάλογα προς τα κεφάλαια και τους χρόνους συμμετοχής.

Πρόβλημα 1ο. Ένας έμπορος άρχισε μια επιχείρηση με 80.000 δρχ. Έξι μήνες αργότερα πήρε και συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε 150.000 δρχ. Ύστερα από 8 ακόμη μήνες πήρε και τρίτο συνέταίρο, ο οποίος εισέφερε 200.000 δρχ. Δύο έτη μετά την έναρξη της επιχειρήσεως βρέθηκε κέρδος 331.000 δρχ. Πόσο κέρδος αναλογεί σε κάθε συνεταίρο.

Λύση. Όπως βλέπομε, στο πρόβλημα αυτό είναι διάφορα και τα κεφάλαια και οι χρόνοι συμμετοχής. Πρέπει λοιπόν το κέρδος να μοιρασθεί όχι μόνο ανάλογα προς τα κεφάλαια, αλλά και ανάλογα προς τους χρόνους συμμετοχής.

Για να λύσομε το πιο πάνω πρόβλημα, πρέπει να χωρίσομε το κέρδος σε μερίδια· ένα μερίδιο θα είναι το κέρδος της 1 δρχ. σε 1 μήνα. Αν ο Α εισέφερε 80.000 δρχ. σε 1 μήνα, θα είχε 80.000 μερίδια. Αφού όμως εισέφερε 80.000 δρχ. σε 24 μήνες (εύκολα βρίσκομε ότι τα κεφάλαια των Α, Β, και Γ έμειναν στην εταιρεία 24, 18 και 10 μήνες αντιστοίχως) έχει 80.000 × 24 = 1.920.000 μερίδια. Ο Β έχει 150.000 × 18 = 2.700.000 μερίδια και ο Γ έχει 200.000 × 10 = 2.000.000 μερίδια. Επομένως, ολόκληρο το κέρδος θα χωρισθεί σε: 1.920.000 + 2.700.000 + 2.000.000 = 6.620.000 μερίδια. Πρέπει λοιπόν να μερίσομε το κέρδος των 331.000 δρχ. σε μέρη ανάλογα των μεριδίων: 1.920.000, 2.700.000 και 2.000.000 ή σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς: 192, 270, 200.

Έχομε: Μ = 331.000 και 192 + 270 + 200 = 662

Εφαρμόζομε τον πρακτικό κανόνα μερισμού και βρίσκομε ότι:

$$\text{Ο Α θα πάρει: } \frac{331.000 \times \mathbf{192}}{662} = 96.000 \text{ δρχ.}$$

$$\text{Ο Β θα πάρει: } \frac{331.000 \times \mathbf{270}}{662} = 135.000 \text{ δρχ.}$$

$$\text{Ο Γ θα πάρει: } \frac{331.000 \times \mathbf{200}}{662} = 100.000 \text{ δρχ.}$$

$$\text{Σύνολο: } 331.000 \text{ δρχ.}$$

Παρατήρηση. Από τη λύση του πιο πάνω προβλήματος συμπεραίνομε ότι: Στα προβλήματα εταιρείας στα οποία και τα κεφάλαια και οι χρόνοι είναι διάφοροι, μοιράζομε τα κέρδη (ή και τις ζημίες) **ανάλογα προς τα γινόμενα των κεφαλαίων επί τους αντίστοιχους χρόνους** παραμονής των κεφαλαίων στην εταιρεία.

Πρόβλημα 2ο. Ένας έμπορος άρχισε μια επιχείρηση με 300.000 δρχ. Μετά τέσσερις μήνες πήρε και συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε 500.000 δρχ. Έξι μήνες αργότερα πήρε και τρίτο συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε 800.000 δρχ. Αφού συμπληρώθηκαν δύο έτη από την έναρξη της εταιρείας, διαπίστωσαν ότι είχαν κερδίσει 568.000 δρχ. Πόσα χρήματα θα πάρει ο κάθε συνεταίρος από τα κέρδη;

Λύση. Για τη λύση του προβλήματος ταξινομούμε τα δεδομένα στον παρακάτω πίνακα:

	Συνεταίροι		
	Α	Β	Γ
Κεφάλαια	300.000	500.000	800.000
Χρόνοι	24 μην.	20 μην.	14 μην.
Γινόμενα Κεφάλ. x Χρόνοι	7.200.000	10.000.000	11.200.000

Το κέρδος των 568.000 δρχ. θα μοιρασθεί στους συνεταίρους Α, Β και Γ ανάλογα πρός τα γινόμενα: Κεφάλαια x Χρόνοι, δηλαδή ανάλογα προς τους αριθμούς: 7.200.000, 10.000.000, 11.200.000 ή σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς: 72, 100 και 112.

Έχομε: $M = 568.000$ και $72 + 100 + 112 = 284$

Εφαρμόζομε τον πρακτικό κανόνα μερισμού και βρίσκομε ότι:

$$\text{Ο Α θα πάρει: } \frac{568.000 \times \mathbf{72}}{284} = 144.000 \text{ δρχ.}$$

$$\text{Ο Β θα πάρει: } \frac{568.000 \times \mathbf{100}}{284} = 200.000 \text{ δρχ.}$$

$$\text{Ο Γ θα πάρει: } \frac{568.000 \times \mathbf{112}}{284} = 224.000 \text{ δρχ.}$$

$$\text{Σύνολο: } 568.000 \text{ δρχ.}$$

3.9 Προβλήματα Μερισμού και Εταιρείας.

1. Τρεις εργάτες εργάσθηκαν με το ίδιο ημερομίσθιο. Ο Α εργάσθηκε 2 ημέρες, ο Β 3 ημ. και ο Γ 5 ημ. Ο εργοδότης τους έδωσε 4500 δρχ. να τα μοιράσουν ανάλογα με τις ημέρες που εργάσθηκε ο καθένας. Πόσες δραχμές αναλογούν στον καθένα; *(Απ. α) 900, β) 1350, γ) 2250)*
2. Τέσσερις εργάτες έσκαψαν ένα κτήμα και πληρώθηκαν με το ίδιο ημερομίσθιο. Ο α΄ εργάσθηκε 6 ημ., ο β΄ 7 ημ., ο γ΄ 9 ημ. και ο δ΄ 12 ημέρες. Πηραν και οι τέσσερις μαζί 13.600 δρχ. Πόσες δραχμές αναλογούν σε κάθε εργάτη; *(Απ. α) 2400, β) 2800, γ) 3600, δ) 4800)*
3. Θείος άφησε στους τρεις ανεψιούς του 540.000 δρχ. και όρισε στη διαθήκη του να τις μοιρασθούν σε μέρη αντιστρόφως ανάλογα με τις ηλικίες τους. Ο α΄ ήταν 18 χρονών, ο β΄ 12 και ο γ΄ 9 χρονών. Πόσες δραχμές θα πάρει ο κάθε ανεψιός;
(Απ. α) 120.000, β) 180.000, γ) 240.000)
4. Τέσσερις αδελφοί πούλησαν ένα οικόπεδο αντί 1.600.000 δρχ. Αν στον Α ανήκε το $^1/_5$ του οικοπέδου, στο Β τα $^3/_8$ αυτού, στο Γ τα $^3/_{10}$ και στο Δ το υπόλοιπο, πόσα χρήματα αναλογουν στον κάθε αδελφό;
(Απ. α) 320.000, β) 600.000, γ) 480.000, δ) 200.000)
5. Μοιράσθηκαν 36.800 δρχ. σε 4 πτωχές οικογένειες ως εξής: Η β΄ πήρε τα $^2/_3$ του μεριδίου της α΄, η γ΄ πηρε το $^1/_5$ του μεριδίου της α΄ και β΄ μαζί και η δ΄ πήρε τα $^4/_7$ του μεριδίου της γ΄. Να βρεθεί το μερίδιο κάθε οικογένειας.
(Απ. α) 16.800, β) 11.200, γ) 5600, δ) 3200)

6. Ένας πατέρας που πέθανε όρισε στη διαθήκη του να μοιρασθεί η περιουσία του στη σύζυγό του, στην κόρη του και στον γιο του ως εξής: η κόρη του να πάρει τα $^3/_4$ του μεριδίου της συζύγου και ο γιος τα $^3/_5$ της κόρης. Αν η περιουσία του ήταν 440.000 δρχ., να βρεθεί πόσες δραχμές θα πάρει το κάθε μέλος της οικογένειας.

(Απ. 200.000 - 150.000 - 90.000)

7. Να μοιρασθουν 18.600 δρχ. σε 2 εργοδηγούς, 17 τεχνίτες και 30 εργάτες έτσι, ώστε ο κάθε τεχνίτης να πάρει τριπλάσια από κάθε εργάτη και ο κάθε εργοδηγός να πάρει διπλάσια από κάθε τεχνίτη.

(Απ. εργ. 1200, τεχν. 600, εργοδ. 1200)

8. Τρεις έμποροι συνεταιρίσθηκαν. Ο α΄ εισέφερε 120.000 δρχ., ο β΄ 80.000 δρχ. και ο γ΄ 200.000 δρχ. Στο τέλος του πρώτου έτους η εταιρεία πραγματοποίησε κέρδος 84.000 δρχ. Ο α΄, που εκτελει καθήκοντα διαχειριστή, δικαιούται 10% επί πλέον από τα κέρδη. Πόσο κέρδος αναλογεί στον κάθε συνεταίρο;

(Απ. α) 31.080, β) 15.120, γ) 37.800)

9. Ποσό 420.000 δρχ. μοιράσθηκε σε τρία άτομα ανάλογα προς τους αριθμούς 12, 15, 18 και με τα χρήματα που πηραν έκαναν μια εταιρεία, αφού αύξησαν τις εισφορές τους κατά 100.000 δρχ. ο καθένας. Στο τέλος του πρώτου έτους η εταιρεία πραγματοποίησε κέρδη 300.000 δρχ. Πόσο κέρδος αναλογεί στον κάθε συνεταίρο;

(Απ. α) 88.333,33, β) 100.000, γ) 111.666,67)

10. Έμπορος άρχισε μια επιχείρηση με κεφάλαιο 150.000 δρχ. Δύο μήνες αργότερα πήρε και συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε τα 80% του πρώτου. Ύστερα από τρεις ακόμη μήνες πηρε και τρίτο συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε τα $^4/_5$ της εισφοράς του β΄ συνεταίρου. Όταν συμπληρώθηκε ένα έτος από τη συμμετοχή του τρίτου συνεταίρου βρέθηκε κέρδος 426.800 δρχ. Πόσο κέρδος θα πάρει ο κάθε συνεταίρος;

(Απ. α) 197.808, β) 139.629, γ) 89.363)

11. Τρεις συνεταίροι κέρδισαν από την εταιρεία τους 165.000 δρχ. Τα κεφάλαια που είχαν εισφέρει στην εταιρεία είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 1, 2, 3, ενώ οι χρόνοι παραμονής των κεφαλαίων στην εταιρεία είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 1, $^2/_3$ και $^3/_4$. Να βρεθεί πόσο κέρδος θα πάρει ο κάθε συνεταίρος.

(Απ. α) 36.000, β) 48.000, γ) 81.000)

12. Δύο έμποροι συνεταιρίσθηκαν με κεφάλαιο 900.000 δρχ. Μετά δύο έτη, αφού κέρδισαν 300.000 δρχ. διαλύθηκε η εταιρεία. Ο ένας από τους συνεταίρους πηρε 720.000 δρχ. για κεφάλαιο και κέρδος. Να βρεθούν το κεφάλαιο και το κέρδος χωριστά που πηρε ο κάθε συνεταίρος.

(Απ. α) κεφ. 540.000, κέρδος 180.000, β) κεφ. 360.000, κέρδος 120.000)

13. Τρεις άνθρωποι συνεταιρίσθηκαν με συνολικό κεφάλαιο 1.200.000 δρχ. Ο α΄ εισέφερε 450.000 δρχ., ο β΄ 330.000 δρχ. και ο γ΄ το υπόλοιπο. Στο τέλος του πρώτου έτους τα κέρδη ήταν τα 8% του συνολικού κεφαλαίου. Πλήρωσαν φόρο στο Δημόσιο 3% από τα κέρδη και τα υπόλοιπα κέρδη τα μοίρασαν ανάλογα προς τα κεφάλαια συμμετοχής τους. Πόσες δραχμές πήρε ο καθένας από το καθαρό κέρδος;

(Απ. α) 34.920, β) 25.608, γ) 32.592)

14. Δύο έμποροι συνεταιρίσθηκαν. Ο α΄ εισέφερε 250.000 δρχ. και ο β΄ 400.000 δρχ. Τέσσερις μήνες αργότερα πήραν και τρίτο συνεταιρο, ο οποιος εισέφερε κεφάλαιο ίσο προς το κεφάλαιο που εισέφεραν οι δύο πρωτοι μαζί. Όταν συμπληρώθηκε ένα έτος από την έναρξη της εταιρείας βρέθηκε κέρδος 325.000 δρχ. Να βρεθεί πόσο κέρδος αναλογεί σε κάθε συνεταίρο, αν ειναι γνωστό ότι ο α΄, πριν από τη διανομή των κερδων, πήρε 20% από τα κέρδη, διότι εκτελούσε και καθήκοντα διαχειριστή της εταιρείας.

(Απ. α) 125.000, β) 96.000, γ) 104.000)

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ

4.1 Υπολογισμός του απλού τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη, εξάμηνα, μήνες, ημέρες.

Στα προβλήματα του απλού τόκου συμπλέκονται τέσσερα ποσά: **1) Ο τόκος** (η λέξη τόκος παράγεται από το ρήμα τίκτω που σημαίνει: γεννώ, παράγω), ο οποίος συμβολίζεται με το γράμμα **I** (αρχικό της λέξεως Interest = τόκος). **2) Το κεφάλαιο,** το οποίο συμβολίζεται με το γράμμα **K. 3) Ο χρόνος,** ο οποίος συμβολίζεται: με το **n** όταν εκφράζεται σε έτη, εξάμηνα και τρίμηνα, με το **μ** όταν εκφράζεται σε μήνες και με το **ν** όταν εκφράζεται σε ημέρες. **4) Το επιτόκιο,** το οποίο συμβολίζεται με το γράμμα **i.** Όπως είπαμε στην παράγραφο 1.3 της Εισαγωγής, **επιτόκιο είναι ο τόκος κεφαλαίου μιας νομισματικής μονάδας σε μια χρονική περίοδο.**

Για τον υπολογισμό του απλού τόκου διακρίνομε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Α΄ Όταν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη, εξάμηνα και τρίμηνα.

Για την εύρεση του γενικού τύπου του απλού τόκου, βασιζόμαστε στον ορισμό του επιτοκίου και σκεπτόμαστε ως εξής:

Κεφάλαιο 1 νομισμ. μονάδας σε 1 έτος δίνει τόκο: $1 \cdot i$
Κεφάλαιο 1 νομισμ. μονάδας σε 2 έτη δίνει τόκο: $2 \cdot i$
Κεφάλαιο 1 νομισμ. μονάδας σε 3 έτη δίνει τόκο: $3 \cdot i$
....
....
Κεφάλαιο 1 νομισμ. μονάδας σε n έτη δίνει τόκο: $n \cdot i$

Αν τώρα έχομε κεφάλαιο K νομισματικών μονάδων, τότε ο συνολικός τόκος θα είναι: $K \cdot n \cdot i$.

Συνεπώς, ο συνολικός τόκος (=I) ενός κεφαλαίου (= K), το οποίο τοκίζεται επί n έτη προς επιτόκιο i, υπολογίζεται από τον ακόλουθο θεμελιώδη τύπο του απλού τόκου:

$$\mathbf{I = K \cdot n \cdot i} \qquad \mathbf{(1)}$$

Από τον τύπο (1) συμπεραίνομε ότι: **ο απλός τόκος είναι ανάλογος προς το κε-**

φάλαιο, το χρόνο και το επιτόκιο. Αυτό σημαίνει ότι, αν ένα από τα ποσά του β' μέλους της σχέσεως (1) διπλασιασθεί, τριπλασιασθεί, κλπ., τότε και ο τόκος διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, κλπ. Επομένως, για να βρούμε τον τύπο (1) μπορούμε να εφαρμόσομε τη σύνθετο μέθοδο των τριών. Πράγματι:

Κεφάλαιο 1 νομ. μον. σε 1 έτος φέρει τόκο i
Κεφάλαιο K νομ. μον. σε n έτη φέρει τόκο I;

$$\text{Άρα: } I = i \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{K}{1} \quad \text{ή} \quad I = K \cdot n \cdot i$$

Παράδειγμα 1ο. Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 10.000 δρχ., το οποίο τοκίσθηκε: α) προς $5\frac{1}{4}\%$ για 3 έτη, β) προς $4\frac{1}{2}\%$ για ένα έτος και γ) προς $4\frac{1}{2}\%$ για 2, 3, 4,... έτη.

Λύση. α)	$K=$	$10.000,\ n=3,\ i=0,0525$
	$I=$	$K \cdot n \cdot i = 10.000 \times 3 \times 0,0525 = 1575$ δρχ.
β)	$K=$	$10.000,\ n=1,\ i=0,045$
	$I=$	$10.000 \times 1 \times 0,045 = 450$
γ)	$K=$	$10.000,\ n=2,\ i=0,045$
	$I=$	$10.000 \times 2 \times 0,045 = 900$
Για $n=3$ έτη:	$I=$	$10.000 \times 3 \times 0,045 = 1350$
Για $n=4$ έτη:	$I=$	$10.000 \times 4 \times 0,045 = 1800$

Δηλαδή: σε διπλάσια, τριπλάσια, τετραπλάσια κλπ. έτη, το κεφάλαιο φέρει διπλάσιο, τριπλάσιο, τετραπλάσιο κλπ. τόκο.

Παράδειγμα 2ο. Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 20.000 δρχ., το οποίο τοκίσθηκε προς 8% το εξάμηνο για δύο έτη και έξι μήνες.

Λύση: $K = 20.000,\ i = 0,08,\ n = 2 \times 2 + 1 = 5$ εξάμηνα
$I = K \cdot n \cdot i = 20.000 \times 5 \times 0,08 = 8000$

Παράδειγμα 3ο. Πόσο τόκο φέρει κεφάλαιο 20.000 δρχ. σε 2 έτη και 6 μήνες προς 4% το τρίμηνο;

Λύση: $K = 20.000,\ i = 0,04,\ n = 2 \times 4 + 2 = 10$ τρίμηνα
$I = K \cdot n \cdot i = 20.000 \times 10 \times 0,04 = 8000$

Β' Όταν ο χρόνος εκφράζεται σε μήνες. Όταν ο χρόνος τοκισμού εκφράζεται σε μήνες, πρέπει να αντικαταστήσομε το n του τύπου (1) με το κλάσμα $\mu/12$ του έτους που αντιπροσωπεύουν οι μήνες. Όταν λοιπόν ο χρόνος δίνεται σε μήνες, τότε ο τόκος υπολογίζεται βάσει του τύπου:

$$\boxed{I = \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12}} \tag{1α}$$

Παράδειγμα. Πόσο τόκο φέρει κεφάλαιο 10.000 δρχ. σε 8 μήνες προς 6%, 12%;

Λύση. $K = 10.000$, $\mu = 8$, $i_1 = 6\%$, $i_2 = 12\%$

$$\text{με } 6\% \text{ έχομε: } I = \frac{10.000 \times 8 \times 0{,}06}{12} = 400 \text{ δρχ.}$$

$$\text{με } 12\% \text{ έχομε: } I = \frac{10.000 \times 8 \times 0{,}12}{12} = 800 \text{ δρχ.}$$

Γ΄ Όταν ο χρόνος εκφράζεται σε ημέρες. Αν τώρα ο χρόνος δίνεται σε ημέρες, τότε πρέπει να αντικαταστήσομε το n του τύπου (1) με το κλάσμα

$\frac{v}{360}$ ή $\frac{v}{365}$ του έτους που αντιπροσωπεύουν οι ημέρες. Στην περίπτωση αυτή ο τόκος υπολογίζεται βάσει των τύπων:

$$\boxed{I = \frac{K \cdot v \cdot i}{365}} \quad \text{για πολιτικό έτος} \qquad (1\beta)$$

ή

$$\boxed{I = \frac{K \cdot v \cdot i}{360}} \quad \text{για έτος εμπορικό ή μεικτό} \qquad (1\gamma)$$

Σημείωση. Για να εφαρμόσομε τους τύπους (1β) και (1γ), πρέπει πρώτα να υπολογίσομε τις τοκοφόρες ημέρες. Για τον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών ισχύουν διεθνώς τα εξής:

α) Αν θεωρήσομε ότι όλοι οι μήνες του έτους έχουν 30 ημέρες ο καθένας (οπότε το έτος έχει 360 ημέρες), τότε λέμε ότι χρησιμοποιούμε **εμπορικό έτος.** Εφαρμόζεται στις Σκανδιναβικές χώρες, Γερμανία και Ελβετία. Το εμπορικό έτος απλουστεύει τους υπολογισμούς, αλλά δεν παρέχει μεγάλη ακρίβεια.

β) Αν όμως θεωρήσομε τους μήνες με τις πραγματικές τους ημέρες (30 ή 31 και για το Φεβρουάριο 28 ή 29 για δίσεκτο έτος) και το έτος με 365 (ή 366 για δίσεκτο έτος) ημέρες, τότε λέμε ότι χρησιμοποιούμε το **πολιτικό έτος.** Το πολιτικό έτος εφαρμόζεται κυρίως στις Αγγλοσαξονικές χώρες και στην Πορτογαλία.

γ) Αν, τέλος, οι μήνες λογίζονται με τις πραγματικές τους ημέρες (30, 31, 28 ή 29) και το έτος με 360 ημέρες, τότε λέμε ότι χρησιμοποιούμε το **μεικτό έτος.** Το μεικτό έτος εφαρμόζεται στην Ελλάδα, Γαλλία, Ιταλία, Βέλγιο, Ολλανδία, Ισπανία, Αυστρία.

Παράδειγμα. Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 10.000 δρχ., το οποίο τοκίσθηκε με 6%: α) Από 27.1.1978 ως 10.4.78 για πολιτικό έτος. β) Από 20.6.78 ως 31.8.78 για μεικτό έτος. γ) Από 1.2.1976 ως 1.4.1976 για μεικτό έτος.

Λύση. Πριν εφαρμόσομε τους τύπους (1β) και (1γ) πρέπει να υπολογίσομε τις τοκοφόρες ημέρες. Για να υπολογίσομε τις τοκοφόρες ημέρες χρησιμοποιούμε τον Πίνακα VII που βρίσκεται στους Πίνακες Ανατοκισμού - Ραντών - Χρεωλυσίων. Ο Πίνακας VII δίνει αθροιστικώς τον αριθμό των ημερών του έτους, από την 1 Ιανουαρίου ως την 31 Δεκεμβρίου. Για να βρούμε τις τοκοφόρες ημέρες μεταξύ δύο χρονικών διαστημάτων κάνομε μια απλή αφαίρεση. Ο υπολογισμός των τοκοφόρων ημερων του πιο πάνω παραδείγματος, με τη βοήθεια του Πίνακα VII, γίνεται ως εξης:

α) Από την 1 Ιαν. ως τις 10 Απρ. έχομε 100 ημ.
Από την 1 Ιαν. ως τις 27 Ιαν. έχομε 27 ημ.
Άρα: Από τις 27 Ιαν. ως τις 10 Απρ. έχομε 73 ημ.

β) Από την 1 Ιαν. ως τις 31 Αυγ. έχομε 243 ημ.
Από την 1 Ιαν. ως τις 20 Ιουν. έχομε 171 ημ.
Άρα: Από τις 20 Ιουν. ως τις 31 Αυγ. έχομε 72 ημ.

γ) Από 1.1.1976 ως 1.4.1976 έχομε 92 ημ.*
Από 1.1.1976 ως 1.2.1976 έχομε 32 ημ.
Άρα: Από 1.2.1976 ως 1.4.1976 έχομε 60 ημ.

Έχομε: $K = 10.000$, $i = 0{,}06$, α) $v = 73$, β) $v = 72$, γ) $v = 60$

Εφαρμόζομε τώρα τους τύπους (1β) και (1γ) και βρίσκομε ότι:

$$\text{α) Πολιτικό έτος: } I = \frac{10.000 \times 73 \times 0{,}06}{365 = 5 \times 73} = 120 \text{ δρχ.}$$

$$\text{β) Μεικτό έτος: } I = \frac{10.000 \times 72 \times 0{,}06}{360 = 5 \times 72} = 120 \text{ δρχ.}$$

$$\text{γ) Μεικτό έτος: } I = \frac{10.000 \times 60 \times 0{,}06}{360} = 100 \text{ δρχ.}$$

Παρατήρηση 1η. Στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο και στα ταμιευτήρια των τραπεζών, για τον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών, ισχύουν τα εξής: 1) Τα χρήματα που καταθέτουν οι πελάτες φέρουν τόκο από την επόμενη ημέρα· η ημέρα όμως της αναλήψεως θεωρείται τοκοφόρος. 2) Τα χρήματα που δανείζουν οι διάφοροι πιστωτικοί οργανισμοί φέρουν τόκο από την ημέρα που χορηγούνται τα χρήματα στους πελάτες.

Παρατήρηση 2η. Αν παραστήσομε τον τόκο με μεικτό έτος με το I_μ και τον τόκο με πολιτικό έτος με I_π και σχηματίσομε τη διαφορά τους, θα έχομε:

$$I_\mu - I_\pi = \frac{K \cdot v \cdot i}{360} - \frac{K \cdot v \cdot i}{365} = \frac{365 \cdot Kvi - 360Kvi}{360 \times 365} =$$

$$= \frac{5 \cdot Kvi}{360 \times 365} = \frac{Kvi}{360} \cdot \frac{5}{365} = I_\mu \cdot \frac{1}{73}$$

και $I_\pi = I_\mu - \frac{I_\mu}{73}$ Δηλαδή: ο τόκος με πολιτικό έτος είναι ίσος με τον τόκο με μεικτό έτος μείον το $1/_{73}$ αυτού.

$$\text{Επίσης, } I_\mu - I_\pi = \frac{Kvi \cdot 5}{365 \times 360} = \frac{Kvi}{365} \cdot \frac{5}{360} = I_\pi \cdot \frac{1}{72}$$

* Το 1976 ήταν δίσεκτο έτος: Ιαν. 31 + Φεβρ. 29 + Μάρτ. 31 + Απρ. 1 = 92 ημ.

και $\quad I_\mu = I_\pi + \dfrac{I_\pi}{72}$. Δηλαδή: ο τόκος με μεικτό έτος είναι ίσος με τον τόκο με πολιτικό έτος συν το $^1/_{72}$ αυτού.

4.2 Υπολογισμός του απλού τόκου με τη μέθοδο των σταθερών διαιρετών και των τοκαρίθμων.

Αν διαιρέσομε και τους δύο όρους του β΄ μέλους των τύπων:

$$I = \frac{Kvi}{360} \quad \text{και} \quad I = \frac{Kvi}{365}$$

με το επιτόκιο (= i), τότε προκύπτουν οι τύποι:

$$I = \frac{K \cdot v}{\dfrac{360}{i}} \quad \text{καί} \quad I = \frac{K \cdot v}{\dfrac{365}{i}}$$

Το γινόμενο K · v (= κεφάλαιο x τοκοφόρες ημέρες) συμβολίζεται με το γράμμα N και ονομάζεται **τοκάριθμος.** Το πηλίκο 360/i (ή 365/i), το οποίο για ορισμένα επιτόκια είναι αριθμός σταθερός, συμβολίζεται με το γράμμα Δ και ονομάζεται **σταθερός διαιρέτης.** Συνεπώς, οι πιο πάνω τύποι γράφονται:

$$\mathbf{I = \frac{K \cdot v}{\Delta} \quad ή \quad I = \frac{N\ (= \text{τοκάριθμος})}{\Delta\ (= \text{σταθερός διαιρέτης})}} \qquad \mathbf{(2)}$$

Από τον τύπο (2) συμπεραίνομε ότι: **Για να βρούμε τον τόκο ενός κεφαλαίου, διαιρούμε τον τοκάριθμό του με το σταθερό διαιρέτη,** ο οποίος αντιστοιχεί σε προκαθορισμένο επιτόκιο.

Η εφαρμογή του τύπου (2), για τον υπολογισμό του απλού τόκου, παρέχει ευκολία υπολογισμών, αλλά πρέπει τα πηλίκα 360 : i και 365 : i να δίνουν πάντοτε ακέραιο αριθμό. Στον επόμενο πίνακα παραθέτομε τους σταθερούς διαιρέτες που αντιστοιχούν σε ορισμένα συνηθισμένα επιτόκια.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΔΙΑΙΡΕΤΩΝ

Έτος : Εμπορικό ή μεικτό				Έτος: Πολιτικό	
i	Δ = 360 : i	i	Δ = 360 : i	i	Δ = 365 : i
0,005	72.000	0,045	8.000	0,005	73.000
0,01	36.000	0,05	7.200	0,01	36.500
0,012	30.000	0,06	6.000	0,02	18.250
0,0125	28.800	0,075	4.800	0,025	14.600
0,015	24.000	0,08	4.500	0,04	9.125
0,02	18.000	0,09	4.000	0,05	7.300
0,025	14.400	0,10	3.600	0,10	3.650
0,03	12.000	0,12	3.000	0,125	2.920
0,04	9.000	0,15	2.400	0,20	1.825

Παράδειγμα 1ο. Πόσο τόκο φέρει κεφάλαιο 10.000 δρχ. σε 60 ημέρες προς 6%; Έτος μεικτό.

Λύση. $K = 10.000, \quad v = 60, \quad i = 0{,}06$
$K \cdot v = 10.000 \times 60 = 600.000, \quad \Delta = 6000$
Εφαρμόζοντας τον τύπο (2) βρίσκομε:

$$I = \frac{N}{\Delta} = \frac{600.000}{6000} = 100 \text{ δρχ.}$$

Παράδειγμα 2ο. Πόσο τόκο φέρουν 17.650 δραχμές σε 73 ημέρες προς 5%; Έτος πολιτικό.

Λύση. $K = 17.650, \quad v = 73, \quad i = 0{,}05, \quad \Delta = 7300$
Εφαρμόζομε τον τύπο (2) και έχομε:

$$I = \frac{K \cdot v}{\Delta} = \frac{17.650 \times 73}{7300} = 176{,}50 \text{ δρχ.}$$

Από τα πιο πάνω παραδείγματα συμπεραίνομε, ότι η εφαρμογή της μεθόδου των σταθερών διαιρετών παρέχει μεγάλη ευκολία στους υπολογισμούς.

4.3 Υπολογισμός του τόκου πολλών κεφαλαίων.

Υποθέτομε ότι κεφάλαια $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_\mu$ τοκίζονται αντιστοίχως επί $v_1, v_2, v_3, \ldots v_\mu$ ημέρες με το ίδιο επιτόκιο i. Ο συνολικός τόκος των δοσμένων κεφαλαίων θα αποτελείται από το άθροισμα των τόκων κάθε κεφαλαίου, δηλαδή:

$$I_{ολ} = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_\mu$$

ή

$$I_{ολ} = \frac{K_1 v_1}{\Delta} + \frac{K_2 v_2}{\Delta} + \ldots + \frac{K_\mu v_\mu}{\Delta} = \frac{N_1}{\Delta} + \frac{N_2}{\Delta} + \ldots + \frac{N_\mu}{\Delta}$$

και

$$\mathbf{I_{ολ} = \frac{N_1 + N_2 + \ldots + N_\mu}{\Delta}} \qquad \textbf{(3)}$$

όπου $N_1, N_2, \ldots, N_\mu$ = τοκάριθμοι και Δ = σταθ. διαιρέτης.

Από τον τύπο (3) συμπεραίνομε ότι: **Για να βρούμε τον τόκο πολλών κεφαλαίων, τα οποία τοκίζονται σε διαφορετικούς χρόνους, με το ίδιο επιτόκιο, διαιρούμε το άθροισμα των τοκαρίθμων τους με το σταθερό διαιρέτη.**

Αν το επιτόκιο δεν παρέχει σταθερό διαιρέτη, τότε στον τύπο (3) πρέπει να αντικαταστήσομε το Δ με το πηλίκο 360: i (ή 365: i).

Σημείωση. Ο σύντομος αυτός τρόπος υπολογισμού του τόκου πολλών κεφαλαίων εφαρμόζεται, όπως θα δούμε πιο κάτω, στο πινάκιο προεξοφλήσεως συναλλαγματικών και γραμματίων στις τράπεζες.

Παράδειγμα 1ο. Κεφάλαια 10.500, 20.800, 18.600, 25.400 δρχ. τοκίσθηκαν αντιστοίχως επί 52, 36, 45, 75 ημέρες προς 9% με μεικτό έτος. Να βρεθεί ο συνολικός τόκος.

Λύση. $K_1 = 10.500,\ K_2 = 20.800,\ K_3 = 18.600,\ K_4 = 25.400$
$v_1 = 52,\ v_2 = 36,\ v_3 = 45,\ v_4 = 75$
$i = 0{,}09$ Άρα: $\Delta = 4000$

Θα εφαρμόσομε τον τύπο (3). Βρίσκομε πρώτα τους τοκαρίθμους:

$$N_1 = K_1 \cdot v_1 = 10.500 \times 52 = 546.000$$
$$N_2 = K_2 \cdot v_2 = 20.800 \times 36 = 748.800$$
$$N_3 = K_3 \cdot v_3 = 18.600 \times 45 = 837.000$$
$$N_4 = K_4 \cdot v_4 = 25.400 \times 75 = 1.905.000$$

Άρα: $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 4.036.800$

Ο συνολικό τόκος θα είναι:

$$I_{o\lambda} = \frac{4.036.800}{4000} = 1.009{,}20 \text{ δρχ.}$$

Παράδειγμα 2ο. Ο υπάλληλος Υ κατέθεσε στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο την 30 Ιουνίου 5000 δρχ., την 15 Σεπτεμβρίου 4800 δρχ., την 20 Οκτωβρίου 6000 δρχ. και την 1 Δεκεμβρίου 5500 δρχ. Να βρεθεί ο συνολικός τόκος που θα καταχωρισθεί στο βιβλιάριο καταθέσεων του Υ την 31 Δεκεμβρίου του ιδίου έτους, αν το επιτόκιο είναι 8,5% και το έτος μεικτό.

Λύση. $K_1 = 5000 \quad K_2 = 4800 \quad K_3 = 6000 \quad K_4 = 5500$
$v_1 = 184 \quad v_2 = 107 \quad v_3 = 72 \quad v_4 = 30$

Οι τοκοφόρες ημέρες υπολογίζονται από τον Πίνακα VII που βρίσκεται στους Πίνακες Ανατοκισμού - Ραντών - Χρεωλυσίων.

$v_1 = 365 - 181 = 184,\ v_2 = 365 - 258 = 107,\ v_3 = 365 - 293 = 72,$
$v_4 = 365 - 335 = 30,\ i = 0{,}085.$

Επειδή στο επιτόκιο 8,5% δεν αντιστοιχεί σταθερός διαιρέτης, ο συνολικός τόκος θα βρεθεί βάσει του τύπου:

$$I_{o\lambda} = \frac{K_1v_1 + K_2v_2 + K_3v_3 + K_4v_4}{\dfrac{360}{i}} = \frac{i\,(K_1v_1 + K_2v_2 + K_3v_3 + K_4v_4)}{360}$$

$$K_1v_1 = 5000 \times 184 = 920.000$$
$$K_2v_2 = 4800 \times 107 = 513.600$$
$$K_3v_3 = 6000 \times 72 = 432.000$$
$$K_4v_4 = 5500 \times 30 = 165.000$$

$$K_1v_1 + K_2v_2 + K_3v_3 + K_4v_4 = 2.030.600$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον πιο πάνω τύπο βρίσκομε:

$$I_{o\lambda} = \frac{0{,}085 \times 2.030.600}{360} = 479{,}45 \text{ δρχ.}$$

4.4 Υπολογισμός του τόκου με τη μέθοδο αναλύσεως του κεφαλαίου, του χρόνου και του επιτοκίου σε μέρη ανάλογα.

Α΄. Του κεφαλαίου. Αν στον τύπο $I = K \cdot v/\Delta$ θέσομε $K = \Delta$, τότε $I = v$, δηλαδή ο τόκος ισούται με τον αριθμό των τοκοφόρων ημερών όταν το κεφάλαιο ισούται με το σταθερό διαιρέτη. Αν τώρα $K \neq \Delta$, τότε μπορούμε να βρούμε τον τόκο ως άθροισμα αναλόγων μερών, στα οποία αναλύεται το K ως προς το Δ.

Παράδειγμα. Πόσο τόκο φέρουν 9360 δραχμές σε 74 ημέρες προς 6%; Έτος μεικτό.

Λύση. $K = 9360$, $v = 74$, $i = 0{,}06$, $\Delta = 6000$

Αν αναλύσομε το K σε μέρη ανάλογα προς το Δ, θα έχομε:

Αν K = 6000 δρχ.	τότε I =	74	δρχ. (= v)
Αν K = 3000 δρχ. (= $^1/_2$ του 6000)	τότε I =	37	δρχ. ($^1/_2$ του 74)
Αν K = 300 δρχ. (= $^1/_{10}$ του 3000)	τότε I =	3,70	δρχ. ($^1/_{10}$ του 37)
Αν K = 60 δρχ. (= $^1/_{100}$ του 6000)	τότε I =	0,74	δρχ. ($^1/_{100}$ του 74)

Άρα:

Αν K = 9360, τότε I = 115,44 δρχ.

Β΄ Του χρόνου. Αν διαιρέσομε και τους δύο όρους του κλάσματος $K \cdot v/\Delta = I$ με το 100, τότε έχομε:

$$\frac{\frac{K}{100} \cdot v}{\frac{\Delta}{100}} = I. \quad \text{Αν τώρα} \quad v = \frac{\Delta}{100}, \quad \text{τότε} \quad I = \frac{K}{100}$$

Δηλαδή: Αν ο αριθμός των τοκοφόρων ημερών ισούται με το εκατοστό του σταθερού διαιρέτη, τότε ο τόκος ισούται με το εκατοστό του κεφαλαίου. Αν τώρα $v \neq \Delta/100$, τότε μπορούμε να βρούμε τον τόκο ως άθροισμα αναλόγων μερών του $K/100$ στα οποία αναλύεται το v ως προς το $\Delta/100$.

Παράδειγμα. Πόσο τόκο θα φέρει κεφάλαιο 18.800 δρχ. σε 96 ημέρες προς 6%; Έτος μεικτό.

Λύση. $K = 18.800$, $v = 96$, $i = 0{,}06$, $\Delta/100 = 6000/100 = 60$

Αν $v = 60$ (= $\Delta/100$) τότε: $I = K/100 = 188$

Επομένως, θα έχομε:

Για v = 60 (= Δ/100)	έχομε: I =	188	(= K/100)
Για v = 30 (= $^1/_2$ του 60)	έχομε: I =	94	($^1/_2$ του 188)
Για v = 6 (= $^1/_{10}$ του 60)	έχομε: I =	18,80	($^1/_{10}$ του 188)

Άρα:

Για $v = 96$ έχομε: $I = 300{,}80$ δρχ.

Γ΄ Του επιτοκίου. Επειδή όλα τα επιτόκια δεν είναι κατάλληλα για σταθερό διαιρέτη, στηριζόμαστε στην ιδιότητα ότι ο απλός τόκος είναι ανάλογος ως προς το επιτόκιο και βρίσκομε πρώτα τον τόκο με ένα αυθαίρετο επιτόκιο (το οποίο έχει σταθερό διαιρέτη) και έπειτα βρίσκομε αναλογικά τον τόκο με το δοσμένο επιτόκιο.

Παράδειγμα. Πόσο τόκο φέρει κεφάλαιο 18.600 δρχ. σε 60 ημέρες προς 7,75%; Έτος μεικτό.

Λύση. $K = 18.600$, $v = 60$, $i = 0{,}0775$

Για να βρούμε το ζητούμενο τόκο, χρησιμοποιούμε αυθαίρετα το επιτόκιο 6% και έχομε:

$$I = \frac{K \cdot v}{\Delta} = \frac{18.600 \times 60}{6000} = 186$$

Έπειτα σκεπτόμαστε ως εξής:

Με επιτόκιο 6%	(= 0,06)	έχομε τόκο 186	
Με επιτόκιο 1%	(= 0,01)	έχομε τόκο 31	$(= {}^1/_6$ του 186)
Με επιτόκιο $^1/_2$%	(= 0,005)	έχομε τόκο 15,50	$(= {}^1/_2$ του 31)
Με επιτόκιο $^1/_4$%	(= 0,0025)	έχομε τόκο 7,75	$(= {}^1/_4$ του 31)

Άρα:

Με επιτόκιο 7,75% (= 0,0775) έχομε τόκο 240,25 δρχ.

Αν τώρα το επιτόκιο δεν είναι κατάλληλο για να αναλυθεί σε μέρη ανάλογα, τότε βρίσκομε τον τόκο βάσει ενός αυθαιρέτου επιτοκίου και κατόπιν εφαρμόζομε τη μέθοδο των τριών.

Π.χ. Με επιτόκιο 0,06 έχομε: $I' = 186$
Με επιτόκιο 0,0775 έχομε I;

Άρα: $$I = 186 \times \frac{0{,}0775}{0{,}06} = 240{,}25$$

Από το αποτέλεσμα συμπεραίνομε ότι: $I = I' \cdot \frac{i}{i'}$ ή $\frac{I}{I'} = \frac{i}{i'}$. Δηλαδή: ο λόγος των τόκων ισούται με το λόγο των επιτοκίων.

4.5 Εύρεση του τόκου, του χρόνου και του επιτοκίου.

Με τους βασικούς τύπους:

$$I = K \cdot n \cdot i, \qquad I = \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12}, \qquad I = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360} \quad \text{ή} \quad I = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{365}$$

δεν λύνονται μόνο προβλήματα στα οποία ζητείται ο τόκος ενός κεφαλαίου, αλλά και προβλήματα στα οποία ζητούνται και τα άλλα ποσά, δηλαδή το κεφάλαιο, ο χρόνος και το επιτόκιο. Επομένως, όταν θέλομε να βρούμε το K ή το ν ή το i τότε λύνομε τους πιο πάνω τύπους ως προς το άγνωστο κάθε φορά ποσό K ή ν ή i.

Για την εύρεση του κεφαλαίου ή του χρόνου ή του επιτοκίου, παραθέτομε πιο κάτω όλους τους σχετικούς τύπους, οι οποίοι δεν πρέπει να απομνημονεύονται, γιατί όλοι προκύπτουν από τους πιο πάνω βασικούς τύπους του τόκου.

Διακρίνομε τις εξής περιπτώσεις:

1) Όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη:

α) Το κεφάλαιο βρίσκεται από τον τύπο: $K = \dfrac{I}{n \cdot i}$

β) Ο χρόνος βρίσκεται από τον τύπο: $n = \dfrac{I}{K \cdot i}$

γ) Το επιτόκιο βρίσκεται από τον τύπο: $i = \dfrac{I}{K \cdot n}$

2) Όταν ο χρόνος δίνεται σε μήνες:

α) Το κεφάλαιο βρίσκεται από τον τύπο: $K = \dfrac{12 \cdot I}{\mu \cdot i}$

β) Ο χρόνος βρίσκεται από τον τύπο: $\mu = \dfrac{12 \cdot I}{K \cdot i}$

γ) Το επιτόκιο βρίσκεται από τον τύπο: $i = \dfrac{12 \cdot I}{K \cdot \mu}$

3) Όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες:

α) Κεφάλαιο: $K = \dfrac{360 \cdot I}{\nu \cdot i}$ ή $\dfrac{365 \cdot I}{\nu \cdot i}$

β) Χρόνος: $\nu = \dfrac{360 \cdot I}{K \cdot i}$ ή $\dfrac{365 \cdot I}{K \cdot i}$

γ) Επιτόκιο: $i = \dfrac{360 \cdot I}{K \cdot v}$ ή $\dfrac{365 \cdot I}{K \cdot v}$

Παράδειγμα 1ο. Ποιο κεφάλαιο τοκίσθηκε προς 8,5% επί 5 έτη και έδωσε τόκο 5100 δρχ.;

Λύση. K =; $i = 0{,}085$, $n = 5$, $I = 5100$

Αν αντικαταστήσομε στον τύπο $I = K \cdot n \cdot i$ και λύσομε ως προς K θα βρούμε το ζητούμενο κεφάλαιο. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγομε αν εφαρμόσομε απευθείας τον τύπο:

$$K = \frac{I}{n \cdot i} \qquad \text{Άρα:} \quad K = \frac{5100}{5 \times 0{,}085} = 12.000 \text{ δρχ.}$$

Παράδειγμα 2ο. Σε πόσες ημέρες κεφάλαιο 20.000 δρχ. που τοκίσθηκε με 9% έδωσε τόκο 300 δρχ.; (έτος υπολογισμού τοκοφ. ημερών: Εμπορικό).

Λύση. v =; $K = 20.000$, $i = 0{,}09$, $I = 300$

Αν αντικαταστήσομε τα δεδομένα στον τύπο:

$$v = \frac{360 \cdot I}{K \cdot i} \qquad \text{βρίσκομε:} \quad v = \frac{360 \times 300}{20.000 \times 0{,}09} = 60 \text{ ήμ.}$$

Παράδειγμα 3ο. Κεφάλαιο 10.000 δρχ. τοκίσθηκε επί 80 ημέρες και έφερε τόκο 100 δρχ. Με τι επιτόκιο τοκίσθηκε; Έτος μεικτό.

Λύση.

1ος τρόπος: $I = \dfrac{K \cdot v \cdot i}{360} \Longrightarrow 100 = \dfrac{10.000 \times 80 \times i}{360} \Longrightarrow i = 0{,}045$

2ος τρόπος: $I = \dfrac{K \cdot v}{\Delta} \Longrightarrow 100 = \dfrac{10.000 \times 80}{\Delta} \Longrightarrow \Delta = 8000$

Αλλά: $\Delta = \dfrac{360}{i}$ άρα: $8000 = \dfrac{360}{i} \Longrightarrow i = 0{,}045$

4.6 Εύρεση του αρχικού κεφαλαίου όταν είναι γνωστή η τελική του αξία.

Στον απλό τόκο, ονομάζομε **τελικό κεφάλαιο** ή **τελική αξία** ενός κεφαλαίου, το άθροισμα του **αρχικού κεφαλαίου** αυξημένο κατά τον τόκο που έχει παραχθεί στο τέλος μιας χρονικής περιόδου.

Αν παραστήσομε με το K_0 το αρχικό κεφάλαιο και με το K_n την τελική αξία του κεφαλαίου που τοκίσθηκε επί n έτη, τότε, βάσει του πιο πάνω ορισμού, θα πρέπει να ισχύει η ισότητα:

$$K_n = K_0 + I = K_0 + K_0 \cdot n \cdot i, \quad \text{διότι: } I = K_0 \cdot n \cdot i$$

ή

$$K_n = K_0 (1 + n \cdot i) \quad \text{και} \quad K_0 = \frac{K_n}{1 + n \cdot i} \tag{4}$$

Με τον τύπο (4) βρίσκομε το αρχικό κεφάλαιο ($= K_0$) όταν είναι γνωστό το τελικό κεφάλαιο ($= K_n$).

Αν τώρα ο χρόνος δίνεται σε μήνες, τότε, βάσει του ορισμού, θα είναι:

$$K_\mu = K_0 + \frac{K_0 \cdot \mu \cdot i}{12} = \frac{12 \cdot K_0 + K_0 \cdot \mu \cdot i}{12} = \frac{K_0 (12 + \mu \cdot i)}{12}$$

Λύνοντας ως προς K_0 έχομε:

$$K_0 = \frac{12 \cdot K_\mu}{12 + \mu \cdot i} \tag{4α}$$

Αν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες, τότε το αρχικό κεφάλαιο βρίσκεται από τον τύπο:

$$K_0 = \frac{360 \cdot K_v}{360 + v \cdot i} \quad \text{ή} \quad \frac{365 \cdot K_v}{365 + v \cdot i} = K_0 \tag{4β}$$

Αν, τέλος, εργασθούμε με τους σταθερούς διαιρέτες, θα έχομε:

$$K_v = K_0 + \frac{K_0 \cdot v}{\Delta} = \frac{K_0 \cdot \Delta + K_0 \cdot v}{\Delta} = \frac{K_0 (\Delta + v)}{\Delta}$$

Λύνοντας ως προς K_0 έχομε:

$$K_0 = \frac{K_v \cdot \Delta}{\Delta + v} \tag{4γ}$$

Σημείωση. Με την τελική αξία ενός κεφαλαίου, που έχει τοκισθεί, σχετίζεται το εξής πρόβλημα: Σε πόσο χρόνο ένα κεφάλαιο διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, κλπ.;

Για να βρούμε σε πόσο χρόνο διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, κλπ. ένα κεφάλαιο, αρκεί να αντικαταστήσομε στον κατάλληλο τύπο όπου $K_n = 2K_0$, $K_n = 3K_0$, κλπ. Έτσι, αν στον τύπο:

$K_v = K_0 + \dfrac{K_0 \cdot v}{\Delta}$ θέσομε όπου $K_v = 2K_0$ ή $3K_0$ θα βρούμε:

$2K_0 = K_0 + \dfrac{K_0 \cdot v}{\Delta}$ ή $K_0 = \dfrac{K_0 \cdot v}{\Delta}$, οπότε: $v = \Delta$

$$3K_0 = K_0 + \frac{K_0 \cdot v}{\Delta} \quad \text{ή} \quad 2K_0 = \frac{K_0 \cdot v}{\Delta}, \text{ οπότε: } v = 2\,\Delta$$

Ώστε: Κεφάλαιο, τοκισμένο με απλό τόκο, διπλασιάζεται σε τόσες ημέρες όσες και ο σταθερός διαιρέτης, τριπλασιάζεται σε αριθμό ημερών διπλάσιο του σταθερού διαιρέτη.

Παράδειγμα 1ο. Κεφάλαιο 10.000 δρχ. τοκίσθηκε επί 5 έτη προς $8^1/_2\%$. Να βρεθεί η τελική του αξία.

Λύση. $K_0 = 10.000$, $\quad n = 5$, $\quad i = 0{,}085$, $\quad K_n = ;$

Εφαρμόζομε τον τύπο $K_n = K_0\,(1 + n \cdot i)$ και βρίσκομε:

$$K_n = 10.000\,(1 + 5 \times 0{,}085) = 14.250 \text{ δρχ.}$$

Παράδειγμα 2ο. Κεφάλαιο τοκίσθηκε προς 6% επί 4 έτη και έγινε μαζί με τους τόκους του 18.600 δρχ. Ποιο ήταν το αρχικό κεφάλαιο και ποιος ο τόκος του;

Λύση. $K_0 = ;$ $\quad i = 0{,}06$, $\quad n = 4$, $\quad K_n = 18.600$, $\quad I = ;$

Γνωρίζομε ότι το τελικό κεφάλαιο ισούται με το αρχικό κεφάλαιο συν τον τόκο του.

Δηλαδή: $K_n = K_0 + K_0 \cdot n \cdot i = K_0\,(1 + n \cdot i)$.

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα έχομε:

$$18.600 = K_0\,(1 + 4 \times 0{,}06)$$

και

$$K_0 = \frac{18.600}{1 + 4 \times 0{,}06} = 15.000$$

Άρα, το αρχικό κεφάλαιο ήταν 15.000 δρχ.

Επειδή είναι:

$K_n = K_0 + I$, θα είναι: $I = K_n - K_0 = 18.600 - 15.000 = 3600$ δρχ. = τόκος.

Παράδειγμα 3ο. Κεφάλαιο τοκίσθηκε προς $4\,^1/_2\%$ επί 8 μήνες και το τοκοκεφάλαιο τοκίσθηκε πάλι προς 5% και έδωσε μηνιαίο τόκο 386,25 δρχ. Ποιο ήταν το αρχικό κεφάλαιο;

Λύση. Έστω K_μ το τοκοκεφάλαιο που τοκίσθηκε προς 5% και έδωσε μηνιαίο τόκο 386,25.

Δηλαδή: $\dfrac{K_\mu \times 1 \times 0{,}05}{12} = 386{,}25$, οπότε: $K_\mu = 92.700$ δρχ.

Εφαρμόζοντας τώρα τον τύπο: $K_0 = \dfrac{12 \cdot K_\mu}{12 + \mu \cdot i}$

όπου $\mu = 8$ και $i = 0{,}045$, βρίσκομε το ζητούμενο αρχικό κεφάλαιο.

$$K_0 = \frac{12 \times 92 \cdot 700}{12 + 8 \times 0{,}045} = 90.000 \text{ δρχ.}$$

Παράδειγμα 4ο. Κεφάλαιο τοκίσθηκε επί 60 ημέρες προς 7,5% και έγινε μαζί με τους τόκους του 20.250 δρχ. Ποιο ήταν το αρχικό κεφάλαιο και ποιος είναι ο τόκος;

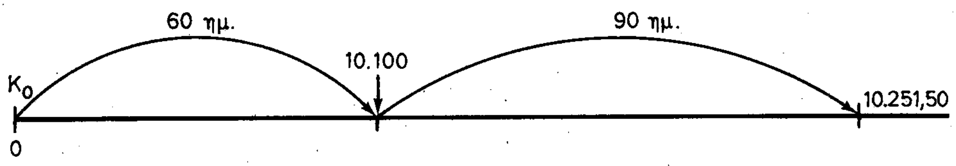
Λύση. $K_0 = ;$ $i = 0{,}075,$ $v = 60,$ $K_v = 20.250$
Θα εφαρμόσομε τον τύπο:

$$K_0 = \frac{360 \cdot K_v}{360 + v \cdot i} = \frac{360 \times 20.250}{360 + 60 \times 0{,}075} = 20.000 \text{ δρχ.}$$

Από τη σχέση $K_v = K_0 + I$ βρίσκομε τον τόκο.

$$I = K_v - K_0 = 20.250 - 20.000 = 250 \text{ δρχ.}$$

Παράδειγμα 5ο. Κεφάλαιο τοκίσθηκε επί 60 ημέρες και έγινε μαζί με τους τόκους του 10.100 δραχμές. Το τοκοκεφάλαιο 10.100 δρχ. τοκίσθηκε επί 90 ημέρες με το ίδιο επιτόκιο και έγινε μαζί με τους τόκους του 10.251,50 δρχ. Να βρεθεί το αρχικό κεφάλαιο και το επιτόκιο. Έτος μεικτό.



Λύση. Το κεφάλαιο 10.100 δρχ. που τοκίσθηκε επί 90 ημέρες έφερε τόκο: 10.251,50 − 10.100 = 151,50 = I. Εφαρμόζοντας τώρα τον τύπο $I = K \cdot v \cdot i/360$ βρίσκομε το επιτόκιο. Δηλαδή:

$$151{,}50 = \frac{10.100 \times 90 \cdot i}{360} \quad \text{και} \quad i = 0{,}06$$

Από τη σχέση: $K_v = K_0 + \dfrac{K_0 \cdot v}{\Delta}$ βρίσκομε το αρχικό κεφάλαιο.

Σε $i = 0{,}06$ αντιστοιχεί $\Delta = 6000$.

Άρα: $$10.100 = K_0 + \frac{K_0 \times 60}{6000} \quad \text{ή} \quad 10.100 = K_0 + \frac{K_0}{100}$$

ή $$10.100 \times 100 = 100\,K_0 + K_0 \quad \text{και} \quad K_0 = 10.000$$

4.7 Προβλήματα στα οποία δίνεται το κεφάλαιο ελαττωμένο κατά τον τόκο του.

Στις εμπορικές συναλλαγές, υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες ο δανειζόμενος ένα χρηματικό ποσό δεν εισπράττει ολόκληρο το ποσό που δανείζεται, γιατί ο δανειστής (πιστωτής) παρακρατεί συνήθως τον τόκο του κεφαλαίου που δανείζει, οπότε ο δανειζόμενος εισπράττει ένα κεφάλαιο που είναι ελαττωμένο κατά τον τόκο του. Στις περιπτώσεις αυτές δημιουργούνται τα εξής προβλήματα:

α) Η εύρεση του ελαττωμένου κεφαλαίου.
β) Η εύρεση του αρχικού κεφαλαίου.
γ) Η εύρεση του τόκου που κράτησε ο πιστωτής.

α) Εύρεση του ελαττωμένου κεφαλαίου.

Αν συμβολίσομε με το K_0 το αρχικό κεφάλαιο που δανείσθηκε ο οφειλέτης για ν ημέρες προς επιτόκιο i και με το K το ελαττωμένο κεφάλαιο, δηληδή το κεφάλαιο που εισέπραξε ο δανειζόμενος από τον πιστωτή μετά την αφαίρεση του τόκου, τότε το ελαττωμένο κατα τον τόκο του κεφάλαιο βρίσκεται από τη σχέση:

$$K_0 - \frac{K_0 \cdot \nu}{\Delta} = K \qquad (5)$$

όπου $K_0 > K$. Αν το επιτόκιο δεν είναι κατάλληλο για σταθερό διαιρέτη, τότε θέτομε όπου $\Delta = 360/i$ ή $\Delta = 365/i$ και ο τύπος (5) τροποποίειται αναλόγως.

β) Εύρεση του αρχικού κεφαλαίου.

Λύνοντας την εξίσωση (5) ως προς K_0 έχομε:

$$K_0 \cdot \Delta - K_0 \cdot \nu = K \cdot \Delta \quad \text{ή} \quad K_0 (\Delta - \nu) = K \cdot \Delta$$

και

$$K_0 = \frac{K \cdot \Delta}{\Delta - \nu} \qquad (6)$$

Ώστε: Το αρχικό κεφάλαιο K_0 που ελαττώθηκε κατά τον τόκο ν ημερών και έγινε K, βρίσκεται αν το γινόμενο του ελαττωμένου κεφαλαίου (=K) επί το σταθερό διαιρέτη (=Δ) διαιρεθεί με το σταθερό διαιρέτη μείον τον αριθμό των τοκοφόρων ημερών.

Αν τώρα το επιτόκιο υπολογισμού των τόκων δεν είναι κατάλληλο για σταθερό διαιρέτη, τότε στον τύπο (6) θέτομε όπου $\Delta = 360/i$ ή $\Delta = 365/i$ και βρίσκομε τους ισοδύναμους τύπους:

$$K_0 = \frac{360 \cdot K}{360 - \nu \cdot i}, \quad (6\alpha) \qquad \text{και} \qquad K_0 = \frac{365 \cdot K}{365 - \nu \cdot i} \quad (6\beta)$$

για μεικτό-εμπορικό και πολιτικό έτος αντιστοίχως.

γ) Εύρεση του τόκου.

Αφού ισχύει η ισότητα: $K_0 = K + I$ (δηλ. το αρχικό κεφάλαιο = ελαττωμένο κεφάλαιο + τόκος αρχικού κεφαλαίου), θα πρέπει να ισχύει και η ισότητα:

$$K + I = \frac{K \cdot \Delta}{\Delta - \nu}, \text{ βάσει του τύπου (6).}$$

Εκτελούμε τις πράξεις και έχομε:

$$I = \frac{K \cdot \Delta}{\Delta - v} - K \quad \text{ή} \quad I = \frac{K \cdot \Delta - K(\Delta - v)}{\Delta - v} = \frac{K \cdot \Delta - K \cdot \Delta + K \cdot v}{\Delta - v}$$

και

$$I = \frac{K \cdot v}{\Delta - v} \qquad (7)$$

Ώστε: Ο τόκος που κρατάει ο πιστωτής από τον οφειλέτη βρίσκεται από τον τύπο (7).

Αν τώρα το επιτόκιο δεν είναι κατάλληλο για σταθερό διαιρέτη, τότε ο τόκος υπολογίζεται βάσει των ακολούθων τύπων:

$$I = \frac{K \cdot v \cdot i}{360 - v \cdot i} \quad \text{για εμπορικό-μεικτό έτος}$$

$$I = \frac{K \cdot v \cdot i}{365 - v \cdot i} \quad \text{για πολιτικό έτος}$$

Παράδειγμα 1ο. Μία εμπορική επιχείρηση δανείσθηκε 20.000 δρχ. προς 6% για 60 ημέρες και συμφωνήθηκε να κρατηθεί προκαταβολικά ο τόκος από τον πιστωτή. Πόσα χρήματα εισέπραξε η επιχείρηση; Έτος εμπορικό.

Λύση. $K_0 = 20.000$, $i = 0{,}06$, $\Delta = 6000$, $v = 60$, $K = ;$

Αντικαθιστώντας στον τύπο (5) βρίσκομε το ποσό που εισέπραξε η επιχείρηση.

$$K_0 - \frac{K_0 \cdot v}{\Delta} = K, \qquad K = 20.000 - \frac{20.000 \times 60}{6000} = 19.800 \text{ δρχ.}$$

Παράδειγμα 2ο. Στις 19 Φεβρουαρίου ο έμπορος Χ δανείσθηκε ένα χρηματικό ποσό με τη συμφωνία να το εξοφλήσει την 20 Απριλίου του ιδίου έτους. Ο πιστωτής κράτησε προκαταβολικώς τον τόκο του ποσού που δάνεισε προς 8% και ο Χ εισέπραξε 44.400 δρχ. Ερωτάται: Ποιο είναι το οφειλόμενο ποσό; Έτος μεικτό.

Λύση. $v = 60$, $i = 0{,}08$, $\Delta = 4500$, $K = 44.400$, $K_0 = ;$

Για την εύρεση του K_0 πρέπει να αντικαταστήσομε τα δεδομένα στον τύπο (6), δηλαδή στον τύπο:

$$K_0 = \frac{K \cdot \Delta}{\Delta - v}, \qquad K_0 = \frac{44.400 \times 60}{4500 - 60} = 45.000 \text{ δρχ.}$$

Ώστε το οφειλόμενο ποσό είναι 45.000 δρχ.

Παράδειγμα 3ο. Ο έμπορος Ε δανείσθηκε από τον πιστωτή Π ένα χρηματικό ποσό προς $7^1/_2$% για 90 ημέρες. Ο Π αφού κράτησε προκαταβολικά τον τόκο έδωσε στον Ε 47.100 δρχ. Να βρεθεί ο τόκος που κράτησε ο πιστωτής. Έτος εμπορικό.

Λύση. $i = 0{,}075, \quad \Delta = 4800, \quad v = 90, \quad K = 47.100, \quad I = ;$
Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στον τύπο (7) βρίσκομε τον τόκο που κράτησε ο πιστωτής.

$$I = \frac{K \cdot v}{\Delta - v} = \frac{47.100 \times 90}{4800 - 90} = 900 \text{ δρχ.}$$

4.8 Εύρεση του μέσου επιτοκίου.

Υποθέτομε ότι κεφάλαια: $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_\mu$ τοκίσθηκαν αντιστοίχως επί: $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_\mu$ ημέρες προς τα διαφορετικά επιτόκια: $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_\mu$. Ερωτάται: Με ποιο κοινό επιτόκιο πρέπει να τοκισθούν τα δοσμένα κεφάλαια για να δώσουν τον ίδιο συνολικό τόκο, τον οποίο θα έδιναν αν τοκίζονταν αντιστοίχως προς τα δοσμένα επιτόκια;

Μέσο ή **κοινό επιτόκιο** είναι το επιτόκιο εκείνο με το οποίο πρέπει να τοκίσομε τα δοσμένα κεφάλαια για τους αντίστοιχους χρόνους, ώστε να εισπράξομε τον ίδιο συνολικό τόκο που θα εισπράτταμε αν τοκίζαμε τα δοσμένα κεφάλαια προς τα διάφορα επιτόκια.

Αν παραστήσομε με το σύμβολο $\bar{x}$ το μέσο επιτόκιο, τότε, βάσει του ορισμού που δώσαμε πιο πάνω, πρέπει να ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\frac{K_1 v_1 \bar{x}}{360} + \frac{K_2 v_2 \bar{x}}{360} + \ldots + \frac{K_\mu v_\mu \bar{x}}{360} = \frac{K_1 v_1 i_1}{360} + \frac{K_2 v_2 i_2}{360} + \ldots + \frac{K_\mu v_\mu i_\mu}{360}$$

ή

$$\bar{x}\,(K_1 v_1 + K_2 v_2 + \ldots + K_\mu v_\mu) = K_1 v_1 i_1 + K_2 v_2 i_2 + \ldots + K_\mu v_\mu i_\mu$$

Λύνοντας την τελευταία σχέση ως προς $\bar{x}$ βρίσκομε τον ακόλουθο τύπο:

$$\bar{x} = \frac{K_1 v_1 i_1 + K_2 v_2 i_2 + \ldots + K_\mu v_\mu i_\mu}{K_1 v_1 + K_2 v_2 + \ldots + K_\mu v_\mu} \qquad \textbf{(8)}$$

Ο τύπος (8) αποτελεί το θεμελιώδη τύπο υπολογισμού του μέσου επιτοκίου.

Ιδιότητες του μέσου επιτοκίου. Το μέσο επιτόκιο θα βρίσκεται πάντοτε ανάμεσα στο μικρότερο και στο μεγαλύτερο από τα δοσμένα επιτόκια. Αν διερευνήσομε τον τύπο (8), τότε προκύπτουν οι ακόλουθες περιπτώσεις:

α) Αν $K_1 = K_2 = \ldots = K_\mu = K$ και $v_1 = v_2 = \ldots = v_\mu = v$, δηλαδή, αν ίσα κεφάλαια τοκίζονται επί ίσα χρονικά διαστήματα, τότε από τον τύπο (8) προκύπτει μέσο επιτόκιο:

$$\bar{x} = \frac{K \cdot v\,(i_1 + i_2 + \ldots + i_\mu)}{K \cdot v\,\underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{\mu \text{ φορές}}} \quad \text{ή} \quad \bar{x} = \frac{i_1 + i_2 + \ldots + i_\mu}{\mu} \qquad (8\alpha)$$

Επίσης, αν $K_1 v_1 = K_2 v_2 = ... = K_\mu v_\mu$, τότε ισχύει πάλι ο τύπος (8α).

Από τον τύπο (8α) συμπεραίνομε ότι: **Το μέσο επιτόκιο είναι ανεξάρτητο από τα τοκιζόμενα κεφάλαια και από τις τοκοφόρες ημέρες και ισούται με το μέσο όρο των δοσμένων επιτοκίων.**

β) Αν $K_1 = K_2 = ... = K_\mu = K$, τότε ο τύπος (8) γράφεται:

$$\bar{x} = \frac{K(v_1 i_1 + v_2 i_2 + ... + v_\mu i_\mu)}{K(v_1 + v_2 + ... + v_\mu)} \quad \text{ή} \quad \bar{x} = \frac{v_1 i_1 + v_2 i_2 + ... + v_\mu i_\mu}{v_1 + v_2 ... + v_\mu} \qquad (8\beta)$$

γ) Αν, τέλος, $v_1 = v_2 = ... = v_\mu = v$, τότε ο τύπος (8) γίνεται:

$$\bar{x} = \frac{(K_1 i_1 + K_2 i_2 + ... + K_\mu i_\mu) \cdot v}{(K_1 + K_2 + ... + K_\mu) \cdot v} \quad \text{ή} \quad \bar{x} = \frac{K_1 i_1 + K_2 i_2 + ... + K_\mu i_\mu}{K_1 + K_2 + ... + K_\mu} \qquad (8\gamma)$$

Παρατήρηση. Οι τύποι (8α), (8β) και (8γ) προκύπτουν εύκολα από το βασικό τύπο (8) και δεν πρέπει να απομνημονεύονται.

Συνεπώς, για να βρίσκομε το μέσο επιτόκιο αρκεί να εφαρμόζομε κάθε φορά τον τύπο (8).

Παράδειγμα 1ο. Κεφάλαια 15.000 δρχ., 25.000 δρχ., 30.000 δρχ. και 45.000 δρχ. τοκίσθηκαν αντιστοίχως επί 60 ημέρες προς 9%, επί 40 ημ. προς 8%, επί 50 ημ. προς 6% και επί 30 ημ. προς 5%. Να βρεθεί το μέσο επιτόκιο.

Λύση. $K_1 = 15.000, \quad v_1 = 60, \quad i_1 = 0{,}09$
$K_2 = 25.000, \quad v_2 = 40, \quad i_2 = 0{,}08$
$K_3 = 30.000, \quad v_3 = 50, \quad i_3 = 0{,}06$
$K_4 = 45.000, \quad v_4 = 30, \quad i_4 = 0{,}05$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στον τύπο (8) βρίσκομε:

$$\bar{x} = \frac{15.000 \times 60 \times 0{,}09 + 25.000 \times 40 \times 0{,}08 + 30.000 \times 50 \times 0{,}06 + 45.000 \times 30 \times 0{,}05}{15.000 \times 60 + 25.000 \times 40 + 30.000 \times 50 + 45.000 \times 30} =$$

$$= \frac{318.500}{4.750.000} = 0{,}067$$

Άρα, το μέσο επιτόκιο είναι 6,7%.

Παράδειγμα 2ο. Ο έμπορος Ε τόκισε 4 ίσα κεφάλαια για τον ίδιο χρόνο με τα επιτόκια: 12%, 7 $^3/_4$%, 6 $^1/_2$% και 9%. Με ποιο μέσο επιτόκιο τόκισε ο Ε τα χρήματά του;

Λύση. Επειδή $K_1 = K_2 = K_3 = K_4$ και $v_1 = v_2 = v_3 = v_4$ συμπεραίνομε ότι το μέσο επιτόκιο ισούται με το μέσο όρο των δοσμένων επιτοκίων. Δηλαδή θα εφαρμόσομε τον τύπο (8α).

$i_1 = 0{,}12, \; i_2 = 0{,}0775, \; i_3 = 0{,}065, \; i_4 = 0{,}09$

$$\bar{x}=\frac{0,12+0,0775+0,065+0,09}{4}=\frac{0,3525}{4}=0,088$$

Άρα το μέσο επιτόκιο είναι 8,8%.

Παράδειγμα 3ο. Τέσσερα ίσα κεφάλαια τοκίζονται αντιστοίχως: επί 80 ημέρες προς 5%, επί 50 ημ. προς 8%, επί 60 ημ. προς 6,5% και επί 90 ημ. προς 9%. Ποιο είναι το μέσο επιτόκιο;

Λύση. Επειδή είναι $K_1 = K_2 = K_3 = K_4$ θα εφαρμόσομε τον τύπο (8β).
$v_1 = 80, \quad v_2 = 50, \quad v_3 = 60, \quad v_4 = 90$
$i_1 = 0,05, \quad i_2 = 0,08, \quad i_3 = 0,065, \quad i_4 = 0,09$
Αντικαθιστώντας στον τύπο (8β) βρίσκομε:

$$\bar{x}=\frac{80\times 0,05+50\times 0,08+60\times 0,065+90\times 0,09}{80+50+60+90}=\frac{20}{280}=0,07$$

Άρα, το μέσο επιτόκιο είναι 7% περίπου.

4.9 Προβλήματα απλού τόκου.

1. Πόσο τόκο φέρει κεφάλαιο 10.000 δρχ. σε 5 έτη προς 6%;

   (Απ. 3000)

2. Πόσο τόκο φέρει κεφάλαιο 20.000 δρχ. σε 3 μήνες προς $5^2/_3$%;

   (Απ. 283,33)

3. Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 10.000 δρχ. που τοκίσθηκε επί 60 ημέρες προς 6%, για μεικτό και πολιτικό έτος.

   (Απ. 100 - 98,63)

4. Κεφάλαιο 20.000 δρχ. τοκίσθηκε προς 6% από την 1 Ιανουαρίου ως την 1 Μαρτίου. Να βρεθεί ο τόκος. Έτος: Μεικτό και πολιτικό.

   (Απ. 200 - 197,26)

5. Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 20.000 δρχ., το οποίο τοκίσθηκε προς 6% επί 150 ημέρες, με τη μέθοδο αναλύσεως του κεφαλαίου σε μέρη ανάλογα.

   (Απ. 500)

6. Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 100.000 δρχ. που τοκίσθηκε επί 150 ημέρες προς 6%, με τη μέθοδο αναλύσεως του χρόνου σε μέρη ανάλογα.

   (Απ. 2500)

7. Ποιο κεφάλαιο πρέπει να τοκίσομε προς 6% για να μας δώσει σε 60 ημέρες 120 δρχ. τόκο;

   (Απ. 12.000)

8. Κεφάλαια 10.000, 20.000 και 30.000 δρχ. τοκίσθηκαν αντιστοίχως επί 40,50 και 60 ημέρες προς επιτόκια: 4%, 5% και 6%. Να βρεθεί το μέσο επιτόκιο.

   (Απ. 0,0543)

9. Κεφάλαιο 10.000 δρχ. τοκίσθηκε επί 2 έτη 3 μήνες και 20 ημέρες προς 6%. Να βρεθεί η τελική του αξία.

   (Απ. 11.383,33)

10. Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 10.000 δρχ., το οποίο τοκίσθηκε από 2 Απριλίου ως 30 Αυγούστου προς 4%. Έτος: Μεικτό και πολιτικό.

    (Απ. 166,67 - 164,38)

11. Ποιο κεφάλαιο, όταν τοκισθεί επί 40 ημέρες προς 8%, φέρει τόκο 100 δρχ.; Έτος μεικτό.
(Απ. 11.250)

12. Προς ποιο επιτόκιο πρέπει να τοκισθεί κεφάλαιο 10.000 δρχ. ώστε σε 50 ημέρες να φέρει τόκο 70 δρχ; Έτος πολιτικό.
(Απ. 5,11%)

13. Επί πόσες ημέρες πρέπει να τοκίσομε κεφάλαιο 200.000 δρχ. προς 4%, για να πάρομε 3750 δρχ. τόκο; Έτος μεικτό.
(Απ. 169 ημ.)

14. Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 15.000 δρχ., το οποίο τοκίσθηκε προς 6% από 1 Ιαν/ρίου ως 1 Μαΐου. Έτος μεικτό.
(Απ. 15.300)

15. Να βρεθεί το κεφάλαιο που τοκίσθηκε επί 60 ημέρες προς 10% και έγινε μαζί με τους τόκους του 6000 δρχ. Έτος μεικτό.
(Απ. 5901,60)

16. Τοκίσθηκαν τα εξής κεφάλαια:
α) 15.000 δρχ. από 1 Ιαν/ρίου ως 10 Φεβ/ρίου
β) 20.000 δρχ. από 20 Ιαν/ρίου ως 19 Φεβ/ρίου
γ) 3000 δρχ. από 25 Ιαν/ρίου ως 24 Φεβ/ρίου.
Να βρεθεί ο συνολικός τόκος, αν το επιτόκιο υπολογισμού είναι 8% και το έτος μεικτό.
(Απ. 286,67)

17. Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 24.000 δρχ. προς $7^1/_2$% για 80 ημέρες με έτος μεικτό: α) Με τη μέθοδο των σταθερών διαιρετών και β) με τη μέθοδο των αναλόγων μερών ως προς το κεφάλαιο, το χρόνο και το επιτόκιο.
(Απ. 400)

18. Τόκισε κάποιος 10.000 δρχ. προς $4^3/_4$% και 3000 δρχ. προς $5^1/_6$% για ένα έτος. Με ποιο μέσο επιτόκιο πρέπει να τοκισθούν και τα δυο κεφάλαια, ώστε να δώσουν τον ίδιο τόκο;
(Απ. 0,0485)

19. Μετά πόσο χρόνο, κεφάλαιο που τοκίσθηκε προς 5%: α) διπλασιάζεται; β) τριπλασιάζεται; Έτος μεικτό.
(Απ. 7200 ημ. - 14.400 ημ.)

20. Τόκισε κάποιος, με απλό τόκο, ένα χρηματικό ποσό πριν από 6 έτη. Τα δύο πρώτα έτη ο τόκος υπολογίσθηκε προς 5% και τα υπόλοιπα έτη προς 7%. Στο τέλος των 6 ετών εισέπραξε για τόκους και κεφάλαιο 138.000 δρχ. Ποιο ήταν το κεφάλαιο που τοκίσθηκε;
(Απ. 100.000)

21. Κεφάλαιο 60.000 δρχ. έδωσε ετήσιο τόκο 2000 δρχ. Το $^1/_3$ του κεφαλαίου τοκίσθηκε με διάφορο επιτόκιο. Να βρεθούν τα δύο επιτόκια, αν είναι γνωστό ότι το άθροισμά τους είναι 9%.
(Απ. 8% - 1%)

22. Δάνεισε κάποιος ένα χρηματικό ποσό. Τό $^1/_3$ του ποσού το δάνεισε για 2 έτη και 4 μηνες προς 8% και το υπόλοιπο για 3 έτη και 20 ημέρες προς 10% και εισέπραξε και από τα δύο ποσά συνολικό τόκο 15.955,55 δρχ. Να βρεθεί το χρηματικό ποσό που δάνεισε.
(Απ. 60.000)

23. Τόκισε κάποιος 150.000 δρχ. προς 4%. Μετά 9 μήνες πήρε το κεφάλαιο και τον τόκο και τα τοποθέτησε σε μια επιχείρηση, η οποία του δίνει 6000 δρχ. τόκο το χρόνο. Με ποιο επιτόκιο έγινε η τοποθέτηση των χρημάτων στην επιχείρηση;
(Απ. 3,88%)

24. Κεφάλαια 6000, 8000 και 12.000 δρχ. τοκίσθηκαν αντιστοίχως επί 40, 60 και 80 ημέρες προς επιτόκια $4^1/_2$%, $5^1/_4$% και $6^3/_4$%. Να βρεθεί το μέσο επιτόκιο.
(Απ. 6%)

25. Στις 10 Φεβρουαρίου, τοκίσθηκε ένα κεφάλαιο προς 6%. Στις 16 Απριλίου, του ιδίου έτους, τοκίζεται δεύτερο κεφάλαιο, διπλάσιο του πρώτου, προς 3%. Στις 8 Οκτωβρίου, του ιδίου έτους, η συνολική τελική αξία και των δύο κεφαλαίων ήταν 184.150 δρχ. Να βρεθούν τα κεφάλαια που τοκίσθηκαν.

(Απ. 60.000 - 120.000)

26. Δύο κεφάλαια, από 10.000 δρχ. το καθένα, τοκίσθηκαν προς 6%. Το πρωτο έφερε τόκο 300 δρχ. και το δεύτερο 100 μέχρι σήμερα. Ερωταται: Μετά πόσο χρόνο από σήμερα ο συνολικός τόκος του πρώτου θα είναι διπλάσιος του συνολικού τόκου του δευτέρου;

(Απ. 60 ημ.)

27. Κάποιος πατέρας που πέθανε άφησε στα τρία παιδιά του 542.675 δραχμές και όρισε στη διαθήκη του να τις μοιράσουν κατά τέτοιο τρόπο, ώστε το κάθε παιδί, αν καταθέσει το μερίδιό του στην Τράπεζα Τ με απλό τόκο προς 9%, να πάρει από την Τράπεζα το ίδιο ποσό όταν συμπληρώσει το 21 έτος της ηλικίας του. Αν, κατά το θάνατο του πατέρα, οι ηλικίες των παιδιων ήταν 11,13 και 15 χρονων να βρεθεί το μερίδιο του κάθε παιδιού.

(Απ. 162555 179566 200554)

28. Κεφάλαιο διαιρειται σε τρία τμήματα, τα οποία είναι όπως οι αριθμοί 3, 4, 5. Το πρωτο τοκίζεται προς 8%, το δεύτερο προς 6% και το τρίτο προς 7%. Και τα τρία τμήματα έδωσαν συνολικό ετήσιο τόκο 8300 δρχ. Να βρεθουν τα τρία τμήματα του κεφαλαίου.

(Απ. 30.000 - 40.000 - 50.000)

29. Προς ποιο επιτόκιο 7500 δραχμές σε 120 ημέρες γίνονται με τους τόκους τους 7612,50 δρχ.; Έτος μεικτό.

(Απ. 0,045)

30. Κεφάλαιο 2000 δρχ. τοκίσθηκε επί ένα έτος και έγινε μαζί με τους τόκους του 2110 δρχ. Επίσης, κεφάλαιο 720 δρχ. τοκίσθηκε επί 10 μηνες και έγινε 744 δρχ. Με ποιά επιτόκια τοκίσθηκαν τα πιο πάνω κεφάλαια;

(Απ. 0,05 – 0,04)

31. Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 4280 δρχ. προς 6%, το οποίο τοκίσθηκε από 21 Μαρτίου ως τις 24 Ιουλίου του ιδίου έτους, με τη μέθοδο αναλύσεως του χρόνου σε μέρη ανάλογα. Έτος μεικτό.

(Απ. 89,17)

32. Να βρεθει ο τόκος κεφαλαίου 15.000 δρχ., το οποίο τοκίσθηκε επί 90 ημέρες προς 4%, με τη μέθοδο αναλύσεως του κεφαλαίου σε μέρη ανάλογα. Έτος μεικτό.

(Απ. 150)

33. Να βρεθει ο τόκος κεφαλαίου 3575 δρχ., το οποίο τοκίσθηκε επί 80 ημέρες προς $4^3/_4$%, με τη μέθοδο αναλύσεως του επιτοκίου σε μέρη ανάλογα.

(Απ. 37,74)

34. Κεφάλαιο που τοκίσθηκε προς 5% έγινε μαζί με τους τόκους του 1000 δρχ. μετά από 8 μηνες. Ποιο ηταν το κεφάλαιο;

(Απ. 967,74)

35. Ο έμπορος Χ τόκισε το $^1/_6$ του κεφαλαίου του προς 9% και το υπόλοιπο προς 2%. Το δεύτερο τμημα του κεφαλαίου έφερε ετήσιο τόκο 300 δρχ. περισσότερο από το πρώτο τμήμα. Ποιο ήταν το κεφάλαιο που τόκισε ο Χ;

(Απ. 180.000)

36. Ποιο ποσό πρέπει να δανείσομε προς 6% στις 12 Φεβρουαρίου, για να εισπράξομε στις 30 Ιουνίου του ιδίου έτους τοκοκεφάλαιο 19.200 δρχ.; Έτος μεικτό.

(Απ. 18.768)

37. Κεφάλαια 20.000, 40.000 και 55.000 δρχ., τοκίσθηκαν αντιστοίχως επί 40, 60 και 80 ημέρες προς επιτόκια 5,5%, 7%, 9%. Να βρεθεί το μέσο επιτόκιο. Έτος μεικτό.

(Απ. 8%)

38. Κεφάλαιο τοκίσθηκε επί 10 μήνες και έγινε μαζί με τους τόκους του 12.600 δρχ. Το τοκοκεφάλαιο 12.600 δρχ. τοκίσθηκε επί 2 έτη και 6 μήνες με το ίδιο επιτόκιο και έγινε μαζί με τους τόκους του 14.490 δρχ. Ποιο ηταν το αρχικό κεφάλαιο και ποιο το επιτόκιο;

(Απ. 12.000 - 6%)

39. Ο έμπορος Α.Α. δάνεισε 25.000 προς 8,5% για 60 ημέρες, 28.000 δρχ. προς 9% για 80 ημέρες και 50.000 δρχ. προς 7% για 50 ημέρες. Με ποιο μέσο επιτόκιο δάνεισε τα χρήματά του;

(Απ. 0,081)

40. Κεφάλαιο τοκίσθηκε επί 9 μήνες προς 8% και το τοκοκεφάλαιο τοκίσθηκε προς 4,5% και έδωσε ετήσιο τόκο 250 δρχ. Ποιο ηταν το αρχικό κεφάλαιο;

(Απ. 5241,09)

41. Κεφάλαια 40.000 δρχ. και 30.000 δρχ. τοκίσθηκαν με δυο διαφορετικά επιτόκια και έδωσαν συνολικό ετήσιο τόκο 5900 δρχ. Αν ο ετήσιος τόκος του πρώτου είναι μεγαλύτερος του ετήσιου τόκου του δευτέρου κατά 500 δρχ., με ποιά επιτόκια τοκίσθηκαν τα πιο πάνω κεφάλαια;

(Απ. 8% - 9%)

42. Δυό κεφάλαια τοκίσθηκαν επί 9 μηνες· το πρώτο προς 6% και το δεύτερο προς 7% και έδωσαν συνολικό τόκο 4500 δρχ. Αν ο τόκος του β΄ κεφαλαίου ειναι μεγαλύτερος του τόκου του α΄ κεφαλαίου κατά 1800 δρχ., ποιά είναι τα κεφάλαια που τοκίσθηκαν;

(Απ. 30.000 - 60.000)

43. Τόκισε κάποιος τα $^2/_3$ του κεφαλαίου του προς 6% και τό υπόλοιπο προς 8%. Το πρώτο τμημα του κεφαλαίου έδωσε ετήσιο τόκο 800 δρχ. περισσότερο του δευτέρου.Να βρεθεί το κεφάλαιο που τοκίσθηκε.

(Απ. 60.000)

44. Ένας υπάλληλος κατέθεσε σε μια τράπεζα ένα χρηματικό ποσό προς $7^1/_2$%. Μετά από 6 μηνες εισέπραξε συνολικά 31.125 δρχ. (τόκους και κεφάλαιο). Τι ποσό ειχε καταθέσει ο υπάλληλος;

(Απ. 30.000)

45. Την 1η Φεβρουαρίου 1976, ο έμπορος Ε δανείσθηκε ένα χρηματικό ποσό και συμφώνησε να το επιστρέψει στίς 10 Μαΐου του ιδίου έτους. Ο πιστωτής κράτησε προκαταβολικώς τον τόκο του ποσού που δάνεισε προς 6% και ο Ε εισέπραξε τελικώς 60.000 δρχ. Πόσα χρήματα θα επιστρέψει ο Ε στις 10 Μαΐου;

(Απ. 61.000)

46. Τόκισε κάποιος τα $^9/_{10}$ του κεφαλαίου του προς 6% γιά 4 μήνες και το υπόλοιπο προς 7% για 8 μήνες. Αν ο τόκος του α΄ τμήματος είναι μεγαλύτερος από τον τόκο του β΄ τμήματος κατά 1600 δρχ., να βρεθει το κεφάλαιο που τοκίσθηκε.

(Απ. 120.000)

47. Κεφάλαιο 20.000 δρχ. τοκίσθηκε επί 90 ημέρες και έγινε μαζί με τον τόκο του 20.300 δρχ. Με ποιο επιτόκιο τοκίσθηκε;

(Απ. 6%)

48. Ο έμπορος Χ τόκισε το $^1/_2$ του κεφαλαίου του προς 6% για 6 έτη, τα $^5/_{20}$ του κεφαλαίου προς 8% για 3 έτη και το υπόλοιπο προς 9% για 2 ετη και εισέπραξε συνολικό τόκο 24.111 δρχ. Ποιο ηταν το κεφάλαιο που τόκισε;

(Απ. 84.600)

49. Ένα κεφάλαιο τοκίσθηκε προς 9%. Άλλο κεφάλαιο, πενταπλάσιο του πρώτου, τοκίσθηκε προς 5%. Να βρεθούν τα δυο κεφάλαια, αν είναι γνωστό ότι ο συνολικός ετήσιος τόκος και των δυο κεφαλαίων ανέρχεται στο ποσό των 5440 δρχ.

(Απ. 16.000 - 80.000)

50. Δανεισθήκαμε ένα χρηματικό ποσό με τη συμφωνία να κρατηθεί προκαταβολικά ο τόκος. Ποιο ήταν το κεφάλαιο που δανεισθήκαμε, αν μας έδωσαν 9800 δρχ. και κράτησαν τόκους για τέσσερις μήνες προς 6%;

(Απ. 10.000)

51. Κεφάλαια 30.000 δρχ. και 60.000 δρχ. τοκίσθηκαν επί 9 μηνες και έδωσαν συνολικό τόκο 3825 δρχ. Αν ο τόκος του β' κεφαλαίου είναι μεγαλύτερος από τον τόκο του α' κεφαλαίου κατά 1575 δρχ., με ποια επιτόκια τοκίσθηκαν τα παραπάνω κεφάλαια;

(Απ. 0,05 - 0,06)

52. Κεφάλαιο τοκίσθηκε επί 10 μήνες και έγινε μαζί με τους τόκους του 64.500 δρχ. Το τοκοκεφάλαιο (= 64.500) τοκίσθηκε επί 3 έτη και 4 μήνες με το ίδιο επιτόκιο και έγινε μαζί με τους τόκους του 83.850 δρχ. Ποιο ήταν το αρχικό κεφάλαιο και ποιο το επιτόκιο;

(Απ. 60.000 - 0,09)

53. Υπάλληλος κατέθεσε στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο 60.000 δρχ. στις 2 Οκτωβρίου και 40.000 δρχ. την 1η Νοεμβρίου. Την 31η Δεκεμβρίου του ιδίου έτους καταχωρήθηκε στο βιβλιάριο καταθέσεων του υπαλλήλου συνολικός τόκος 1625 δρχ. Με ποιο επιτόκιο υπολογίσθηκαν οι πιο πάνω καταθέσεις; Έτος μεικτό.

(Απ. $7^1/_2$%)

54. Κεφάλαιο που τοκίσθηκε επί 8 μήνες έφερε τόκο το $^1/_{20}$ του κεφαλαίου. Με ποιο επιτόκιο τοκίσθηκε;

(Απ. 0,075)

55. Κεφάλαια 10.000, 20.000 και 30.000 δρχ. τοκίσθηκαν αντιστοίχως επί 60,30 και 20 ημέρες προς τα αντίστοιχα επιτόκια 8%, 10% και 12%. Να βρεθεί το μέσο επιτόκιο χωρίς να εφαρμοσθεί ο σχετικός τύπος. (Γιατί;).

(Απ. 10%)

56. Αγόρασε κάποιος ένα ακίνητο αξίας 900.000 δρχ. Το ακίνητο είναι επιβαρημένο με ενυπόθηκο δάνειο 300.000 δρχ. προς 10%. Ο ετήσιος φόρος ανέρχεται σε 6000 δρχ. Για επισκευές και λοιπά έξοδα απαιτούνται 4000 δρχ. το χρόνο. Αν το ετήσιο εισόδημα ανέρχεται σε 100.000 δρχ., με ποιο επιτόκιο τοκίζεται το κεφάλαιο που αντιπροσωπεύει το ακίνητο;

(Απ. 6,67%)

57. Τόκισε κάποιος τό $^1/_3$ του κεφαλαίου του προς 5% και το υπόλοιπο προς 4%. Το β' τμήμα του κεφαλαίου έδωσε ετήσιο τόκο 6000 δρχ. περισσότερο του πρώτου. Ποιο ήταν το κεφάλαιο που τοκίσθηκε;

(Απ. 600.000)

58. Κεφάλαιο τοκίσθηκε επί 80 ημέρες και έγινε μαζί με τους τόκους του 30.400 δρχ. Το τοκοκεφάλαιο 30.400 δρχ. τοκίσθηκε επί 60 ημέρες με το ίδιο επιτόκιο και έγινε μαζί με τους τόκους του 30.704 δρχ. Ποιο ήταν το αρχικό κεφάλαιο και ποιο το επιτόκιο;

(Απ. 30.000 - 6%)

59. Τοκίσθηκαν τα εξής κεφάλαια: α) 7200 δρχ. επί 80 ημέρες προς 5%, β) 5600 δρχ. επί 60 ημ. προς 6% και γ) 8400 δρχ. επί 90 ημ. προς 8%. Με ποιο μέσο επιτόκιο πρέπει να τοκισθούν τα πιο πάνω κεφάλαια για τους ίδιους χρόνους, ώστε να δώσουν τον ίδιο συνολικό τόκο που θα έδιναν αν τοκίζονταν με τα δοσμένα επιτόκια;

(Απ. 6,56%)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ ΜΕ ΑΠΛΟ ΤΟΚΟ

5.1 Βασικές οικονομικοεμπορικές έννοιες και ορισμοί.

Είναι γεγονός ότι, στις εμπορικές και τραπεζικές συναλλαγές, η εξόφληση μιας χρηματικής υποχρεώσεως δεν γίνεται πάντοτε «τοις μετρητοίς» ή με επιταγή. Κατά την αγορά, λόγου χάρη, εμπορευμάτων ο αγοραστής δεν μπορεί συνήθως να καταβάλει αμέσως στον πωλητή το αντίτιμο της αξίας των εμπορευμάτων που αγόρασε. Έτσι, ο πωλητής (πιστωτής), για να εξασφαλίσει την απαίτησή του, υποχρεώνει τον αγοραστή (οφειλέτη) να υπογράψει ένα ειδικό νομικό έγγραφο με το οποίο μπορεί στο μέλλον να εισπράξει από τον οφειλέτη το οφειλόμενο χρηματικό ποσό. Ο Νόμος 5325 του 1932 έχει καθιερώσει δύο τύπους τέτοιων εγγράφων:

α) Το **Γραμμάτιο εις διαταγήν** και β) τη **Συναλλαγματική**.

Το γραμμάτιο συντάσσεται και υπογράφεται από τον οφειλέτη, ο οποίος υπόσχεται να πληρώσει ορισμένο χρηματικό ποσό, σε ορισμένο τόπο και χρόνο. Στο γραμμάτιο υπάρχουν δύο πρόσωπα:

α) Ο **εκδότης,** δηλαδή αυτός που πρέπει να πληρώσει το οφειλόμενο χρηματικό ποσό και β) ο **πιστωτής,** δηλαδή αυτός που θα εισπράξει το χρηματικό ποσό που είναι γραμμένο στο γραμμάτιο.

Στην πράξη σπάνια χρησιμοποιείται το γραμμάτιο· στη θέση του συνήθως χρησιμοποιείται η συναλλαγματική (για συντομία: συν/κή). Η συν/κή ειναι έγγραφο, το οποίο υπογράφει ο πιστωτής — ο οποίος στο εξής θα ονομάζεται **εκδότης** — και με αυτό δίνει εντολή στον οφειλέτη — ο οποίος στο εξής θα ονομάζεται **αποδέκτης** — να πληρώσει στον κομιστή του εγγράφου (ή και για λογαριασμό του), σε ορισμένο τόπο και χρόνο, το ποσό που είναι γραμμένο στη συν/κή.

Το γραμμάτιο και η συν/κή είναι **πιστωτικοί τίτλοι,** εκδίδονται συνήθως στις αγορές εμπορευμάτων που γίνονται με πίστωση ή για τακτοποίηση αμοιβαίων υποχρεώσεων και χρησιμοποιούνται πλέον σαν μέσο πληρωμών αντικαθιστώντας το χρήμα (χαρτονόμισμα).

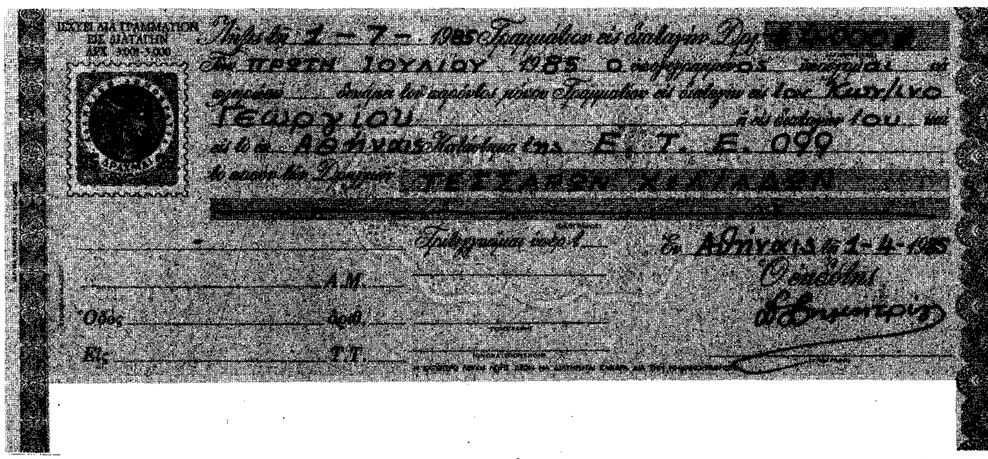
Ο Νόμος 5325 έχει εξομοιώσει το γραμμάτιο και τη συν/κή και η διαφορά τους είναι τυπική: Το γραμμάτιο εκδίδεται από τον οφειλέτη και αποτελεί υπόσχεσή του να πληρώσει στον πιστωτή του, σε ορισμένο τόπο και χρόνο, το χρηματικό ποσό που αναγράφεται στο γραμμάτιο, ενώ η συν/κή εκδίδεται από τον πιστωτή (εκδότη), ο οποίος δίνει εντολή στον οφειλέτη (αποδέκτη) να πληρώσει, σε ορισμένο τόπο και χρόνο, το χρηματικό ποσό που αναγράφεται στη συν/κή.

Οι πιο πάνω πιστωτικοί τίτλοι, για να είναι έγκυροι, πρέπει να περιέχουν ορισμένα τυπικά και ουσιαστικά στοιχεία που προβλέπει ο Νόμος 5325/1932, δηλαδή τη λέξη «Συναλλαγματική» ή «Γραμμάτιο εις διαταγήν», την εντολή για πληρωμή ορισμένου χρηματικού ποσού, τη χρονολογία και τον τόπο πληρωμής, το χρηματικό ποσό (αριθμητικώς και ολογράφως), τις υπογραφές του εκδότη και του αποδέκτη και το προβλεπόμενο από το Νόμο χαρτόσημο, το οποίο είναι συνήθως ενσωματωμένο στη συν/κή ή στο γραμμάτιο.

Η μεταβίβαση της συν/κής ή του γραμματίου από ένα έμπορο σε μια τράπεζα ή από ένα πρόσωπο σε άλλο πρόσωπο, γίνεται με ειδική νομική πράξη που ονομάζεται **οπισθογράφηση** και γίνεται στο πίσω μέρος της συν/κής (ή του γραμματίου) από τον κομιστή, σύμφωνα με το παρακάτω υπόδειγμα:

«Άντ' εμού πληρώσατε εις τον κ. Χ»
Αθήναι, 10 Μαΐου 1979
(Υπογρ.) Α. Ανδρέου

Για να καταλάβει ο αναγνώστης τη διαφορά που υπάρχει μεταξύ των δύο νομικών εγγράφων, παραθέτομε έντυπα γραμματίου και συν/κής που χρησιμοποιούνται σήμερα στις εμπορικές συναλλαγές.


ΙΣΧΥΕΙ ΔΙΑ ΓΡΑΜΜΑΤΙΟΝ ΕΙΣ ΔΙΑΤΑΓΗΝ

Λήξις τῇ 1 – 7 – 1985 Γραμμάτιον εἰς διαταγὴν Δρχ.

Τῇ ΠΡΩΤΗ ΙΟΥΛΙΟΥ 1985 ὁ ὑπογεγραμμένος

ΓΕΩΡΓΙΟΥ

εἰς τὸ ἐν ΑΘΗΝΑΙΣ Κατάστημα τῆς Ε. Τ. Ε. 099

ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΧΙΛΙΑΔΩΝ

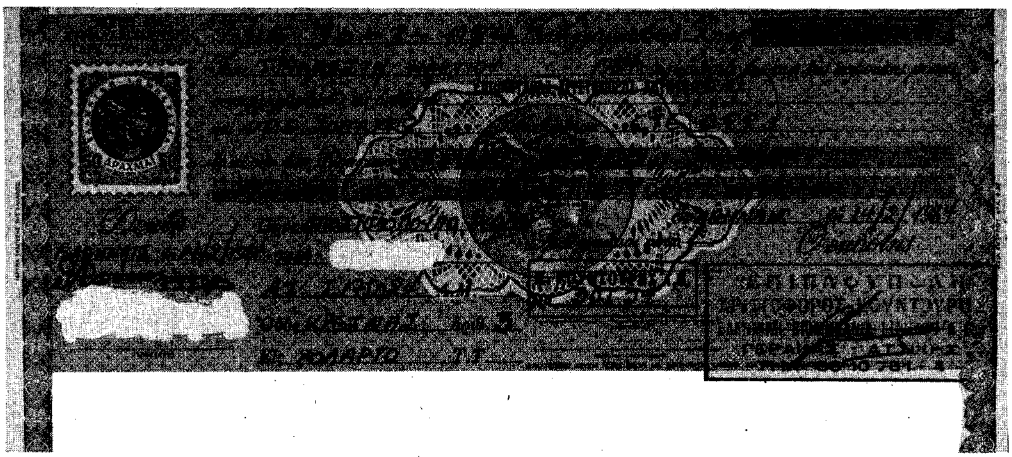
Ἐν ΑΘΗΝΑΙΣ τῇ 1-4-1985

Ὁ ἐκδότης

Α.Μ.

Ὁδὸς ἀριθ.

Εἰς Τ.Τ.



Όπως είπαμε πιο πάνω, αν και δεν υπάρχει καμιά ουσιαστική νομική διαφορά μεταξύ του «γραμματίου εις διαταγήν» και της συν/κής, εντούτοις, στην πράξη χρησιμοποιούνται, κατά κανόνα, οι συναλλαγματικές και σπανιότερα τα γραμμάτια, γιατί οι συναλλαγματικές έχουν δύο υπογραφές (την υπογραφή του εκδότη και την υπογραφή του αποδέκτη) πράγμα απαραίτητο για την **προεξόφλησή** τους από τις εμπορικές τράπεζες, δηλαδή την εξόφληση των συναλλαγματικών πριν από τη λήξη τους.

Στις εμπορικές συναλλαγές, τα «γραμμάτια εις διαταγήν» και οι συναλλαγματικές αναφέρονται συνήθως με το κοινό όνομα: **Εμπορικά Γραμμάτια** ή απλώς **Γραμμάτια.** Στα επόμενα όταν χρησιμοποιούμε τη λέξη «γραμμάτια» θα εννοούμε και τα δύο, δηλαδή τα γραμμάτια και τις συναλλαγματικές.

Για την πλήρη κατανόηση του μηχανισμού των εμπορικών γραμματίων, παραθέτομε μια συνηθισμένη οικονομική πράξη που γίνεται καθημερινώς μεταξύ των διαφόρων εμπόρων. Παραδείγματος χάρη, ο έμπορος Ε πούλησε στον πελάτη Π μια τηλεόραση, αξίας 16.000 δραχμών. Επειδή ο πελάτης Π δεν μπορεί να πληρώσει «τοις μετρητοίς» την αξία της τηλεοράσεως, υπογράφει μια συν/κή 16.500 δρχ., η οποία θα πληρωθεί τρεις μήνες μετά από την ημέρα που ο Π υπέγραψε τη συν/κή. Η ημέρα κατά την οποία θα πρέπει να πληρωθεί η συν/κή ονομάζεται **λήξη** της συν/κής. Το χρηματικό ποσό που είναι γραμμένο στη συν/κή είναι η **ονομαστική αξία** της συν/κής.

Στο παραπάνω παράδειγμα, το ποσό των 16.500 δρχ., δηλαδή η ονομαστική αξία της συν/κής, πρέπει να εισπραχθεί 90 ημέρες από την ημερομηνία εκδόσεως της συν/κής. Επομένως η ονομαστική αξία της συν/κής αποτελείται από την αξία της τηλεοράσεως συν τον τόκο των 90 ημερών. Είναι όμως πιθανό, ο έμπορος Ε να χρειασθεί χρήματα πριν από τη λήξη της συν/κής. Στην περίπτωση αυτή, ο Ε προσκομίζει τη συν/κή σε μια τράπεζα για να την «πουλήσει» και να εισπράξει τα χρήματά του, π.χ. 45 ημέρες πριν από τη λήξη της συν/κής. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η τράπεζα **προεξοφλεί** τη συν/κή του Ε, δηλαδή η τράπεζα δίνει στον Ε ένα ποσό μικρότερο των 16.500 δρχ. ελαττωμένο κατά τον τόκο των 45 ημερών. Συνεπώς, αν η τράπεζα προεξοφλήσει τη συν/κή των 16.500 δρχ., έστω προς 8% για τις υπολειπόμενες 45 ημέρες, θα δώσει στον Ε το ποσό των 16.335 δρχ.

Το ποσό των 16.335 δρχ. ονομάζεται **παρούσα** (ή πραγματική) αξία της συν/κής. Το ποσό των 165 δραχμών που κράτησε η τράπεζα και που είναι ουσιαστικά ο τόκος των 16.500 δραχμών για τις 45 ημέρες πριν από τη λήξη της συν/κής, ονομάζεται **προεξόφλημα ή υφαίρεση.** Η οικονομική πράξη που έγινε ονομάζεται **προεξόφληση** (αγγλικά: Discount).

Στο πιο πάνω παράδειγμα, το ποσό των 165 δρχ., που είναι ο τόκος της ονομαστικής αξίας της συν/κής, ονομάζεται ειδικότερα **εξωτερικό προεξόφλημα.** Η τράπεζα όμως κράτησε τόκο περισσότερο από τον κανονικό· η τράπεζα θα έπρεπε να δώσει στον έμπορο Ε ένα ποσό Α, τέτοιο ώστε αφού αυξηθεί κατά τον τόκο των 45 ημερών προς 8% να είναι ίσο με την ονομαστική αξία της συν/κής, ήτοι:

$$A + \frac{A \times 45}{4500} = 16.500, \text{ δηλαδή} \quad A = 16.337$$

Συνεπώς, η τράπεζα θα έπρεπε να είχε κρατήσει για προεξόφλημα 163 (= 16.500 – 16.337) δραχμές και όχι 165 δραχμές.

$$\text{Το ποσό των } 163 \left(= \frac{16.337 \times 45}{4500}\right) \text{ δραχμών}$$

το οποίο αποτελεί τον τόκο της παρούσας αξίας της συν/κής, ονομάζεται **εσωτερικό προεξόφλημα.**

Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτουν οι επόμενοι βασικοί ορισμοί στην προεξόφληση:

— **Ονομαστική (ή μέλλουσα) αξία ενός γραμματίου (ή μιας συν/κής), ονομάζεται το ποσό που πρέπει να πληρωθεί κατά τη λήξη της συν/κης (ή του γραμματίου).**

— **Παρούσα (ή πραγματική) αξία μιας συν/κης (ή ενός γραμματίου), ονομάζεται το ποσό που πρέπει να πληρωθεί σε μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή πριν από τη λήξη της συν/κής (ή του γραμματίου).**

— **Προεξόφλημα (ή υφαίρεση)** καλείται το ποσό που κρατάει η τράπεζα κατά την προεξόφληση. Ειδικότερα:

— **Εξωτερικό προεξόφλημα** είναι ο τόκος της ονομαστικής αξίας μιας συν/κής ή ενός γραμματίου.

— **Εσωτερικό προεξόφλημα** είναι ο τόκος της παρούσας αξίας μιας συν/κής ή ενός γραμματίου.

Έχουμε τρία είδη προεξοφλήσεων:

1) **Εξωτερική προεξόφληση,** δηλαδή απλός τόκος της ονομαστικής αξίας μιας συν/κής.

2) **Εσωτερική προεξόφληση,** δηλαδή απλός τόκος της παρούσας αξίας μιας συν/κης και

3) **Προεξόφληση με ανατοκισμό,** η οποία εφαρμόζεται σε μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις.

Η εξωτερική προεξόφληση, αν και είναι άδικη γι' αυτόν που δίνει στην τράπεζα συν/κές για προεξόφληση, ωστόσο εφαρμόζεται κατά κανόνα στις τράπεζες, επειδή είναι εύκολη στους υπολογισμούς. Σε όλες τις χώρες της Ευρώπης — εκτός από την Αγγλία και την Ολλανδία — και στην Ελλάδα, οι τράπεζες χρησιμοποιούν την εξωτερική προεξόφληση.

Στο παρόν κεφάλαιο, θα σπουδάσομε, θεωρητικώς και πρακτικώς, τα δύο πρώτα είδη προεξοφλήσεων. Για τη θεωρητική θεμελίωση, βασική προϋπόθεση είναι ότι και στα δύο είδη προεξοφλήσεων ισχύει η θεμελιώδης ισότητα:

Ονομαστική Αξία = Παρούσα Αξία + Προεξόφλημα

Αν παραστήσομε με τα σύμβολα:

Κ = ονομαστική αξία συν/κής

Α = παρούσα αξία συν/κής (εξωτερικώς)

Ε = εξωτερικό προεξόφλημα

$\mathbf{A_1}$ = παρούσα αξία (εσωτερικώς)

$\mathbf{E_1}$ = εσωτερικό προεξόφλημα, τότε η μεν έννοια της **εξωτερικής προεξοφλήσεως** αποδίδεται με την εξίσωση:

$$A = K - E,$$

η δε έννοια της **εσωτερικής προεξοφλήσεως** αποδίδεται με την εξίσωση:

$$A_1 + E_1 = K.$$

Το επιτόκιο με το οποιο γίνεται η προεξόφληση των συν/κων (ή και γραμματίων) από τις εμπορικές τράπεζες, ονομάζεται **προεξοφλητικό επιτόκιο.** Το ύψος του προεξοφλητικού επιτοκίου καθορίζεται από το Διοικητικό Συμβούλιο της Εκδοτικής Τράπεζας (Τράπεζα της Ελλάδος) και αποτελεί το βασικό επιτόκιο υπολογισμού στις εμπορικές και τραπεζικές συναλλαγές. Το προεξοφλητικό επιτόκιο που ισχύει σήμερα κυμαίνεται από 13% ως 18%.

Οι τράπεζες, κατά την προεξόφληση, εκτός από το προεξόφλημα, κρατουν και διάφορες προμήθειες οι οποίες υπολογίζονται ως ποσοστό «επί τοις εκατόν (%) ή τοις χιλίοις (‰)» της ονομαστικής αξίας. Επίσης, κρατουν το χαρτόσημο που προβλέπει ο νόμος καθώς και διάφορα άλλα έξοδα, όπως: ταχυδρομικά τέλη, τηλεγραφικά, έξοδα αποστολης και εισπράξεως χρημάτων, κ.ά.

Για τον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερων, υπάρχουν διάφορες συνήθειες, οι οποίες κατά κανόνα ειναι προς το συμφέρον των τραπεζών. Οι συνήθειες αυτές μεταβάλλονται από τράπεζα σε τράπεζα, αλλά γενικά ισχύουν τα εξής:

α) Ποσό που παρέχεται από μια τράπεζα φέρει τόκο από την ημέρα που χορηγήθηκε από την τράπεζα, με τη δικαιολογία ότι η τράπεζα ειχε τα χρήματα διαθέσιμα πριν από μία ή δύο ημέρες. Ποσό που καταθέτεται σε μια τράπεζα φέρει τόκο από την επόμενη ημέρα, γιατί η τράπεζα από την επόμενη ημέρα μπορεί να τοκίσει τα χρήματα.

β) Για την προεξόφληση συναλλαγματικων και γραμματίων, οι τράπεζες υπολογίζουν ως τοκοφόρες ημέρες και την ημέρα που γίνεται η προεξόφληση (γιατί πρέπει να έχουν τα χρήματα από την προηγούμενη ημέρα) και την ημέρα που λήγουν οι συν/κές (γιατί τα χρήματα που θα εισπράξουν θα τα τοκίσουν από την επόμενη ημέρα της λήξεως των συν/κων).

Τα προβλήματα τα οποία θα εξετάσομε στις επόμενες παραγράφους ειναι τα εξής:

1) Η εύρεση του προεξοφλήματος από την ονομαστική αξία.

2) Η εύρεση του προεξοφλήματος από την παρούσα αξία.

3) Η εύρεση της παρούσας αξίας όταν είναι γνωστή η ονομαστική αξία (χωρίς έξοδα και με έξοδα).

4) Η εύρεση της ονομαστικης αξίας όταν είναι γνωστή η παρούσα αξία (χωρίς έξοδα και με έξοδα).

5) Η εύρεση του χρόνου, του επιτοκίου και του πραγματικού επιτοκίου προεξοφλήσεως.

6) Πινάκιο προεξοφλήσεως.

5.2 Υπολογισμός του προεξοφλήματος όταν είναι γνωστή η ονομαστική αξία.

Όπως είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο, το προεξόφλημα διακρίνεται σε **εξωτερικό** και **εσωτερικό**. Επομένως, το προεξόφλημα θα υπολογησθεί κατά δύο τρόπους:

Α'. Εξωτερικώς, δηλαδή με εξωτερική προεξόφληση. Επειδή το εξωτερικό προεξόφλημα (= Ε) είναι ο τόκος της ονομαστικής αξίας (= Κ), συμπεραίνομε ότι αυτό θα υπολογισθεί αν εφαρμόσομε ένα από τους παρακάτω τύπους:

$$E = K \cdot n \cdot i \quad \text{όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη} \quad (9)$$

$$E = \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12} \quad \text{όταν ο χρόνος δίνεται σε μήνες} \quad (9\alpha)$$

$$E = \frac{K \cdot v \cdot i}{360 \text{ ή } 365} \quad \text{όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες} \quad (9\beta)$$

$$E = \frac{K \cdot v}{\Delta} = \frac{N}{\Delta} \quad \text{με τους σταθερούς διαιρέτες.} \quad (9\gamma)$$

Β'. Εσωτερικώς, δηλαδή με εσωτερική προεξόφληση. Επειδή το εσωτερικό προεξόφλημα είναι ο τόκος της παρούσας αξίας, δηλαδή:

$$E_1 = \frac{A_1 \cdot v \cdot i}{360 \text{ ή } 365} \quad \text{ή} \quad E_1 = \frac{A_1 \cdot v}{\Delta}$$

βρίσκομε πρώτα την παρούσα αξία συναρτήσει της ονομαστικής αξίας και έπειτα, αφού υπολογίσομε τον τόκο της, βρίσκομε το εσωτερικό προεξόφλημα.

Από τη βασική σχέση: $A_1 + E_1 = K$ προκύπτει $A_1 = K - E_1$. Αντικαθιστώντας το E_1 με το ίσο του $\frac{A_1 \cdot v}{\Delta}$ έχομε:

$$A_1 = K - \frac{A_1 \cdot v}{\Delta} \text{ ή } A_1\Delta = K\Delta - A_1 v \text{ ή } A_1 (\Delta + v) = K\Delta$$

Και $A_1 = \frac{K\Delta}{\Delta + v}$. Υπολογίζομε τώρα τον τόκο του τελευταίου ποσού και έχομε:

$$A_1 \cdot \frac{v}{\Delta} = \frac{K\Delta}{\Delta + v} \cdot \frac{v}{\Delta} = \frac{Kv}{\Delta + v} = E_1$$

Ώστε:

$$E_1 = \frac{K \cdot v}{\Delta + v} \quad (10)$$

Με τον τύπο (10) υπολογίζομε το εσωτερικό προεξόφλημα όταν γνωρίζομε την ονομαστική αξία. Αν το επιτόκιο δεν είναι κατάλληλο για σταθερό διαιρέτη, τότε εφαρμόζεται ο τύπος:

$$E_1 = \frac{K \cdot v \cdot i}{360 + v \cdot i} \quad \text{ή} \quad E_1 = \frac{K \cdot v \cdot i}{365 + v \cdot i} \qquad (10\alpha)$$

Αν ο χρόνος δίνεται σε μήνες, τότε:

$$E_1 = \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12 + \mu \cdot i} \qquad (10\beta)$$

Παράδειγμα 1ο. Συναλλαγματική, ονομαστικής αξίας 12.000 δρχ., προεξοφλήθηκε τρεις μήνες πριν από τη λήξη της προς 8%. Να υπολογισθεί το εξωτερικό και το εσωτερικό προεξόφλημα.

Λύση. $K = 12.000$, $\mu = 3$, $i = 0{,}08$, $E = ;$ $E_1 = ;$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στον τύπο (9α) βρίσκομε το εξωτερικό προεξόφλημα:

$$E = \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12} = \frac{12.000 \times 3 \times 0{,}08}{12} = 240 \text{ δρχ.}$$

Αντικαθιστώντας πάλι τα δεδομένα στον τύπο (10 β) βρίσκομε το εσωτερικό προεξόφλημα:

$$E_1 = \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12 + \mu \cdot i} = \frac{12.000 \times 3 \times 0{,}08}{12 + 3 \times 0{,}08} = 235{,}30 \text{ δρχ.}$$

Παράδειγμα 2ο. Συναλλαγματική, ονομαστικής αξίας 10.000 δρχ., η οποία λήγει την 20 Απριλίου, προεξοφλήθηκε στις 19 Φεβρουαρίου του ιδίου έτους προς 6%. Να υπολογισθεί το εξωτερικό και το εσωτερικό προεξόφλημα. Έτος υπολογισμού μεικτό.

Λύση. $K = 10.000$, $v = 60$, $i = 0{,}06$, $E = ;$ $E_1 = ;$

α) Το εξωτερικό προεξόφλημα θα υπολογισθεί βάσει του τύπου (9β) ή του τύπου (9γ).

$$E = \frac{K \cdot v \cdot i}{360} = \frac{10.000 \times 60 \times 0{,}06}{360} = 100 \text{ δρχ.}$$

ή

$$E = \frac{K \cdot v}{\Delta} = \frac{10.000 \times 60}{6000} = 100 \text{ δρχ.}$$

β) Το εσωτερικό προεξόφλημα θα βρεθεί από τον τύπο (10) ή (10α).

$$E_1 = \frac{K \cdot \nu}{\Delta + \nu} = \frac{10.000 \times 60}{6000 + 60} = 99 \text{ δρχ.}$$

ή

$$E_1 = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360 + \nu \cdot i} = \frac{10.000 \times 60 \times 0{,}06}{360 + 60 \times 0{,}06} = 99 \text{ δρχ.}$$

Παρατήρηση 1η. Αν στον τύπο $E = K\nu/\Delta$ θέσομε $\nu = \Delta$, τότε προκύπτει $E = K$. Εξάλλου, αν $\nu > \Delta$, τότε θα είναι και $E > K$. Δηλαδή: αν ο αριθμός των τοκοφόρων ημερών είναι ίσος (ή και μεγαλύτερος) με το σταθερό διαιρέτη, τότε το εξωτερικό προεξόφλημα είναι ίσο (ή μεγαλύτερο) με την ονομαστική αξία ενός γραμματίου.

Από τα παραπάνω συμπεραίνομε ότι η εξωτερική προεξόφληση είναι άδικη για τον κομιστή γραμματίων και συν/κών, γιατί η τράπεζα υπολογίζει τον τόκο (που κρατάει κατά την προεξόφληση) επί της ονομαστικής αξίας των γραμματίων και συν/κών, ενώ θα έπρεπε να τον υπολογίζει επί της παρούσας αξίας.

Η εξωτερική προεξόφληση οδηγεί και σε άτομα, γιατί αν προεξοφλήσει κάποιος ένα γραμμάτιο, ονομαστικής αξίας 6000 δρχ., προς 10%, θεωρητικώς 3600 ημέρες πριν από τη λήξη του, τότε ο κομιστής του γραμματίου δεν εισπράττει χρήματα, διότι το εξωτερικό προεξόφλημα είναι ίσο με την ονομαστική αξία του γραμματίου. Πράγματι:

$$E = \frac{K \cdot \nu}{\Delta} = \frac{6000 \times 3600}{3600} = 6000 = K$$

Παρατήρηση 2η. Αν στον τύπο $E_1 = \dfrac{K \cdot \nu}{\Delta + \nu}$ θέσομε όπου $\nu = \Delta$, τότε, επειδή

$\dfrac{\nu}{\Delta + \nu} < 1$, συμπεραίνομε ότι θα είναι πάντοτε $E_1 < K$. Αν π.χ. προεξοφλήσομε συν/κή, ονομαστικής αξίας 10.000 δρχ. 4000 ημέρες πριν από τη λήξη της προς 9%, το εσωτερικό προεξόφλημα θα είναι:

$$E_1 = \frac{K \cdot \nu}{\Delta + \nu} = \frac{10.000 \times 4000}{4000 + 4000} = \frac{10.000}{2} = 5000.$$

Από την παραπάνω θεωρητική και πρακτική διερεύνηση συμπεραίνομε ότι η εσωτερική προεξόφληση είναι δικαιότερη από την εξωτερική προεξόφληση. Στην πράξη εφαρμόζεται η εξωτερική προεξόφληση για δυο λόγους: α) Η εξωτερική προεξόφληση παρέχει ευχέρεια στους υπολογισμούς. β) Οι τράπεζες προεξοφλούν γραμμάτια και συν/κές που λήγουν σε μικρό χρονικό διάστημα, οπότε η διαφορά μεταξύ του εξωτερικού και του εσωτερικού προεξοφλήματος είναι ασήμαντος, όπως, θα δούμε πιο κάτω.

5.3 Διαφορά των δύο προεξοφλημάτων.

Στην προηγούμενη παράγραφο είπαμε, ότι το εξωτερικό και το εσωτερικό προεξόφλημα υπολογίζονται βάσει των αντιστοίχων τύπων:

$$E = \frac{K \cdot v}{\Delta} \quad \text{καί} \quad E_1 = \frac{K \cdot v}{\Delta + v}$$

Επειδή το εξωτερικό προεξόφλημα είναι πάντοτε μεγαλύτερο από το εσωτερικό ($E > E_1$), αν σχηματίσομε τη διαφορά τους θα έχομε:

$$E - E_1 = \frac{K \cdot v}{\Delta} - \frac{K \cdot v}{\Delta + v} = \frac{K \cdot v(\Delta + v) - K \cdot v \cdot \Delta}{\Delta(\Delta + v)} =$$

$$= \frac{K \cdot v \cdot \Delta + K \cdot v \cdot v - K \cdot v \cdot \Delta}{\Delta(\Delta + v)} = \frac{K \cdot v \cdot v}{\Delta(\Delta + v)}$$

Συνεπώς, η διαφορά των δύο προεξοφλημάτων αποδίδεται με τη σχέση:

$$E - E_1 = \frac{K \cdot v \cdot v}{\Delta(\Delta + v)} \qquad (11)$$

Αν τώρα η σχέση (11) γραφεί με τη μορφή

$$E - E_1 = \frac{K \cdot v}{\Delta + v} \cdot \frac{v}{\Delta} = E_1 \cdot \frac{v}{\Delta}$$

τότε λέμε ότι: **η διαφορά των δύο προεξοφλημάτων ισούται με το εξωτερικό προεξόφλημα του εσωτερικού προεξοφλήματος.**

Εξάλλου, η σχέση (11) μπορεί να γραφεί και με τη μορφή:

$$E - E_1 = \frac{K \cdot v}{\Delta} \cdot \frac{v}{\Delta + v} = E \cdot \frac{v}{\Delta + v}$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνομε ότι: **η διαφορά των δύο προεξοφλημάτων ισούται με το εσωτερικό προεξόφλημα του εξωτερικού προεξοφλήματος.**

Παράδειγμα 1ο. Συναλλαγματική, ονομαστικής αξίας 10.000 δρχ., προεξοφλήθηκε 40 ημέρες πριν από τη λήξη της προς 9%. Ποια είναι η διαφορά των δύο προεξοφλημάτων;

Λύση. $K = 10.000, \quad v = 40, \quad i = 0{,}09, \quad \Delta = 4000$

$$E - E_1 = \frac{K \cdot v}{\Delta} \cdot \frac{v}{\Delta + v} = \frac{10.000 \times 40}{4000} \times \frac{4}{4040} =$$

$$=100 \times \frac{1}{101} = 0{,}99.$$

Παράδειγμα 2ο. Συναλλαγματική η οποία λήγει την 11 Απριλίου προεξοφλήθηκε στις 10 Φεβρουαρίου προς 6%. Ποια ειναι η ονομαστική αξία της συν/κης, αν ειναι γνωστό ότι η διαφορά των δύο προεξοφλημάτων ειναι ίση με 0,50;

Λύση. $v = 60$, $i = 0{,}06$, $\Delta = 6000$, $E - E_1 = 0{,}50$
Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (11) και έχομε:

$$E - E_1 = \frac{K \cdot v \cdot v}{\Delta(\Delta + v)} \quad \text{ή} \quad 0{,}50 = \frac{K \times 60 \times 60}{6000 \times 6060} = \frac{K}{100} \times \frac{1}{101}$$

ή $K = 0{,}5 \times 100 \times 101 = 5050$

$$\text{Επαλήθευση: } E - E_1 = \frac{5050 \times 60}{6000} \times \frac{60}{6060} = \frac{5050}{100} \times \frac{1}{101} =$$

$$= 50{,}5 \times 0{,}0099 \approx 0{,}50.$$

5.4 Υπολογισμός του προεξοφλήματος όταν είναι γνωστή η παρούσα αξία.

Α' Εξωτερικώς. Γνωρίζομε ότι το εξωτερικό προεξόφλημα είναι ο τόκος της ονομαστικης αξίας. Επομένως, αν βρούμε την ονομαστική αξία από την παρούσα αξία και υπολογίσομε τον τόκο της, τότε βρίσκομε και το εξωτερικό προεξόφλημα.

Από τη βασική σχέση $K = A + E$ έχομε:

$$A = K - E \quad \text{ή} \quad A = K - \frac{K \cdot v}{\Delta} \quad \text{ή} \quad A\Delta = K\Delta - Kv = K(\Delta - v)$$

και $K = \dfrac{A\Delta}{\Delta - v}$. Υπολογίζοντας τώρα τον τόκο του τελευταίου ποσού, βρίσκομε τον τύπο υπολογισμού του εξωτερικού προεξοφλήματος, όταν ειναι γνωστή η παρούσα αξία.

Έχομε:

$$E = K \cdot \frac{v}{\Delta} = \frac{A \cdot \Delta}{\Delta - v} \cdot \frac{v}{\Delta} \quad \text{καί} \quad \mathbf{E = \frac{A \cdot v}{\Delta - v}} \qquad \mathbf{(12)}$$

Αν το επιτόκιο δεν ειναι κατάλληλο για σταθερό διαιρέτη, τότε εφαρμόζεται ο τύπος:

$$\mathbf{E = \frac{A \cdot v \cdot i}{360 - v \cdot i}} \quad \text{ή} \quad \mathbf{E = \frac{A \cdot v \cdot i}{365 - v \cdot i}} \qquad \mathbf{(12\alpha)}$$

Αν ο χρόνος δίνεται σε μηνες, τότε:

$$E = \frac{A \cdot \mu \cdot i}{12 - \mu \cdot i} \qquad (12\beta)$$

Β' Εσωτερικώς. Αφού το εσωτερικό προεξόφλημα ειναι ο τόκος της παρούσας αξίας, προκύπτει ότι:

$$E_1 = \frac{A \cdot v}{\Delta} \qquad (13)$$

Αν το επιτόκιο δεν δίνει σταθερό διαιρέτη, τότε το εσωτερικό προεξόφλημα υπολογίζεται βάσει του τύπου:

$$E_1 = \frac{A \cdot v \cdot i}{360 \text{ ή } 365} \qquad (13\alpha)$$

Αν ο χρόνος εκφράζεται σε μήνες, τότε:

$$E_1 = \frac{A \cdot \mu \cdot i}{12} \qquad (13\beta)$$

Παράδειγμα 1ο. Γραμμάτιο που προεξοφλήθηκε τρεις μήνες πριν από τη λήξη του έδωσε παρούσα αξία 5.865 δρχ. Να βρεθει το εξωτερικό και το εσωτερικό προεξόφλημα.

Λύση. $\mu = 3$, $i = 0{,}09$, $A = 5.865$, $E = ;$ $E_1 = ;$
Εφαρμόζοντας τους τύπους (12β) και (13β) βρίσκομε:

$$E = \frac{A \cdot \mu \cdot i}{12 - \mu \cdot i} = \frac{5.865 \times 3 \times 0{,}09}{12 - 3 \times 0{,}09} = 135 \text{ δρχ.}$$

$$E_1 = \frac{A \cdot \mu \cdot i}{12} = \frac{5.865 \times 3 \times 0{,}09}{12} \approx 132 \text{ δρχ.}$$

Παράδειγμα 2ο. Συναλλαγματική που προεξοφλήθηκε 60 ημέρες πριν από τη λήξη της προς 6%, έδωκε παρούσα αξία 11.880 δρχ. Ζητουνται: α) Το εξωτερικό και εσωτερικό προεξόφλημα και β) η ονομαστική αξία της συν/κης.

Λύση. $v = 60$, $i = 0{,}06$, $A = 11.880$, $E = ;$ $E_1 = ;$ $K = ;$

$$E = \frac{A \cdot v}{\Delta - v} = \frac{11.880 \times 60}{6000 - 60} = \frac{2 \times 5940 \times 60}{5940} = 120 \text{ δρχ.}$$

$$E_1 = \frac{A \cdot v}{\Delta} = \frac{11.880 \times 60}{6000} = \frac{11.880}{100} = 118{,}80 \text{ δρχ.}$$

Από τις σχέσεις: $K = A + E$ και $A + E_1 = K$, θα βρουμε την ονομαστική αξία της συν/κής.
$K = 11.880 + 120 = 12.000$ και $11.880 + 118{,}80 = 11.998{,}80 = K$.

5.5 Εύρεση της παρούσας αξίας όταν είναι γνωστή η ονομαστική αξία.

Η εύρεση της παρούσας αξίας μιας συν/κής (ή γραμματίου), όταν είναι γνωστή η ονομαστική αξία, γίνεται κατά τους επόμενους τρόπους:

Α΄ Εξωτερικως.

α) Χωρίς έξοδα. Στην περίπτωση αυτή, για να βρούμε την παρούσα αξία μιας συν/κής από την ονομαστική αξία της, αρκεί να αφαιρέσομε από την ονομαστική αξία το εξωτερικό προεξόφλημα, δηλαδή βάσει του τύπου:

$$A = K - E = K - \frac{K \cdot v}{\Delta} \qquad (14)$$

Παράδειγμα. Ποια είναι η παρούσα αξία συν/κής, ονομαστικής αξίας 6000 δρχ., η οποία προεξοφλήθηκε (εξωτερικώς) 75 ημέρες πριν από τη λήξη της προς 12%; (Έτος εμπορικό).

Λύση. $A = ;$ $K = 6000,$ $v = 75,$ $i = 0{,}12,$ $\Delta = 3000$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στον τύπο (14) έχομε:

$$A = K - \frac{K \cdot v}{\Delta} = 6000 - \frac{6000 \times 75}{3000} = 5850 \text{ δρχ.}$$

β) Με έξοδα. Όπως είπαμε και στην παράγραφο 8.1 του παρόντος κεφαλαίου, οι τράπεζες, κατά την προεξόφληση των συν/κών (και γραμματίων), δεν κρατούν μόνο τον τόκο των ημερών πριν από λήξη των συν/κών, αλλά και διάφορα άλλα ποσά, όπως: προμήθειες, ταχυδρομικά, εισπρακτικά, κ.ά. καθώς και το νόμιμο χαρτόσημο. Παριστάνομε την προμήθεια με το **θ**, τα διάφορα έξοδα με το **ε** και το χαρτόσημο με το **x**. Το χαρτόσημο υπολογίζεται εφάπαξ· η προμήθεια και τα έξοδα υπολογίζονται ως ποσοστό «επί τοις εκατόν ή τοις χιλίοις» της ονομαστικής αξίας, δηλαδή:

Στις 100 δρχ. έχομε $\theta + \epsilon$
Στις K δρχ. έχομε x ;

Άρα: $$x = K \cdot \frac{\theta + \epsilon}{100}$$

Στην προκειμένη περίπτωση, η παρούσα αξία μιας συν/κής θα βρεθεί αν από την ονομαστική αξία αφαιρέσομε: το προεξόφλημα, την προμήθεια, τα διάφορα έξοδα και το νόμιμο χαρτόσημο. Συνεπώς, η παρούσα αξία θα υπολογισθεί βάσει του τύπου:

$$A = K - \frac{K \cdot v}{\Delta} - K \cdot \frac{\theta + \epsilon}{100} - x \qquad (15)$$

Αν το πρόβλημα αναφέρει έτος υπολογισμού το πολιτικό, τότε θέτομε όπου $\Delta = 365/i$ και ο τύπος (15) τροποποιείται ανάλογα.

Σημείωση. Οι τράπεζες συνήθως κρατούν προμήθεια που υπολογίζεται για κάθε μήνα προεξοφλήσεως, αλλά και για τμήμα του μήνα υπολογίζουν προμήθεια για ολόκληρο μήνα. Αν, π.χ. προεξοφλείται συν/κή 70 ημέρες πριν από τη λήξη της και η τράπεζα κρατά προμήθεια $^1/_4$% κατά μήνα και για ολόκληρο μήνα, τότε η προμήθεια θα υπολογισθεί για τρεις μήνες, ήτοι: $^1/_4\% \times 3 = {}^3/_4\%$. Επίσης, τα έξοδα υπολογίζονται κατά εκατοντάδα και για ολόκληρη εκατοντάδα ή κατά χιλιάδα και για ολόκληρη χιλιάδα. Αν π.χ., η τράπεζα υπολογίζει έξοδα 1 δρχ. κατά χιλιάδα και για ολόκληρη χιλιάδα και η ονομαστική αξία της συν/κης είναι 14.300 δρχ., τότε θα υπολογισθούν έξοδα 15 δρχ., δηλαδή για το ποσό των 15.000 δρχ.

Παράδειγμα. Συναλλαγματική, ονομαστικής αξίας 20.600 δρχ., προεξοφλείται 45 ημέρες πριν από τη λήξη της, εξωτερικώς, προς 8%. Η τράπεζα κράτησε: προμήθεια $^1/_4$% κατά μήνα και για ολόκληρο μήνα, διάφορα έξοδα 2 δραχμές κατά χιλιάδα και για ολόκληρη χιλιάδα και 30 δρχ. για χαρτόσημο. Ερωτάται: Ποιο είναι το καθαρό ποσό που εισπράχθηκε;

Λύση. $K = 20.600 \quad v = 45 \quad i = 0{,}08 \quad \Delta = 4.500$

$\theta = {}^1/_4\% \times 2 \quad \epsilon = 2‰ \quad x = 30 \quad A = ;$

α) Εφαρμόζοντας τον τύπο (15) έχομε:

$$A = K - \frac{K \cdot v}{\Delta} - K \cdot \frac{\theta + \epsilon}{100} - x$$

ή

$$A = 20.600 - \frac{20.600 \times 45}{4500} - \frac{20.600 \times 0{,}5}{100} - \frac{21.000 \times 2}{1000} - 30$$

$$= 20.600 - (206 + 103 + 42 + 30) = 20.219 \text{ δρχ.}$$

Ώστε: $\boxed{A = 20.219}$

β) Πρακτικώς. Στην τραπεζική πρακτική, οι πράξεις έχουν συνήθως την ακόλουθη διάταξη:

Ονομαστική αξία συν/κής		20.600
μείον προεξόφλημα 45 ημ. προς 8%	206	
μείον προμήθεια $^1/_4$ % × 2 × 20.600	103	
μείον έξοδα 2‰ × 21.000	42	
μείον χαρτόσημο	30	
	381	—381
Άρα: καθαρό ποσό που εισπράχθηκε:		20.219

Β΄ Εσωτερικώς. Γνωρίζομε ότι: όταν στην παρούσα αξία προσθέσομε το εσωτερικό προεξόφλημα, τότε προκύπτει η ονομαστική αξία. Δηλαδή:

$$A_1 + \frac{A_1 \cdot v}{\Delta} = K$$

Λύνοντας τώρα ως προς A_1 βρίσκομε τον τύπο:

$$\mathbf{A_1 = \frac{K \cdot \Delta}{\Delta + v}} \qquad \mathbf{(16)}$$

Με τον τύπο (16) υπολογίζομε την παρούσα αξία (εσωτερικώς), όταν ειναι γνωστή η ονομαστική αξία.

Παράδειγμα. Γραμμάτιο, ονομαστικής αξίας 5304 δρχ. προεξοφλειται εσωτερικώς 73 ημέρες προτού λήξει προς 10%. Ποια ειναι η παρούσα του αξία; Έτος πολιτικό.

Λύση. $K = 5304$, $\quad v = 73$, $\quad i = 0,10$, $\quad A_1 = ;$
Αν στον τύπο (16) θέσομε όπου $\Delta = 365/i$, τότε προκύπτει ο τύπος:

$$A_1 = \frac{365 \cdot K}{365 + v \cdot i}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα βρίσκομε την παρούσα αξία.

$$A_1 = \frac{365 \times 5304}{365 + 73 \times 0,10} = 5200 \text{ δρχ.}$$

Παρατήρηση. Γνωρίζομε ότι η παρούσα αξία υπολογίζεται βάσει των τύπων:

Εξωτερικως: $$A = K - \frac{K \cdot v}{\Delta} = \frac{K(\Delta - v)}{\Delta} \qquad (α)$$

Εσωτερικως: $$A_1 = K - \frac{K \cdot v}{\Delta + v} = \frac{K\Delta}{\Delta + v} \qquad (β)$$

Αφαιρουμε κατά μέλη τις σχέσεις (α) και (β), οπότε:

$$A_1 - A = \frac{K\Delta}{\Delta + v} - \frac{K(\Delta - v)}{\Delta} = \frac{K\Delta^2 - K(\Delta - v)(\Delta + v)}{(\Delta + v)\,\Delta} =$$

$$= \frac{K\Delta^2 - K\Delta^2 + K\Delta v - K\Delta v + Kvv}{(\Delta + v)\Delta} = \frac{Kvv}{(\Delta + v)\Delta} = E - E_1$$

Ώστε: Η διαφορά των παρουσών αξιών είναι ίση με τη διαφορά των δύο προεξοφλημάτων.

5.6 Εύρεση της ονομαστικής αξίας όταν είναι γνωστή η παρούσα αξία.

Αν και η εύρεση της ονομαστικής αξίας μιας συν/κής από την παρούσα αξία της, εκ πρώτης όψεως, φαίνεται ότι έχει μόνο θεωρητική αξία, εντούτοις, η περίπτωση αυτή συναντάται πολύ στην πράξη, γιατί είναι πιθανό ο αποδέκτης (οφειλέτης) π.χ. μιας συν/κής να μην μπορέσει να την πληρώσει κατά τη λήξη της, οπότε ο εκδότης (πιστωτής), ή και ο τυχόν κομιστής της συν/κής, αναγκάζεται να εκδώσει άλλη συν-/κή, μεταγενέστερης λήξεως, εις βάρος του οφειλέτη. Η νέα συν/κή ονομάζεται **επισυναλλαγματική** και η ονομαστική της αξία θα είναι, φυσικά, μεγαλύτερη από την ονομαστική αξία της αρχικής συν/κής, ώστε αν ο κομιστής της επισυναλλαγματικής θελήσει να την προεξοφλήσει να εισπράξει τελικώς το οφειλόμενο αρχικώς χρηματικό ποσό. Η ονομαστική αξία της παλαιάς συν/κής θεωρείται πλέον παρούσα αξία της επισυναλλαγματικής.

Παρακάτω εξετάζομε, θεωρητικώς αλλά και πρακτικώς, την εύρεση της ονομαστικής αξίας, όταν είναι γνωστή η παρούσα αξία, χωρίς έξοδα και με έξοδα.

Α΄ Εξωτερικώς.

α) Χωρίς έξοδα: Εξ ορισμού είναι:

$$A = K - E \quad \text{ή} \quad A = K - \frac{K \cdot v}{\Delta} = K\left(1 - \frac{v}{\Delta}\right)$$

Λύνοντας τώρα ως προς Κ έχομε:

$$K = \frac{A}{1 - \dfrac{v}{\Delta}} = \frac{A \cdot \Delta}{\Delta - v} \qquad \textbf{(17)}$$

Εξάλλου, ο τύπος (17), κατά το γνωστό από την Άλγεβρα ανάπτυγμα:

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ (για $0 < x < 1$), γράφεται και ως εξής:

$$K = A \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{v}{\Delta}} = A\left[1 + \frac{v}{\Delta} + \frac{v}{\Delta} \cdot \frac{v}{\Delta} + \frac{v}{\Delta}\left(\frac{v}{\Delta} \cdot \frac{v}{\Delta}\right) + \ldots\right]$$

ή

$$K = A + \frac{Av}{\Delta} + \frac{Av}{\Delta} \cdot \frac{v}{\Delta} + \left(\frac{Av}{\Delta} \cdot \frac{v}{\Delta}\right)\frac{v}{\Delta} + \ldots \qquad (17\alpha)$$

Από τον τύπο (17α) συμπεραίνεται ότι, για να βρούμε την ονομαστική αξία μιας επισυναλλαγματικής, αρκεί να προσθέσομε στην παρούσα αξία της συναλλαγματικής, τον τόκο της και τον τόκο του τόκου της κ.ο.κ. Η περίπτωση αυτή εφαρμόζεται πάρα πολύ στην πράξη.

Παράδειγμα. Συναλλαγματική, ονομαστικής αξίας 35.640 δρχ., η οποία λήγει σήμερα δεν εξοφλείται. Για την είσπραξή της εκδίδεται επισυναλλαγματική η οποία λήγει μετά 60 ημέρες από σήμερα. Η επισυν/κή προεξοφλείται την ίδια μέρα, εξωτερικώς, προς 6%. Ποια είναι η ονομαστική αξία της επισυναλλαγματικής;

Λύση. Η ονομαστική αξία της παλαιάς συν/κής θεωρείται πλέον παρούσα αξία της επισυναλλαγματικής, δηλαδή: $A = 35.640$, $v = 60$, $i = 0{,}06$, $K = ;$
Η ονομαστική αξία της επισυναλλαγματικής θα βρεθεί με δύο τρόπους:

α) Με το γνωστό τύπο: $K = \dfrac{A \cdot \Delta}{\Delta - v}$

$$K = \frac{35.600 \times 6000}{6000 - 60} = 36.000$$

β) Πρακτικώς, βάσει του τύπου:

$$K = A + \frac{Av}{\Delta} + \frac{Av}{\Delta} \cdot \frac{v}{\Delta} + \left(\frac{Av}{\Delta} \cdot \frac{v}{\Delta}\right)\frac{v}{\Delta} + \ldots$$

Αντικαθιστώντας έχομε:

$$K = 35.640 + \frac{35.640 \times 60}{6000} + \frac{35.640 \times 60}{6000} \times \frac{60}{6000} +$$

$$+ \left(\frac{35.640 \times 60}{6000} \times \frac{60}{6000}\right) \times \frac{60}{6000} \text{ ή}$$

$K = 35.640 + 356{,}40 + 3{,}564 + 0{,}036 = 36.000$ δρχ.

Στην πράξη οι σχετικοί υπολογισμοί έχουν συνήθως την ακόλουθη διάταξη:

Παρούσα αξία		35.640,000
συν τόκος Π.Α.	$\dfrac{35.640 \times 60}{6000} =$	356,400
συν τόκος του τόκου	$\dfrac{356{,}4 \times 60}{6000} =$	3,564

συν τόκος του νέου τόκου $\dfrac{3{,}564 \times 60}{6000} =$ 0,036

Άρα: Ονομαστική αξία επισυναλλαγματικής = 36.000

β) Με έξοδα: Στην περίπτωση αυτή, ο υπολογισμός της ονομαστικής αξίας της επισυναλλαγματικής θα γίνει ως εξής: Όπως είναι φυσικό, κατά την έκδοση της επισυναλλαγματικής, ο πιστωτής θα πληρώσει χαρτόσημο. Και επειδή κατά την προεξόφληση οι τράπεζες κρατούν προμήθεια και διάφορα άλλα έξοδα, οι τύποι (17) και (17α) πρέπει να τροποποιηθούν.

Εξ ορισμού είναι:

$$A = K - \frac{K\nu}{\Delta} - K \cdot \frac{\theta + \epsilon}{100} - x$$

ή $$A + x = K\left(1 - \frac{\nu}{\Delta} - \frac{\theta + \epsilon}{100}\right)$$

Λύνοντας τώρα ως προς Κ έχομε:

$$K = \frac{A + x}{1 - \dfrac{\nu}{\Delta} - \dfrac{\theta + \epsilon}{100}} \qquad (18)$$

Εξάλλου, ο τύπος (18) μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$K = (A + x) \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\nu}{\Delta} - \dfrac{\theta + \epsilon}{100}}$$

Αναλύοντας το κλάσμα σύμφωνα με το γνωστό ανάπτυγμα της Άλγεβρας

$\dfrac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ έχομε:

$$K = (A + x)\left[1 + \frac{\nu}{\Delta} + \frac{\theta + \epsilon}{100} + \left(\frac{\nu}{\Delta} + \frac{\theta + \epsilon}{100}\right)\left(\frac{\nu}{\Delta} + \frac{\theta + \epsilon}{100}\right) + \ldots\right]$$

ή

$$K = A + x + \underbrace{(A + x)\frac{\nu}{\Delta} + (A + x)\frac{\theta + \epsilon}{100}}_{\alpha} + \alpha \cdot \frac{\nu}{\Delta} + \alpha \cdot \frac{\theta + \epsilon}{100} + \ldots \qquad (18\alpha)$$

Δηλαδή, πρακτικώς, η ονομαστική αξία μιας επισυναλλαγματικής υπολογίζεται αν στην παρούσα αξία προσθέσομε τα εξής ποσά: 1) το χαρτόσημο, 2) τον τόκο του αθροίσματος (A + x), 3) τα έξοδα του ιδίου αθροίσματος, 4) τον τόκο του τόκου και των εξόδων και 5) τα έξοδα του τόκου και των εξόδων. Ο τρόπος αυτός υπολογισμού της ονομαστικής αξίας εφαρμόζεται ευρύτατα στην πράξη, γιατί απλουστεύει τους σχετικούς υπολογισμούς.

Παράδειγμα. Συναλλαγματική, ονομαστικής αξίας 15.000 δρχ. η οποία λήγει στις 19 Φεβρουαρίου επιστρέφεται απλήρωτη. Για την είσπραξή της εκδίδεται επισυναλλαγματική, η οποία λήγει στις 19 Απριλίου του ιδίου έτους και καταβάλλονται 250 δρχ. για χαρτόσημο. Η επισυναλλαγματική προεξοφλείται στις 19 Φεβρουαρίου (εξωτερικώς) προς $7^1/_2\%$ με έτος μεικτό. Η τράπεζα κρατάει για έξοδα $^1/_2\%$ και για προμήθεια $^1/_4\%$ κατά μήνα. Ερωτάται: ποια είναι η ονομαστική αξία της επισυναλλαγματικης;

Λύση. $A = 15.000$, $x = 250$, $v = 60$, $i = 0{,}075$
$\theta = {}^1/_4\% \times 2$, $\epsilon = {}^1/_2\%$, άρα: $\theta + \epsilon = 1\%$.

α) Ο υπολογισμός της ονομαστικής αξίας θα γίνει με το γνωστό τύπο:

$$K = \frac{A + x}{1 - \dfrac{v}{\Delta} - \dfrac{\theta + \epsilon}{100}}$$

Αντικαθιστώντας έχομε:

$$K = \frac{15.000 + 250}{1 - \dfrac{60}{4800} - \dfrac{1}{100}} = \frac{15.250 \times 4800}{4800 - (60 + 48)} = 15.601{,}023$$

β) Πρακτικώς, βάσει του τύπου:

$$K = A + x + \underbrace{(A + x)\frac{v}{\Delta} + (A + x)\frac{\theta + \epsilon}{100}}_{\alpha} + \alpha \cdot \frac{v}{\Delta} + \alpha \cdot \frac{\theta + \epsilon}{100}$$

ή

$$K = 15.250 + \underbrace{\frac{15.250 \times 60}{4800} + 15.250 \times \frac{1}{100}}_{343{,}125} + 343{,}125 \times \frac{60}{4800} + 343{,}125 \times \frac{1}{100}$$

ή

$$K = 15.250 + 343{,}125 + 4{,}289 + 3{,}431 = 15.600{,}825$$

Στην τραπεζική πρακτική, οι σχετικοί υπολογισμοί έχουν την επόμενη διάταξη:

Παρούσα αξία + χαρτόσημο			15.250,000
συν τόκος Π.Α και χαρ/μου		$\frac{15.250 \times 60}{4800}$ =	190,625
συν έξοδα Π.Α & χαρ/μου	15.250 ×	$\frac{1}{100}$ =	152,500
συν τόκος τόκου & εξόδων	343,125 ×	$\frac{60}{4800}$ =	4,289
συν τα έξοδα του τόκου & των εξόδων	343,125 ×	$\frac{1}{100}$ =	3,431
Άρα: Ονομαστική αξία επισυν/κής		=	15.600,825

Β΄ Εσωτερικώς.

α) Χωρίς έξοδα: Η ονομαστική αξία της επισυναλλαγματικής υπολογίζεται βάσει του τύπου:

$$K = A + \frac{Av}{\Delta} \tag{19}$$

β) Με έξοδα: Αν το γνωστό τύπο:

$$A = K - \frac{Kv}{\Delta + v} - K\frac{\theta + \epsilon}{100} - x$$

λύσομε ως προς Κ, τότε προκύπτει ο τύπος:

$$K = \frac{A + x}{1 - \frac{v}{\Delta + v} - \frac{\theta + \epsilon}{100}} \tag{20}$$

βάσει του οποίου υπολογίζεται η ονομαστική αξία της επισυναλλαγματικής. Η περίπτωση αυτή σπανίως εφαρμόζεται στην πράξη.

5.7 Εύρεση του χρόνου, του επιτοκίου και του πραγματικού επιτοκίου προεξοφλήσεως.

Α΄ Εύρεση του χρόνου. Ο χρόνος (δηλαδή οι ημέρες που μεσολαβούν από την ημερομηνία προεξοφλήσεως ως την ημέρα λήξεως μιας συναλλαγματικής) εισέρχεται σε όλους τους τύπους που έχομε αναφέρει στα προηγούμενα. Επομένως, για να βρούμε το χρόνο, αρκεί να λύσομε τον κατάλληλο τύπο ως προς ν.

Παράδειγμα. Συναλλαγματική, ονομαστικής αξίας 6000 δρχ., που λήγει στις 14 Απριλίου, προεξοφλήθηκε (εξωτερικώς) προς 8% και έδωσε παρούσα αξία 5940 δρχ. Πότε έγινε η προεξόφληση της συν/κής; Έτος μεικτό.

Λύση. $K = 6000$, $i = 0{,}08$, $\Delta = 4500$, $A = 5940$, $\nu = ;$

Αν αντικαταστήσομε τα δεδομένα στον τύπο: $E = \dfrac{K\nu}{\Delta}$ και λύσομε ως προς ν θα βρουμε το ν. Βρίσκομε πρώτα το Ε.

$$E = K - A = 6000 - 5940 = 60$$

Άρα:
$$60 = \frac{6000 \cdot \nu}{4500} \quad \text{ή} \quad 6000 \cdot \nu = 60 \times 4500$$

και $\nu = 45$. Επομένως, η προεξόφληση της συν/κής έγινε 45 ημέρες πριν από τη λήξη της, δηλαδή την 1 Μαρτίου.

Β΄ Εύρεση του επιτοκίου. Για να βρούμε το επιτόκιο με το οποίο έγινε η προεξόφληση, αρκεί να λύσομε τον κατάλληλο τύπο ως προς i.

Παράδειγμα. Γραμμάτιο, ονομαστικής αξίας 10.000 δρχ., προεξοφλήθηκε (εξωτερικως) 60 ημέρες προτού λήξει και έδωσε παρούσα αξία 9900 δρχ. Με ποιο επιτόκιο έγινε η προεξόφληση; Έτος μεικτό.

Λύση. $K = 10.000$, $\nu = 60$, $A = 9900$, $E = 10.000 - 9900 = 100$

$$E = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360}, \quad 100 = \frac{10.000 \times 60 \cdot i}{360} \quad \text{και} \quad i = 0{,}06$$

Γ΄ Εύρεση του πραγματικού επιτοκίου. Το ποσό που κρατάει συνολικά η τράπεζα κατά την προεξόφληση (δηλαδή: προεξόφλημα + προμήθεια + διάφορα έξοδα), αν θεωρηθεί τόκος του καθαρού ποσού (Α) που εισπράττει ο κομιστής μιας συν/κής, τότε δημιουργείται το ερώτημα: Με ποιό επιτόκιο πρέπει να τοκίσομε το ποσό Α επί ν ημέρες, ώστε να εισπράξομε τόκο (Κ — Α), δηλαδή, όσο κράτησε η τράπεζα;

Αν παραστήσομε με το j τό πραγματικό επιτόκιο προεξοφλήσεως, τότε πρέπει να ισχύει η ισότητα:

$$K - A = \frac{A \cdot \nu \cdot j}{360 \text{ ή } 365}$$

Λύνοντας τώρα ως προς j βρίσκομε τον τύπο υπολογισμού του πραγματικου επιτοκίου:

$$j = \frac{(K-A) \cdot 360 \text{ ή } 365}{A \cdot v} \qquad (21)$$

Παράδειγμα. Συναλλαγματική, ονομαστικής αξίας 24.000 δρχ., που λήγει μετά από 80 ημέρες, προεξοφλείται εξωτερικώς προς $7^1/_2$%. Η τράπεζα κράτησε $^1/_2$% για διάφορα έξοδα, $^1/_4$% για προμήθεια κατά μήνα και για ολόκληρο μήνα. Ερωτάται: Με ποιο πραγματικό επιτόκιο έγινε η προεξόφληση;

Λύση. $K = 24.000$, $v = 80$, $i = 0{,}075$, $\Delta = 4800$, $\epsilon = {}^1/_2\%$
$\theta = {}^1/_4\% \times 3 = {}^3/_4\%$ $A = ;$ $j = ;$

$$A = K - \frac{Kv}{\Delta} - K\,\frac{\theta+\epsilon}{100} = 24.000 - \frac{24.000 \times 80}{4800} - \frac{24.000 \times 5}{400} =$$

$$= 24.000 - 400 - 300 = 23.300$$

Αντικαθιστώντας τώρα στον τύπο (21) βρίσκομε:

$$j = \frac{(24.000 - 23.300) \times 360}{23.300 \times 80} = 0{,}135 \quad \text{ή} \quad j = 13{,}5\%$$

Δηλαδή το πραγματικό επιτόκιο προεξοφλήσεως ειναι περίπου διπλάσιο του προεξοφλητικού επιτοκίου.

5.8 Πινάκιο Προεξοφλήσεως.

Υποθέτομε ότι ο έμπορος Ε χρειάζεται χρήματα και για να τα εξοικονομήσει προσκομίζει στην Τράπεζα Τ έναν ορισμένο αριθμό συν/κών με σκοπό να τις προεξοφλήσει και να εισπράξει το αναγκαίο χρηματικό ποσό.

Η Τράπεζα Τ, για να προεξοφλήσει τις συναλλαγματικές τις οποίες προσκόμισε ο έμπορος Ε, υποχρεώνει τον έμπορο: α) να μεταβιβάσει στην τράπεζα τις συναλλαγματικές που θέλει να προεξοφλήσει, αφού προηγουμένως τις οπισθογραφήσει και β) να καταχωρίσει τις συναλλαγματικές (ή τα γραμμάτια) σε ειδικό έντυπο που δίνει η τράπεζα και το οποίο ονομάζεται **Πινάκιο Προεξοφλήσεων** γραμματίων και συναλλαγματικών. Παρακάτω παραθέτομε υπόδειγμα πινακίου προεξοφλήσεως της Εμπορικής Τράπεζας της Ελλάδας. Το πινάκιο προεξοφλήσεως έχει μεγάλη σημασία για τις τραπεζικές εργασίες, γιατί με αυτό διακινούνται οι πιστωτικοί τίτλοι των πελατών κάθε τράπεζας και έτσι διευκολύνονται πολύ οι εμπορικές συναλλαγές.

Το πινάκιο προεξοφλήσεως φέρει επικεφαλής τα εξής στοιχεία: α) το όνομα και το υποκατάστημα της τράπεζας, β) την ημερομηνία προεξοφλήσεως, γ) τον αριθμό των συναλλαγματικών και γραμματίων που θα προεξοφληθούν, καθώς και το όνομα του κομιστή των συν/κών και δ) τους όρους προεξοφλήσεως, δηλαδή το προεξοφλητικό επιτόκιο, την προμήθεια της τράπεζας και τα διάφορα έξοδα που γίνονται κατά την προεξόφληση των συν/κών (ταχ/κά, έξοδα αλλαγής θέσεως, κ.ά.).

ΕΜΠΟΡΙΚΗ ΤΡΑΠΕΖΑ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
Α΄ Υποκατάστημα Θεσ/νίκης

Θεσ/νίκη, 20 Φεβ/ρίου 1979

. ΑΡΙΘ. Λ/ΣΜΟΥ 130200148

ΠΙΝΑΚΙΟ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΕΩΣ

Τεσσάρων (4) συν/κών και δύο (2) γρ/τίων. Πελάτης: κ. Α. Ανδρέου
Επιτόκιο 9%. Προμήθεια $^1/_2$%. Έξοδα αλλαγής θέσεως $^1/_4$%.

α/α	Αριθ. Συν/κής ή Γραμ/τίου	Ποσά (Δρχ.)	Λήξεις		Τοκο-φόρες ημέρες	Τοκάριθμοι (N/100)	Τόπος πληρωμής	Προμή-θεια	Έξοδα αλλαγής θέσεως	Αποδέκτης (πληρωτής)
			Μήνας	Ημ.						
(1)	(2)	(3)	(4)		(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1	202	6.600	Μάρτιος	3	15	990	Ιωάννινα	33	16,50	Δ. Δημητρίου
2	68	4.400	»	31	40	1.760	Θεσ/νίκη	22	—	Γ. Γεωργίου
3	128	12.600	Απρίλιος	10	50	6.300	Πάτρα	63	31,50	Ε. Ευθυμίου
4	104	8.800	»	20	60	5.280	Αθήναι	44	22	Β. Βασιλείου
5	508	16.800	Μάϊος	5	75	12.600	Λαμία	84	42	Ζ. Ζήσης
Σύνολα		49.200				26.930		246	112	

Μείον	προεξόφλημα προς 9%, τοκάριθμος 26.930/40	=	673,25	δρχ.
»	προμήθεια	=	246,00	»
»	έξοδα αλλαγής θέσεως	=	112,00	»
»	χαρτόσημο πινακίου	=	12,00	»
	Σύνολο κρατήσεων	=	1.043,25	»

−1.043,25

48.156,75 δρχ.

Καθαρό ποσό που θα εισπράξει ο Α. Ανδρέου.

ΕΞΩΦΛΗΘΗ
(Υπογρ.) Α. Ανδρέου

ΕΘΕΩΡΗΘΗ
(Υπογρ.)
Ο Διευθυντής

Το πινάκιο προεξοφλήσεως είναι γραμμογραφημένο σε στήλες στις οποίες αναγράφονται: 1) Ο αύξων αριθμός (α/α) των γραμματίων και συναλλαγματικών που πρόκειται να προεξοφληθούν. 2) Ο αριθμός της συν/κής (ή του γραμματίου) που υπάρχει στις συν/κές (ή τα γρ/τια) κατά την έκδοσή τους. 3) Τα ποσά, δηλαδή η ονομαστική αξία των συν/κών. 4) Η ημερομηνία λήξεως. 5) Οι τοκοφόρες ημέρες, δηλαδή οι ημέρες που μεσολαβούν από την ημερομηνία προεξοφλήσεως ως την ημερομηνία λήξεως κάθε συν/κής. Οι τράπεζες, κατά κανόνα, υπολογίζουν ως τοκοφόρες ημέρες και την ημέρα προεξοφλήσεως και την ημέρα λήξεως των συν/κών, με τη δικαιολογία ότι για να δώσουν στον πελάτη τους χρήματα πρέπει να τα έχουν από την προηγούμενη ημέρα, αλλά και η ημέρα λήξεως πρέπει να είναι τοκοφόρος για τις τράπεζες, γιατί τα χρήματα που θα εισπράξουν οι τράπεζες την ημέρα της λήξεως θα τα τοκίσουν από την επόμενη ημέρα. 6) Οι τοκάριθμοι, δηλαδή το γινόμενο κάθε ποσού (ονομαστική αξία συν/κής) επί τον αντίστοιχο αριθμό των τοκοφόρων ημερών. Οι τοκάριθμοι, για τεχνικούς λόγους, διαιρούνται δια του 100. 7) Ο τόπος πληρωμής της συν/κής ή του γραμματίου. 8) Η προμήθεια που κρατάει η τράπεζα· η προμήθεια υπολογίζεται ως ποσοστό «επί τοις εκατόν» της ονομαστικής αξίας κάθε συν/κής (ή γραμματίου). 9) Τα διάφορα έξοδα (ταχ/κά, τηλ/κά, εισπρακτικά, κ.ά.), τα οποία δημιουργούνται όταν οι συν/κές θα εισπραχθούν εκτός της έδρας της τράπεζας που διενεργεί την προεξόφληση. 10) Το όνομα του αποδέκτη (οφειλέτη) της συν/κής.

Για την πλήρη κατανόηση και εμπέδωση του μηχανισμού συντάξεως ενός πινακίου προεξοφλήσεως, παραθέτομε το επόμενο αναλυτικό παράδειγμα:

Υποθέτομε ότι ο έμπορος Θεσ/νίκης Α. Ανδρέου προσκόμισε στο πρώτο υποκατάστημα Θεσ/νίκης της Εμπορικής Τράπεζας, την 20 Φεβρουαρίου 1979, για προεξόφληση τους παρακάτω πιστωτικούς τίτλους:

1) Συν/κή αριθ. 104, ονομαστικής αξίας 8800 δρχ., λήξεως 20 Απριλίου 1979, αποδοχής Β. Βασιλείου κατοίκου Αθηνών.

2) Γραμμάτιο αριθ. 68, ονομαστικής αξίας 4400 δρχ., λήξεως 31 Μαρτίου 1979, του Γ. Γεωργίου εμπόρου Θεσ/νίκης.

3) Συν/κή αριθ. 508, ονομαστικής αξίας 16.800 δρχ., λήξεως 5 Μαΐου 1979, αποδοχής Ζ. Ζήση εμπόρου Λαμίας.

4) Συν/κή αριθ. 202, ονομαστικής αξίας 6600 δρχ., λήξεως 3 Μαρτίου 1979, με αποδέκτη τον Δ. Δημητρίου κρεοπώλη Ιωαννίνων.

5) Γραμμάτιο αριθ. 128, ονομαστικής αξίας 12.600 δρχ. λήξεως 10 Απριλίου 1979, του Ε. Ευθυμίου εμπόρου Πατρών.

6) Συν/κή αριθ. 155, ονομαστικής αξίας 10.000 δρχ., λήξεως 26 Ιουνίου 1979, αποδοχής Ι. Ιωάννου κατοίκου Θεσ/νίκης.

Να συνταχθεί το πινάκιο προεξοφλήσεως και να βρεθεί το καθαρό προϊόν από την προεξόφληση των παραπάνω γραμματίων και συναλλαγματικών, αν το προεξοφλητικό επιτόκιο είναι 9%, η προμήθεια της τράπεζας $^1/_2$% της ονομαστικής αξίας κάθε συν/κής ή γρ/τίου και τα έξοδα αλλαγής θέσεως $^1/_4$%, επίσης, της ονομαστικής αξίας κάθε συν/κής ή γρ/τίου. Έτος μεικτό.

Επεξηγήσεις συντάξεως του πινακίου προεξοφλήσεως.

1) Οι συναλλαγματικές και τα γραμμάτια καταχωρίζονται στο πινάκιο προεξο-

φλήσεως βάσει της χρονολογικής σειράς λήξεώς τους, αρχίζοντας με τη συν/κή ή το γρ/τιο, του οποίου η ημερομηνία λήξεως είναι η πλησιέστερη στην ημερομηνία προεξοφλήσεως.

2) Ο αρμόδιος υπάλληλος της τράπεζας ελέγχει αν έχει συνταχθεί σωστά το πινάκιο προεξοφλήσεως, γιατί οι τράπεζες δεν προεξοφλούν συν/κές και γρ/τια τα οποία λήγουν αργότερα από τρεις μήνες — εκτός από ορισμένες περιπτώσεις που οι τράπεζες προεξοφλούν συν/κές για πέντε μήνες — ούτε συν/κές που λήγουν νωρίτερα από 15 ημέρες (15 ημέρες είναι το ελάχιστο όριο αποδεκτού χρόνου προεξοφλήσεως). Έτσι, στη σύν/κή αριθ. 202 του πινακίου προεξοφλήσεως, αν και οι τοκοφόρες ημέρες είναι 12 (20/2 ως 3/3), εν τούτοις, υπολογίσαμε ,15 ημέρες. Επίσης, η αριθ. 155 συν/κή, ονομαστικής αξίας 10.000 δρχ., δεν καταχωρίσθηκε στο πινάκιο προεξοφλήσεως, γιατί λήγει αργότερα από τρεις μήνες.

3) Στην αριθ. 68 συν/κή, αποδοχής του Γ. Γεωργίου δεν υπολογίσθηκαν έξοδα αλλαγής θέσεως, γιατί ο τόπος πληρωμής της συν/κής (Θεσ/νίκη) συμπίπτει με τον τόπο προεξοφλήσεως και, επομένως, δεν δικαιολογούνται έξοδα.

4) Αφού γίνει η καταχώριση όλων των συν/κών και γρ/τίων στο πινάκιο προεξοφλήσεως, αθροίζουμε τις στήλες (3), (6), (8) και (9), δηλαδή τις στήλες: των ποσών, των τοκαρίθμων, των προμηθειών και των εξόδων. Το συνολικό προεξόφλημα υπολογίζεται με διαίρεση του συνολικού αθροίσματος των τοκαρίθμων (= 26.930) δια του εκατοστού του σταθερού διαιρέτη (= 40), γιατί κάθε τοκάριθμος έχει ήδη διαιρεθεί δια του 100 και θα πρέπει να διαιρεθεί και ο σταθερός διαιρέτης δια του 100. Κατόπιν, το σύνολο των κρατήσεων (= προεξόφλημα + προμήθεια + έξοδα + χαρτόσημο) αφαιρείται από το σύνολο των ποσών (στήλη 3) και έτσι προκύπτει το καθαρό ποσό που θα εισπράξει ο κομιστής των συναλλαγματικών.

Σημείωση. Οι περισσότερες τράπεζες υπολογίζουν ως τοκοφόρες ημέρες (εκτός από την ημέρα προεξοφλήσεως και την ημέρα λήξεως των συν/κών) δύο ακόμη ημέρες μετά τη λήξη των συναλλαγματικών, γιατί ο νόμος ορίζει ότι ο οφειλέτης μπορεί να εξοφλήσει μια συναλλαγματική και μετά δύο εργάσιμες ημέρες από τη λήξη της συν/κής, διαφορετικά την τρίτη ημέρα μετά τη λήξη της συν/κής συντάσσεται το διαμαρτυρικό.

5.9 Προβλήματα προεξοφλήσεως.

1. Να βρεθεί το εξωτερικό και το εσωτερικό προεξόφλημα γραμματίου, ονομ. αξίας 10.000 δρχ., το οποίο προεξοφλήθηκε 60 ημέρες πριν από τη λήξη του: α) με έτος πολιτικό και β) με έτος μεικτό. Επιτόκιο 6%. Αν τώρα το πιο πάνω γραμμάτιο είχε προεξοφληθεί τρεις μήνες πριν από τη λήξη του ποιο είναι το προεξόφλημα (εξωτ. και εσωτ.);
(Απ. 98,63 - 100 - 97,66 - 99 - 150 - 147,78)

2. Συναλλαγματική, ονομ. αξίας 15.000 δρχ., η οποία λήγει την 20η Ιουλίου προεξοφλήθηκε στις 10 Μαΐου προς 8% με έτος μεικτό. Ποιο είναι το εξωτερικό και ποιο το εσωτερικό προεξόφλημα;
(Απ. 236,66 - 232,99)

3. Να βρεθεί το εξωτερικό και εσωτερικό προεξόφλημα συν/κής, ονομ. αξίας 20.000 δρχ., η οποία προεξοφλήθηκε 8 μήνες προτού λήξει προς 4%. ***(Απ. 533,33 - 519,48)***

4. Γραμμάτιο προεξοφλήθηκε 45 ημέρες πριν από τη λήξη του και αφού κρατήθηκε $^1/_2$% για προμήθεια και 40 δρχ. για χαρτόσημο, έδωσε παρούσα αξία 11.834 δρχ. Να βρεθεί το εξωτερικό προεξόφλημα αν το επιτόκιο υπολογισμού είναι 8% και το έτος μεικτό.
(Απ. 120,55)

Υπόδειγμα Πινακίου Προεξοφλήσεων Εμπορικής Τράπεζας της Ελλάδας

ΕΜΠΟΡΙΚΗ ΤΡΑΠΕΖΑ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ Α.Ε.

ΠΙΝΑΚΙΟΝ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΕΩΣ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ & ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΙΚΩΝ 'Αρ. Πιν.............

ΜΕΡΙΣ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ : ....

ΜΕΡΙΣ ΒΟΗΘΗΤΙΚΟΥ : ....

ΑΡΙΘΜ. Λ/ΣΜΟΥ

ΓΡΑΜΜ. .... ΑΠΟ ΕΩΣ ....

Προεξοφλήσας ο υποφαινόμενος τα κάτωθι γραμμάτια έλαβον το αντίτιμον κατά τον κάτωθι λογαριασμόν Δρχ. ....

μείον τόκων και προμηθείας.................» ....

Δρχ. ....

δηλώ δε ότι εν περιπτώσει μη εγκαίρου διαμαρτυρήσεως εκ μέρους της Τραπέζης δι' οιονδήποτε λόγον φέρω πάντοτε ακεραίαν την ευθύνην ως οπισθογράφος.

ΕΞΩΦΛΗΘΗ

ΕΓΚΡΙΝΕΤΑΙ ΔΙΑ ΔΡΧ.

ΕΝ.............................ΤΗ.............................197.......

ΕΘΕΩΡΗΘΗ

Α/Α	ΑΡΙΘ. ΜΗΤΡΩΟΥ ΤΡΑΠΕΖΗΣ	ΑΡΙΘ. ΜΗΤΡΩΟΥ ΠΕΛΑΤΟΥ	ΠΟΣΟΝ ΣΥΝ/ΚΩΝ	ΗΜΕΡ. ΠΙΣΤ.	ΗΜΕΡ. ΛΗΞΕΩΣ	ΠΡΟΘΕΣΜΙΑ	ΤΟΚΑΡΙΘΜΟΙ	ΑΠΟΔΕΚΤΗΣ	ΤΟΠΟΣ ΠΛΗΡΩΜΗΣ	ΗΜΕΡΟΜ. ΕΚΔΟΣΕΩΣ	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ *
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
ΣΥΝΟΛΟΝ											

Α.Β. 25-5803 (Σ. 10.000Χ100-6/77)

* Να σημειούται υπό του Κατ/τος το όνομα οπισθογράφων ή εγγυητών.

5. Γραμμάτιο προεξοφλήθηκε 7 μήνες πριν τη λήξη του προς $5^3/_4$% και έδωσε παρούσα αξία 10.000 δρχ. Να βρεθούν τα δύο προεξοφλήματα.

(Απ. 347,07 - 335,42)

6. Γραμμάτιο που προεξοφλήθηκε εξωτερικως πέντε μηνες προτού λήξει προς επτά και τρία τέταρτα τοις εκατό έδωσε παρούσα αξία τρία εκατομμύρια τριάντα χιλιάδες τριάντα μονάδες. Ποιο το εξωτερικό προεξόφλημα; (Οι μήνες να μη μετατραπούν σε ημέρες).

(Απ. 101.109,71)

7. Συναλλαγματική προεξοφλήθηκε 60 ημέρες προτού λήξει προς 5% και έδωκε παρούσα αξία 5.000 δρχ. Ποιο είναι το προεξόφλημα αν η προεξόφληση γίνει εξωτ. και εσωτ. με έτος μεικτό και πολιτικό;

(Απ. 42,02 - 41,44 - 41,67 - 41,09)

8. Η παρούσα αξία γραμματίου που προεξοφλήθηκε εξωτερικως 40 ημ. προτού λήξει προς 6% με προμήθεια $^1/_2$% και έξοδα $^1/_{16}$% είναι 50.000 δρχ. Ποια είναι η ονομαστική του αξία;

(Απ. 50.622,20)

9. Να βρεθει η ονομαστική αξία γραμματίου που προεξοφλήθηκε 250 ημέρες πριν τη λήξη του προς 7% και έδωσε παρούσα αξία 55.000 δρχ. Προεξόφληση εξωτερική και εσωτερική. Έτος μεικτό. Ποιο το πραγματικό επιτόκιο προεξοφλήσεως;

(Απ. 57.810,2 - 57.673,6 - 0,0736)

10. Προεξοφλήθηκαν εξωτερικώς προς 4% δύο γραμμάτια. Το πρώτο έληγε μετά 50 ημέρες και το δεύτερο μετά 60 ημέρες. Και τα δυο μαζί έδωκαν προεξόφλημα 22,50 δρχ. Να βρεθούν οι ονομαστικές αξίες των γραμματίων, αν είναι γνωστό ότι η ονομ. αξία του δευτέρου είναι τα 2/3 της ονομ. αξίας του πρώτου.

(Απ. 2.250 - 1500)

11. Ποια ειναι η ονομ. αξία γραμματίου, το οποίο προεξοφλήθηκε 170 ημέρες προτού λήξει προς 6%, εσωτερικως και εξωτερικώς, αν είναι γνωστό ότι η διαφορά των δύο προεξοφλημάτων είναι 0,50 δρχ. Έτος μεικτό.

(Απ. 640,48)

12. Οφείλει κάποιος σήμερα 10.000 δρχ. και για να τις εξοφλήσει υπογράφει μια συναλλαγματική που λήγει μετά 90 ημέρες προς 8% με 10 δρχ. χαρτόσημο. Η τράπεζα κατά την προεξόφληση κρατάει $^1/_4$% για προμήθεια για κάθε μήνα και για τμήμα του μήνα και $^3/_{16}$% για διάφορα έξοδα. Ποια είναι η ονομ. αξία της συν/κής; Προεξόφληση εξωτερική και εσωτερική. Έτος μεικτό.

(Απ. 10.312,94 - 10398,90)

13. Συναλλαγματική 24.800 δρχ. έληξε σήμερα και επιστρέφεται απλήρωτη. Ο οφειλέτης αποδέχεται μια επισυν/κή που λήγει μετά 60 ημέρες. Η επισυν/κή προεξοφλείται την ίδια ημέρα προς 6%. Να βρεθεί η ονομ. αξία της επισυν/κής, αν είναι γνωστό ότι το χαρτόσημο είναι 30 δρχ. και η τράπεζα κράτησε 0,25% για διάφορα έξοδα. Προεξόφληση εξωτερική. Έτος πολιτικό.

(Απ. 25140,80)

14. Γραμμάτιο 8.400 δρχ. που λήγει την 31η Ιουλίου προεξοφλείται εξωτερικως στις 15 Μαΐου. Κρατούνται: $^1/_3$% για προμήθεια και $^1/_4$% για έξοδα και προκύπτει καθαρό ποσό 8270,15 δρχ. Με ποιο επιτόκιο έγινε η προεξόφληση; Έτος μεικτό.

(Απ. 4,4%)

15. Στις 23 Μαΐου προεξοφλήθηκε γραμμάτιο 10.000 δρχ. προς 4% με προμήθεια $^1/_4$% εφάπαξ και έδωσε παρούσα αξία 9950 δρχ. Πότε έληγε το γραμμάτιο; Έτος μεικτό. Προεξόφληση εξωτερική.

(Απ. 15 Ιουνίου)

16. Μετά από πόσες ημέρες πρέπει να λήγει γραμμάτιο, το οποίο, όταν προεξοφληθεί προς 9% εξωτερικως και προς 10% εσωτερικως, δίνει την ίδια παρούσα αξία;

(Απ. 400)

17. Γραμμάτιο 12.000 δρχ. προεξοφλήθηκε εξωτερικως προς $4^{1}/_{2}\%$ 80 ημέρες προτου λήξει. Η τράπεζα κράτησε: για χαρτόσημο 18 δρχ. και για προμήθεια $^{1}/_{4}\%$ για κάθε μήνα και για τμήμα του μήνα. Με ποιο πραγματικό επιτόκιο έγινε η προεξόφληση; Έτος μεικτό.

(Απ. 8,7%)

18. Συναλλαγματική, ονομ. αξίας 37.100 δρχ., προεξοφλήθηκε εξωτερικως με έτος πολιτικό 80 ημέρες προτου λήξει. Έγιναν οι εξης κρατήσεις: α) προμήθεια 0,2% για κάθε μήνα και για τμήμα του μήνα· β) χαρτόσημο 75 δρχ. γ) έξοδα αλλαγης θέσεως 0,5 για κάθε μισή χιλιάδα και για τμήμα της μισης χιλιάδας. Όλες οι κρατήσεις υπολογίσθηκαν πάνω στην ονομ. αξία. Ο κομιστής εισέπραξε καθαρό ποσό 35.892,54 δρχ. Ερωταται: 1) Με ποιο επιτόκιο έγινε η προεξόφληση και 2) ποιο πραγματικό επιτόκιο αντιστοιχει στην προεξόφληση;

(Απ. 10,73% - 15,35%)

19. Ποια η ονομαστική αξία γραμματίου, το οποιο προεξοφλήθηκε 60 ημέρες προτου λήξει και έδωσε διαφορά προεξοφλημάτων 5 δρχ. Επιτόκιο $4^{1}/_{2}\%$. Έτος μεικτό.

(Απ. 8.955,55)

20. Συναλλαγματική, ονομ. αξίας 10.000 δρχ., προεξοφλήθηκε 70 ημέρες πριν από τη λήξη της με έτος πολιτικό προς 9%. Η τράπεζα κράτησε: α) $^{1}/_{2}\%$ για έξοδα, β) $^{1}/_{4}\%$ για προμήθεια για κάθε μήνα και για τμημα του μήνα και γ) 50 δρχ. για χαρτόσημο. Να βρεθει το καθαρό ποσό που εισέπραξε ο κομιστής της συν/κής.

(Απ. 9.652,40)

21. Συναλλαγματική 5000 δρχ. έληξε σήμερα και δεν εξοφλήθηκε· για την είσπραξή της εκδίδεται επισυναλλαγματική, η οποία λήγει μετά 50 ημέρες από σήμερα με 50 δρχ. χαρτόσημο. Η επισυναλλαγματική προεξοφλειται την ίδια ημέρα εξωτερικων προς 9%. Να βρεθεί η ονομ. αξία της επισυναλλαγματικης.

(Απ. 5.113,92)

22. Οφείλει κάποιος σήμερα 300.325 δραχμές και για να τις εξοφλήσει υπογράφει ένα γραμμάτιο που λήγει μετά 60 ημέρες από σήμερα με 500 δρχ. χαρτόσημο. Το γραμμάτιο προεξοφλειται την ίδια ημέρα εξωτερικώς προς 7% με έτος μεικτό. Η τράπεζα κρατάει $^{1}/_{2}\%$ για έξοδα και $^{1}/_{4}\%$ για προμήθεια για κάθε μήνα. Ποια πρέπει να ειναι η ονομαστική αξία του γραμματίου, ώστε ο πιστωτής να εισπράξει τις 300.325 δρχ. συν 500 δρχ. για χαρτόσημο;

(Απ. 307.487)

23. Συναλλαγματική, ονομ. αξίας 3704 δρχ., προεξοφλήθηκε εξωτερικως 80 ημέρες πριν τη λήξη της με έτος πολιτικό. Η τράπεζα κράτησε: για προμήθεια $^{1}/_{4}\%$ για κάθε μήνα και για τμημα του μήνα, για έξοδα αλλαγής θέσεως 22,50 δρχ., για χαρτόσημο 25 δρχ., και ο κομιστής εισέπραξε 3548,35 δρχ. Ερωτάται: 1) Με ποιο επιτόκιο υπολογίστηκε η προεξόφληση και 2) σε ποιο πραγματικό επιτόκιο αντιστοιχει η προεξόφληση;

(Απ. 9,9% - 20%)

24. Γραμμάτιο 5.000 δρχ. έληξε σήμερα και δεν εξοφλήθηκε. Για την είσπραξή του εκδίδεται νέο γραμμάτιο, το οποίο λήγει ύστερα από 60 ημέρες, και προεξοφλείται την ίδια ημέρα με εξωτερική προεξόφληση προς 7,5%. Κρατούνται $^{1}/_{2}$‰ για έξοδα και 3‰ για προμήθεια. Ποια πρέπει να είναι η ονομαστική αξία του νέου γραμματίου, ώστε να εισπράξει ο πιστωτής τις 5.000 δρχ.;

(Απ. 5.081,30)

25. Συναλλαγματική, ονομ. αξίας 10.200 δρχ., προεξοφλήθηκε 70 ημέρες πριν τη λήξη της εξωτερικώς με έτος πολιτικό και επιτόκιο 7%. Η τράπεζα κράτησε: για έξοδα 1 δραχμή για κάθε χιλιάδα και τμημα της χιλιάδας, για προμήθεια $^{1}/_{4}\%$ για κάθε μήνα και τμήμα του μήνα και 20 δρχ. χαρτόσημο. Να βρεθει το καθαρό ποσό που εισέπραξε ο κομιστής της συν/κης.

(Απ. 9.955,57)

26. Συναλλαγματική που προεξοφλήθηκε 40 ημέρες προτού λήξει προς 9% έδωκε παρούσα αξία 10.000 δρχ. Ζητουνται: α) η ονομαστική αξία της συν/κης, β) το προεξόφλημα, γ) το πραγματικό επιτόκιο και δ) η διαφορά των προεξοφλημάτων.

(Απ. 10.101,01 - 101,01 - 0,0909 - 1,01)

27. Γραμμάτιο 12.000 δρχ. προεξοφλήθηκε 80 ημέρες πριν τη λήξη του προς $4^{1}/_{2}\%$. Η τράπεζα κράτησε: προμήθεια $^{1}/_{4}\%$ για κάθε μήνα και για τμήμα του μήνα και 18 δρχ. για χαρτόσημο. Ζητούνται: 1) Η παρούσα αξία, 2) το προεξόφλημα και 3) το πραγματικό επιτόκιο. Προεξόφληση εξωτερική. Έτος μεικτό.

(Απ. 11.772 - 120 - 0,087)

28. Η διαφορά των προεξοφλημάτων ενός γραμματίου που προεξοφλήθηκε στις 16 Μαρτίου και έληγε στις 24 Μαΐου προς $7^{1}/_{2}\%$ είναι 10 δρχ. Ποια είναι η ονομ. αξία του γραμματίου; Έτος μεικτό.

(Απ. 47.706,12)

29. Συναλλαγματική, ονομ. αξίας 17.368 δρχ., η οποία λήγει στις 12 Μαΐου προεξοφλείται εξωτερικώς στις 25 Ιαν/ρίου προς $7^{1}/_{2}\%$. Η τράπεζα κράτησε: για προμήθεια $^{1}/_{8}\%$ για κάθε μήνα και για τμήμα του μήνα και 3‰ για χαρτόσημο. Να βρεθεί το καθαρό ποσό που εισέπραξε ο κομιστής.

(Απ. 16.841,90)

30. Ο έμπορος Χ οφείλει σήμερα στον έμπορο Ψ 32.000 δρχ. Για να εξοφλήσει το χρέος του ο Χ υπογράφει μια συν/κή η οποία λήγει μετά 50 ημέρες από σήμερα. Ποια είναι η ονομ. αξία της συν/κής, αν το επιτόκιο είναι 6%, η προεξόφληση εξωτερική και το έτος μεικτό.

(Απ. 32.268,90)

31. Συναλλαγματική, ονομ. αξίας 35.800 δρχ., η οποία λήγει σήμερα δεν εξοφλήθηκε. Για την είσπραξή της εκδίδεται επισυναλλαγματική η οποία λήγει μετά 80 ημέρες. Ποια είναι η ονομαστική αξία της επισυν/κής, αν το επιτόκιο προεξοφλήσεως είναι 8%, τα έξοδα διαμαρτυρήσεως 100 δρχ., το χαρτόσημο 240 δρχ., η προμήθεια $^{1}/_{4}\%$ και τα εισπρακτικά $^{1}/_{8}\%$. Προεξόφληση εξωτερική. Έτος μεικτό.

(Απ. 36.935)

32. Συναλλαγματική, ονομ. αξίας 32.000 δρχ., η οποία λήγει στις 20 Ιουλίου προεξοφλείται εξωτερικώς προς 10% με έτος μεικτό. Αν είναι γνωστό ότι η τράπεζα κράτησε 720 δρχ. για προεξόφλημα, να βρεθεί η ημερομηνία προεξοφλήσεως.

(Απ. 30 Απρ.)

33. Γραμμάτιο, ονομ. αξίας 17.600 δρχ., το οποίο λήγει στις 22 Δεκεμβρίου προεξοφλείται εξωτερικώς στις 16 Σεπτεμβρίου προς 8%. Η τράπεζα κράτησε: προμήθεια $^{1}/_{8}\%$ για κάθε μήνα και για τμήμα του μήνα και 100 δρχ. για χαρτόσημο. Να βρεθεί το πραγματικό επιτόκιο. Έτος μεικτό.

(Απ. 12,32%)

34. Το εξωτερικό προεξόφλημα ενός γραμματίου, που προεξοφλήθηκε 45 ημέρες προτού λήξει προς 8% και έτος μεικτό, είναι 25 δρχ. Ποιο είναι το εσωτερικό προεξόφλημα;

(Απ. 24,75)

35. Έμπορος αγόρασε σήμερα εμπορεύματα συνολικής αξίας 26.500 δρχ. και έδωσε μια συναλλαγματική, ονομ. αξίας 16.700 δρχ., η οποία λήγει μετά 54 ημέρες. Η συν/κή προεξοφλήθηκε την ίδια ημέρα προς 8% και έτος μεικτό. Πόσα χρήματα πρέπει να πληρώσει ακόμη ο έμπορος για να εξοφλήσει τη συνολική αξία των εμπ/των που αγόρασε;

(Απ. 10.000)

36. Γραμμάτιο, ονομ. αξίας 48.600 δρχ., προεξοφλήθηκε 80 ημέρες πριν τη λήξη του προς $7^{1}/_{2}\%$ εξωτερικώς με έτος μεικτό. Η τράπεζα κράτησε: προμήθεια $^{1}/_{2}\%$ για κάθε μήνα και για τμήμα του μήνα, διάφορα έξοδα 2 δραχμές κατά χιλιάδα και για ολόκληρη χιλιάδα και 250 δρχ. για χαρτόσημο. Να βρεθεί το καθαρό ποσό που εισέπραξε ο κομιστής.

(Απ. 46.713)

37. Να βρεθεί η παρούσα αξία συναλλαγματικής, ονομ. αξίας 10.000 δρχ., η οποία προεξοφλήθηκε 100 ημέρες προτού λήξει προς $8^{1}/_{2}\%$ εξωτερικώς με έτος μεικτό. Η τράπεζα κράτησε: προμήθεια $^{1}/_{4}\%$ και 40 δρχ. για χαρτόσημο.

(Απ. 9.698,90)

38. Συναλλαγματική, ονομ. αξίας 220.025 δρχ., η οποία λήγει σήμερα δεν πληρώθηκε. Για την είσ-

πραξή της εκδίδεται επισυναλλαγματική η οποία λήγει μετά 45 ημέρες από σήμερα με 500 δρχ. χαρτόσημο. Η επισυν/κή προεξοφλείται την ίδια ημέρα, εξωτερικώς προς 8% με έτος μεικτό και η τράπεζα κράτησε 5‰ για προμήθεια. Να βρεθεί η ονομαστική αξία της επισυναλλαγματικής.

(Απ. 223.883,24)

39. Γραμμάτιο, ονομ. αξίας 3.200 δρχ., προεξοφλήθηκε 45 ημέρες πριν τη λήξη του προς $4^1/_2$%. Η τράπεζα κράτησε $^1/_4$% για προμήθεια και $^3/_{16}$% για διάφορα έξοδα. Προεξόφληση εξωτερική, έτος μεικτό. Με ποιο πραγματικό επιτόκιο έγινε η προεξόφληση;

(Απ. 8,08%)

40. Ο έμπορος Α. Ανδρέου προσκόμισε στην Τράπεζα Τ των Αθηνών στις 25 Ιανουαρίου 1979 για προεξόφληση τις εξής συναλλαγματικές: 1) Αριθ. 1040, ονομ. αξίας 6.200 δρχ., λήξεως 15 Μαρτίου 1979, αποδοχής Β. Βασιλείου κατοίκου Αθηνών. 2) Αριθ: 680, ονομ. αξίας 8.150 δρχ., λήξεως 30 Μαρτίου αποδοχής Γ. Γεωργίου εμπόρου Πατρών. 3) Αριθ. 5080, ονομ. αξίας 12.000 δρχ., λήξεως 31 Ιαν/ρίου 1979, αποδοχής Δ. Δημητρίου εμπόρου Θεσ/νίκης. 4) Αριθ. 2020, ονομ. αξίας 4.000 δρχ., λήξεως 14 Απριλίου 1979 του Ε. Ευθυμίου εμπόρου Καλαμάτας. Να συνταχθεί το πινάκιο προεξοφλήσεως και να βρεθεί το καθαρό ποσό που θα εισπράξει ο Α. Ανδρέου, αν το προεξοφλητικό επιτόκιο είναι 12%, η προμήθεια $^1/_2$%, τα εισπρακτικά $^1/_4$%, το χαρτόσημο 1‰ για κάθε χιλιάδα και για τμήμα της χιλιάδας και το χαρτόσημο του πινακίου 12 δρχ. Η προμήθεια, τα εισπρακτικά και το χαρτόσημο υπολογίζονται επί της ονομ. αξίας κάθε συν/κής.

(Απ. 29.647)

41. Ο έμπορος Χ προσκόμισε στο Γ΄ υποκατάστημα της Εμπορικής Τράπεζας στην Αθήνα στις 25 Αυγούστου 1978 τις εξής συν/κές: 1) Αριθ. 3140, ονομ. αξίας 20.000 δρχ., λήξεως 4.10.78, αποδοχής Η. Η. εμπόρου Αθηνών. 2) Αριθ. 3138, ονομ. αξίας 10.000 δρχ., λήξεως 5.9.78, αποδοχής Θ. Θ. κατοίκου Θεσ/νίκης. 3) Αριθ. 3141, ονομ. αξίας 38.000 δρχ., λήξεως 3.11.78, αποδοχής Ι. Ι. εμπόρου Πατρών. 4) Αριθ. 3139, ονομ. αξίας 15.000 δρχ., λήξεως 24.9.78, αποδοχής Κ. Κ. εμπόρου Βόλου. 5) Αριθ. 3142, ονομ. αξίας 15.000 δρχ., λήξεως 23.11.78, αποδοχής Λ. Λ. καπνεμπόρου Αγρινίου.

Να συνταχθεί το πινάκιο προεξοφλήσεως και να βρεθεί το καθαρό ποσό που θα δώσει η τράπεζα στον Χ, αν το επιτόκιο είναι 12%, η προμήθεια $^1/_2$%, τα έξοδα αλλαγής θέσεως $^1/_4$%, το χαρτόσημο 1‰ και το χαρτόσημο του πινακίου 12 δρχ. Η προμήθεια, τα έξοδα και το χαρτόσημο υπολογίζονται επί της ονομ. αξίας κάθε συν/κής.

(Απ. 95.372)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

ΓΡΑΜΜΑΤΙΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ — ΚΟΙΝΗ ΚΑΙ ΜΕΣΗ ΛΗΞΗ

6.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί.

Στις εμπορικές συναλλαγές, συμβαίνει πολλές φορές, ο οφειλέτης ενός γραμματίου να ζητήσει από τον πιστωτή την αντικατάσταση δύο ή περισσοτέρων γραμματίων διαφόρων λήξεων με ένα **ενιαίο γραμμάτιο,** ή την αντικατάσταση ενός ενιαίου γραμματίου με δύο ή περισσότερα γραμμάτια, τα οποία να είναι οικονομικώς **ισοδύναμα** με το ενιαίο γραμμάτιο. (Στο παρόν κεφάλαιο θα χρησιμοποιούμε μόνο τον όρο «γραμμάτια» και θα εννοούμε καί τα γραμμάτια εις διαταγήν και τις συναλλαγματικές).

Η αντικατάσταση γραμματίων στηρίζεται στην **αρχή της οικονομικής ισοδυναμίας** και πρέπει να γίνει χωρίς κέρδος ή ζημία του χρεώστη ή του πιστωτή.

Για να πραγματοποιηθεί οικονομική ισοδυναμία μεταξύ του ενιαίου γραμματίου και των **αντικαθισταμένων** γραμματίων (δηλαδή των γραμματίων που θα αντικαταστήσουν το ενιαίο γραμμάτιο) πρέπει **το άθροισμα των παρουσών αξιών των αντικαθισταμένων γραμματίων να ισούται με την παρούσα αξία του ενιαίου γραμματίου,** σε ορισμένη χρονική στιγμή και με το ίδιο επιτόκιο. Επομένως, για τη λύση οποιουδήποτε προβλήματος στα ισοδύναμα γραμμάτια, θα καταστρώνεται μια εξίσωση, η οποία λέγεται **εξίσωση ισοδυναμίας.** Το πρώτο μέλος της εξισώσεως ισοδυναμίας θα αποτελείται από την παρούσα αξία του ενιαίου γραμματίου και το δεύτερο μέλος της εξισώσεως θα αποτελείται από το άθροισμα των παρουσών αξιών των αντικαθισταμένων γραμματίων.

Η χρονική στιγμή κατά την οποία η παρούσα αξία του ενιαίου γραμματίου είναι ίση με το άθροισμα των παρουσών αξιών των αντικαθισταμένων γραμματίων, ονομάζεται **εποχή ισοδυναμίας.** Εποχή ισοδυναμίας μπορεί να είναι: α) η **ημέρα υπολογισμού,** δηλαδή η ημερομηνία που γίνεται η αντικατάσταση των γραμματίων, ή β) η **κοινή λήξη,** δηλαδή η ημερομηνία λήξεως του ενιαίου γραμματίου που αντικαθιστά τα άλλα γραμμάτια, ή γ) μια οποιαδήποτε ημερομηνία. Στην πράξη, ως εποχή ισοδυναμίας προτιμάται η κοινή λήξη, γιατί παρέχει ευκολία στους υπολογισμούς.

Στα ισοδύναμα γραμμάτια, το γενικό πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Γραμμάτια ονομαστικής αξίας: K_1, K_2, K_3, ..., K_μ, τα οποία λήγουν αντιστοίχως μετά: ν_1, ν_2, ν_3, ..., ν_μ ημέρες, αντικαθιστώνται με άλλο ισοδύναμο γραμμάτιο, ονομαστικής αξίας K, το οποίο λήγει μετά ν ημέρες προς επιτόκιο i.

Στο πρόβλημα αυτό μπορεί να ζητείται:

1) Η εύρεση της ονομαστικής αξίας του ενιαίου γραμματίου (= K).

2) Η εύρεση της ονομαστικής αξίας (ή της λήξεως) οποιουδήποτε γραμματίου ($K_1, K_2, ..., K_\mu$).

3) Η εύρεση της κοινής λήξεως (= ν).

4) Η εύρεση του επιτοκίου, κ.ά.

Κάθε πρόβλημα θα λύνεται με εποχή ισοδυναμίας: α) την ημέρα υπολογισμού και β) την κοινή λήξη. Σε κάθε περίπτωση θα εφαρμόζεται μόνο η εξωτερική προεξόφληση, γιατί η εσωτερική προεξόφληση δεν εφαρμόζεται στην πράξη, διότι απαιτούνται κοπιώδεις υπολογισμοί.

Όπως είπαμε πιο πάνω για να πραγματοποιείται κάθε φορά η οικονομική ισοδυναμία, πρέπει να ισχύει η παρακάτω θεμελιώδης εξίσωση ισοδυναμίας:

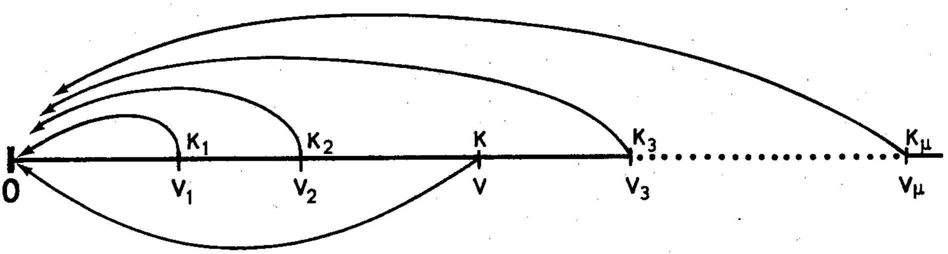
Παρούσα αξία του Κ = Παρ. αξία του K_1 + Παρ. αξία του K_2 + Παρ. αξία του K_3 + ... + Παρ. αξία του K_μ.

Για την καλύτερη κατανόηση κάθε προβλήματος, τοποθετούμε όλα τα γραμμάτια με τις αντίστοιχες λήξεις πάνω σε μια ημιευθεία ΟΧ, στην οποία το Ο θα παριστάνει την αφετηρία υπολογισμού των τοκοφόρων ημερών.

6.2 Εύρεση της ονομαστικής αξίας του ενιαίου γραμματίου.

Υποθέτομε ότι γραμμάτια $K_1, K_2, K_3, ..., K_\mu$, τα οποία λήγουν αντιστοίχως μετά $v_1, v_2, v_3, ..., v_\mu$ ημέρες από σήμερα (= 0), θέλομε να τα αντικαταστήσομε με ένα ενιαίο γραμμάτιο (= Κ), το οποίο να λήγει μετά ν ημέρες από σήμερα, με επιτόκιο i. Ποια πρέπει να είναι η ονομαστική αξία του Κ, ώστε να υπάρχει οικονομική ισοδυναμία; Εποχή ισοδυναμίας: α) η ημέρα υπολογισμού, β) η κοινή λήξη και γ) η τυχούσα ημέρα ρ. Προεξόφληση: εξωτερική και εσωτερική. Έτος μεικτό.

Α΄ Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού:



α) Εξωτερικώς. Για να πραγματοποιηθεί οικονομική ισοδυναμία κατά τη χρονική στιγμή 0 (ημέρα υπολογισμού) πρέπει να είναι:

Παρούσα αξία Κ = παρ. αξία K_1 + παρ. αξία K_2 + παρ. αξία K_3 + ... + παρ. αξία K_μ. Συνεπώς, η εξίσωση ισοδυναμίας θα είναι:

$$K - \frac{Kv}{\Delta} = K_1 - \frac{K_1 v_1}{\Delta} + K_2 - \frac{K_2 v_2}{\Delta} + ... + K_\mu - \frac{K_\mu v_\mu}{\Delta} \qquad \textbf{(22)}$$

Λύνοντας τώρα ως προς Κ βρίσκομε:

$$K = \frac{\Delta(K_1 + K_2 + \dots + K_\mu)}{\Delta - v} - \frac{K_1 v_1 + K_2 v_2 + \dots + K_\mu v_\mu}{\Delta - v} \tag{22α}$$

Είναι όμως προτιμότερο να εκτελέσομε τις πράξεις στο β΄ μέλος της (22) και έπειτα να τη λύσομε ως προς K.

Αν το έτος υπολογισμού είναι πολιτικό, τότε θέτομε όπου $\Delta = 365/i$.

Παρατηρήσεις.

1) Αν η κοινή λήξη ($= v$) είναι μικρότερη από τις λήξεις των αντικαθισταμένων γραμματίων, τότε η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου ($= K$) θα είναι μικρότερη από το άθροισμα των ονομαστικών αξιών των αντικαθισταμένων γραμματίων, δηλαδή: αν $v < v_1, v_2, v_3, \dots$, τότε: $K < K_1 + K_2 + K_3 + \dots$.

2) Αν η κοινή λήξη είναι μεγαλύτερη από όλες τις άλλες λήξεις, τότε: $K > K_1 + K_2 + K_3 + \dots$.

3) Αν η κοινή λήξη βρίσκεται ανάμεσα στις λήξεις των άλλων γραμματίων, τότε το K μπορεί να είναι μεγαλύτερο, ίσο ή και μικρότερο από το άθροισμα των ονομαστικών αξιών των αντικαθισταμένων γραμματίων.

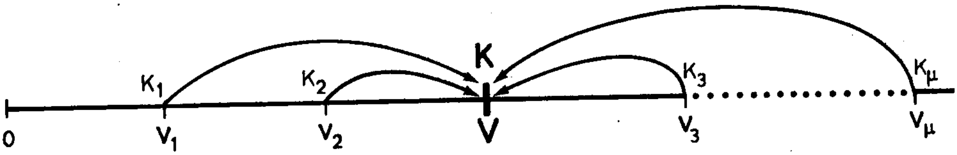
4) Αν ανάμεσα στα γραμμάτια υπάρχουν μετρητά ή επιταγές, τότε η λήξη τους συμπίπτει με την ημέρα υπολογισμού.

β) Εσωτερικώς. Η εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

$$K - \frac{Kv}{\Delta + v} = K_1 - \frac{K_1 v_1}{\Delta + v_1} + K_2 - \frac{K_2 v_2}{\Delta + v_2} + \dots + K_\mu - \frac{K_\mu v_\mu}{\Delta + v_\mu}, \tag{23}$$

Η εξίσωση (23) μπορεί να λυθεί για οποιοδήποτε άγνωστο, εκτός του Δ, διότι αν έχομε μ γραμμάτια, τότε η (23) θα είναι μιοστού βαθμού.

Β΄ Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη:



Για να πραγματοποιηθεί οικονομική ισοδυναμία κατά τη χρονική στιγμή v ($=$ κοινή λήξη) που λήγει το K, πρέπει πάλι η παρούσα αξία του K να ισούται με το άθροισμα των παρουσών αξιών των $K_1, K_2, K_3, \dots K_\mu$. Πρέπει να έχομε υπόψη μας, ότι η παρούσα αξία του K την ημέρα της λήξεώς του ισούται με την ονομαστική του αξία.

α) Εξωτερικώς. Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση της οικονομικής ισοδυναμίας θα είναι:

$$\mathbf{K = K_1 - \frac{K_1(v_1 - v)}{\Delta} + K_2 - \frac{K_2(v_2 - v)}{\Delta} + \dots + K_\mu - \frac{K_\mu(v_\mu - v)}{\Delta}} \tag{24}$$

Η τιμή του K θα βρεθεί, αν εκτελεσθούν οι πράξεις στο β΄ μέλος της (24).

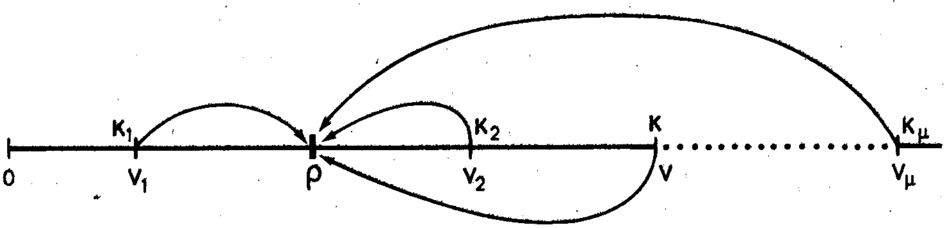
Παρατήρηση. Οι διαφορές $(v_1 - v)$, $(v_2 - v)$, κλπ. λογίζονται αλγεβρικές. Συνεπώς, αν ένα από τα K_1, K_2,... βρίσκεται πριν από την κοινή λήξη (= v) και μεταφερθεί στην κοινή λήξη, πρέπει να αυξηθεί η ονομαστική του αξία κατά τον τόκο των ημερών που μεσολαβούν από τη λήξη του ως την κοινή λήξη. Αν όμως ένα από τα K_1, K_2,... βρίσκεται μετά την κοινή λήξη, τότε πρέπει να ελαττωθεί η ονομαστική του αξία κατά τον τόκο των ημερών που μεσολαβούν από την κοινή λήξη ως την ημέρα λήξεως του γραμματίου.

β) Εσωτερικώς. Η εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

$$K = K_1 - \frac{K_1(v_1 - v)}{\Delta + (v_1 - v)} + K_2 - \frac{K_2(v_2 - v)}{\Delta + (v_2 - v)} + \ldots + K_\mu - \frac{K_\mu(v_\mu - v)}{\Delta + (v_\mu - v)} \qquad (25)$$

Εκτελώντας τις πράξεις στο β΄ μέλος βρίσκομε το Κ.

Γ΄ Εποχή ισοδυναμίας η τυχούσα ημέρα ρ:



α) Εξωτερικώς. Η εξίσωση ισοδυναμίας κατά τη χρονική στιγμή (ημέρα) ρ θα είναι:

$$K - \frac{K(v - \rho)}{\Delta} = K_1 - \frac{K_1(v_1 - \rho)}{\Delta} + \ldots + K_\mu - \frac{K_\mu(v_\mu - \rho)}{\Delta} \qquad (26)$$

β) Εσωτερικώς. Η εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

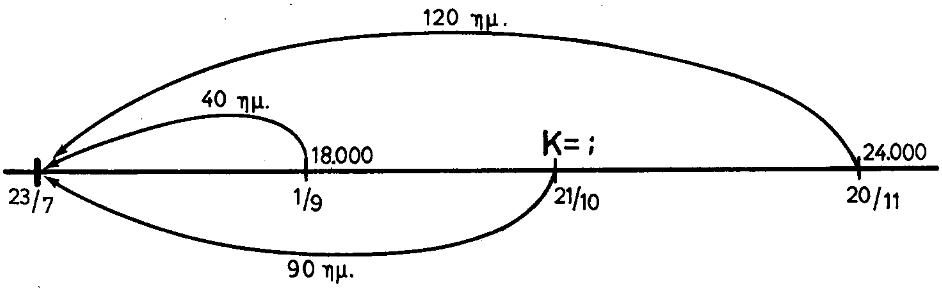
$$K - \frac{K(v - \rho)}{\Delta + (v - \rho)} = K_1 - \frac{K_1(v_1 - \rho)}{\Delta + (v_1 - \rho)} + \ldots + K_\mu - \frac{K_\mu(v_\mu - \rho)}{\Delta + (v_\mu - \rho)} \qquad (27)$$

Παρατήρηση. Οι εξισώσεις (26) και (27) αποτελούν τις γενικές μορφές των εξισώσεων στα ισοδύναμα γραμμάτια, γιατί αν σε αυτές θέσομε όπου ρ = 0, τότε προκύπτουν αντιστοίχως οι εξισώσεις (22) και (23). Αν τώρα θέσομε (στις εξισώσεις (26) και (27) όπου ρ = v, τότε προκύπτουν αντιστοίχως οι εξισώσεις (24) και (25).

Παράδειγμα 1ο. Έστω ότι έχομε τα γραμμάτια 18.000 δρχ. και 24.000 δρχ., τα οποία λήγουν αντιστοίχως την 1η Σεπτεμβρίου και την 20η Νοεμβρίου, και θέλομε να τα αντικαταστήσομε στις 23 Ιουλίου με ένα γραμμάτιο που να λήγει την 21η Οκτωβρίου. Ποια είναι η ονομαστική αξία του νέου γραμματίου, αν το επιτόκιο είναι 6%, το έτος μεικτό και η εποχή ισοδυναμίας: 1) η ημέρα υπολογισμού, 2) η κοινή λήξη και 3) η 21η Σεπτεμβρίου. Προεξόφληση εξωτερική.

Λύση.

I. Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού:



$K_1 = 18.000$	$K = ;$	$K_2 = 24.000$	$i = 0,06$
$v_1 = 40$	$v = 90$	$v_2 = 120$	$\Delta = 6.000$

Θα αντικαταστήσομε τα δεδομένα στην εξίσωση (22), δηλαδή στην εξίσωση:

$$K - \frac{Kv}{\Delta} = K_1 - \frac{K_1 v_1}{\Delta} + K_2 - \frac{K_2 v_2}{\Delta}$$

$$K - \frac{K \times 90}{6000} = 18.000 - \frac{18.000 \times 40}{6000} + 24.000 - \frac{24.000 \times 120}{6000}$$

ή

$$K - \frac{K \times 3 \times 30}{30 \times 200} = 18.000 - \frac{3 \times 6000 \times 40}{6000} + 24.000 - \frac{4 \times 6000 \times 120}{6000}$$

ή

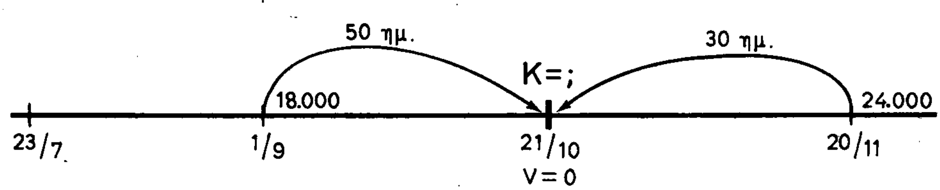
$$K - \frac{3K}{200} = 18.000 - 120 + 24.000 - 480 = 41.400$$

ή $\quad 200K - 3K = 41.400 \times 200$ ή $197K = 8.280.000$

καί $\quad \boxed{K = 42.030{,}46}$

Ώστε: η ονομαστική αξία του γραμματίου που λήγει την 21η Οκτωβρίου και αντικατάστησε τα δυο γραμμάτια είναι 42.030,46 δρχ.

II. Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη:



$K_1 = 18.000$	$K = ;$	$K_2 = 24.000$	$i = 0,06$
$v_1 = 50$	$v = 0$	$v_2 = 30$	$\Delta = 6.000$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στην εξίσωση:

$$K - \frac{K\nu}{\Delta} = K_1 + \frac{K_1(\nu_1 - \nu)}{\Delta} + K_2 - \frac{K_2(\nu_2 - \nu)}{\Delta}$$

και έχομε:

$$K - \frac{K \times 0}{\Delta} = 18.000 + \frac{18.000 \times 50}{6000} + 24.000 - \frac{24.000 \times 30}{6000}$$

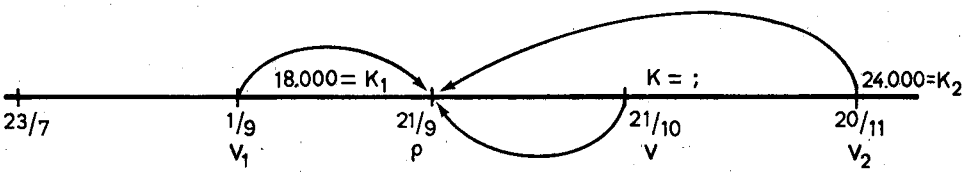
ή $K = 18.000 + \dfrac{3 \times 6000 \times 50}{6000} + 24.000 - \dfrac{4 \times 6000 \times 30}{6000}$

ή $K = 18.000 + 150 + 24.000 - 120$

και $\boxed{K = 42.030}$

Σημείωση. Για αφετηρία υπολογισμού των τοκοφόρων ημερών πήραμε την 21η Οκτωβρίου, γι' αυτό $\nu = 0$.

III. Εποχή ισοδυναμίας η 21η Σεπτεμβρίου:



Για αφετηρία υπολογισμού των τοκοφόρων ημερών παίρνομε τήν 23η Ιουλίου, οπότε:

$$\nu_1 = 40 \quad \rho = 60 \quad \nu = 90 \quad \nu_2 = 120$$

Θα εφαρμόσομε την παρακάτω εξίσωση οικονομικής ισοδυναμίας:

$$K - \frac{K(\nu - \rho)}{\Delta} = K_1 - \frac{K_1(\nu_1 - \rho)}{\Delta} + K_2 - \frac{K_2(\nu_2 - \rho)}{\Delta}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα έχομε:

$$K - \frac{K(90 - 60)}{6000} = 18.000 - \frac{18.000(40 - 60)}{6000} + 24.000 - \frac{24.000(120 - 60)}{6000}$$

ή

$$K - \frac{K \times 30}{6000} = 18.000 + \frac{18.000 \times 20}{6000} + 24.000 - \frac{24.000 \times 60}{6000}$$

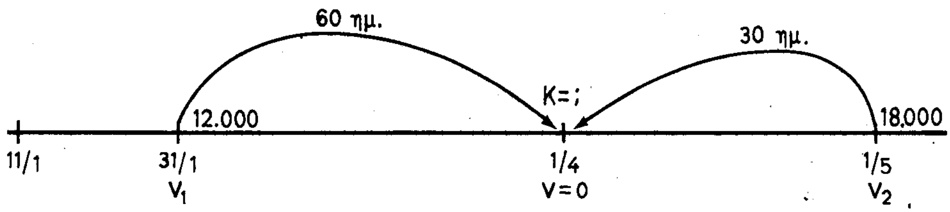
Λύνοντας ως προς Κ βρίσκομε: $\boxed{K = 42.030,15}$

Παρατήρηση. Για αφετηρία υπολογισμού των τοκοφόρων ημερών πήραμε, στις περιπτώσεις I και III, την 23η Ιουλίου. Αυτή πρέπει να είναι γνωστή σε κάθε πρόβλημα, αν εποχή ισοδυναμίας είναι η ημέρα υπολογισμού. Αν όμως εποχή ισοδυναμίας είναι η κοινή λήξη, τότε ως αφετηρία υπολογισμού των τοκοφόρων ημερών παίρνομε την κοινή λήξη, γιατί μας παρέχει ευκολία στους υπολογισμούς.

Παράδειγμα 2ο. Έχει κάποιος δύο γραμμάτια: α) 12.000 δρχ. που λήγει την 31η Ιαν/ρίου και β) 18.000 δρχ., το οποίο λήγει την 1η Μαΐου και θέλει να τα αντικαταστήσει την 11η Ιανουαρίου με ένα ενιαίο γραμμάτιο, το οποίο να λήγει την 1η Απριλίου. Να βρεθεί η ονομαστική αξία του νέου γραμματίου. Εποχή ισοδυναμίας: 1) η κοινή λήξη και 2) η 11η Ιανουαρίου. Επιτόκιο 7%. Έτος πολιτικό. Προεξόφληση εξωτερική.

Λύση.

I. Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη:



$K_1 = 12.000$	$K = ;$	$K_2 = 18.000$	$i = 0,07$
$V_1 = 60$	$V = 0$	$V_2 = 30$	

Θα αντικαταστήσομε τα δεδομένα στην παρακάτω εξίσωση:

$$K = K_1 + \frac{K_1 v_1}{\Delta} + K_2 - \frac{K_2 v_2}{\Delta}, \text{ όπου: } \Delta = 365 : 0,07$$

$$K = 12.000 + \frac{12.000 \times 60}{\dfrac{365}{0,07}} + 18.000 - \frac{18.000 \times 30}{\dfrac{365}{0,07}}$$

ή

$$K = 30.000 + \frac{12.000 \times 60 \times 0,07}{365} - \frac{18.000 \times 30 \times 0,07}{365}$$

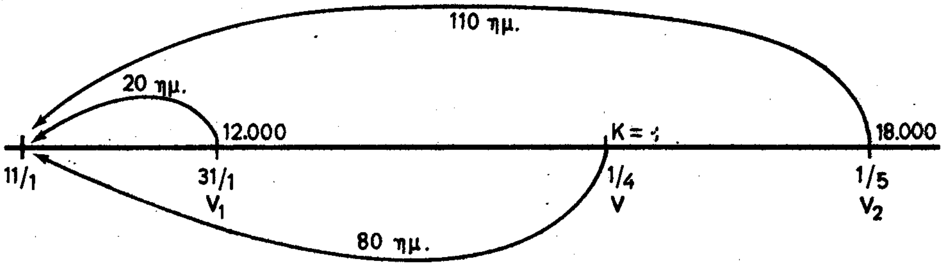
$$= 30.000 + \frac{12.000 \times 60 \times 0,07 - 18.000 \times 30 \times 0,07}{365}$$

$$= 30.000 + \frac{50.400 - 37.800}{365} = 30.000 + 34,52$$

$$\text{και } \boxed{K = 30.034,52}$$

Παρατηρούμε ότι: στο γραμμάτιο των 12.000 δρχ. προσθέσαμε τόκο 60 ημερών, ενώ το γραμμάτιο των 18.000 δρχ. προεξοφλήθηκε για 30 ημέρες. Γενικώς: Στα γραμμάτια που βρίσκονται πριν από την κοινή λήξη θα προσθέτομε τον ανάλογο τόκο, ενώ τα γραμμάτια του λήγουν μετά την κοινή λήξη θα προεξοφλούνται για τις ανάλογες ημέρες.

II. Εποχή ισοδυναμίας η 11η Ιανουαρίου:



$K_1 = 12.000$ $\quad$ $K = \;;$ $\quad$ $K_2 = 18.000$ $\quad$ $i = 0{,}07$

$V_1 = 20$ $\quad$ $V = 80$ $\quad$ $V_2 = 110$

Η εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

$$K - \frac{K \cdot v \cdot i}{365} = K_1 - \frac{K_1 \cdot v_1 \cdot i}{365} + K_2 - \frac{K_2 \cdot v_2 \cdot i}{365}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα έχομε:

$$K - \frac{K \times 80 \times 0{,}07}{365} = 12.000 - \frac{12.000 \times 20 \times 0{,}07}{365} + 18.000 - \frac{18.000 \times 110 \times 0{,}07}{365}$$

Λύνοντας ως προς K βρίσκομε: $\boxed{K = 30.035{,}06}$

6.3 Εύρεση της ονομαστικής αξίας ή της λήξεως οποιουδήποτε γραμματίου.

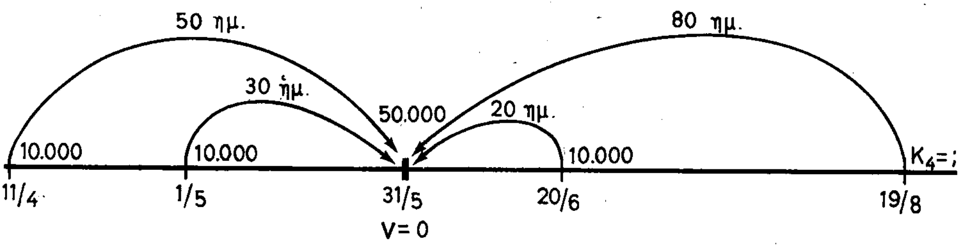
Στην περίπτωση αυτή, μπορεί να είναι άγνωστη: 1) η ονομαστική αξία του K_1 ή του K_2 ή του $K_3, \ldots$, ή του K_μ. 2) η λήξη οποιουδήποτε γραμματίου, δηλ. το v_1 ή το $v_2, \ldots$, ή το v_μ.

Για την εύρεση της ονομαστικής αξίας ή της λήξεως οποιουδήποτε γραμματίου, αντικαθιστούμε τα δεδομένα στην κατάλληλη εξίσωση και έπειτα λύνομε ως προς τον άγνωστο του προβλήματος. Πρέπει να προσέχομε να κατασκευάζομε σωστά το διάγραμμα, γιατί από αυτό εξαρτάται η λύση του προβλήματος.

Παράδειγμα 1ο. Ο έμπορος Ε δεν μπορεί να εξοφλήσει γραμμάτιο 50.000 δρχ. που λήγει την 31η Μαΐου, γι' αυτό υπογράφει τα εξής γραμμάτια: α) 10.000 δρχ. λήξεως 11 Απριλίου, β) 10.000 δρχ. λήξεως 1 Μαΐου, γ) 10.000 δρχ. λήξεως 20

Ιουνίου και δ) γραμμάτιο που λήγει στις 19 Αυγούστου. Να βρεθεί η ονομαστική αξία του τελευταίου γραμματίου, αν το επιτόκιο είναι 8% και το έτος πολιτικό. Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη.

Λύση.



$K_1 = 10.000$	$K_2 = 10.000$	$K = 50.000$	$K_3 = 10.000$	$K_4 =$;
$V_1 = 50$	$V_2 = 30$	$V = 0$	$V_3 = 20$	$V_4 = 80$

Αφού εποχή ισοδυναμίας είναι η κοινή λήξη, η εξίσωση ισοδυναμίας θα είναι:

$$K = K_1 - \frac{K_1 v_1}{\Delta} + K_2 - \frac{K_2 v_2}{\Delta} + K_3 - \frac{K_3 v_3}{\Delta} + K_4 - \frac{K_4 v_4}{\Delta}$$

Επειδή το επιτόκιο δεν είναι κατάλληλο για σταθερό διαιρέτη, θέτομε όπου $\Delta = 365 : 0{,}08$. Αντικαθιστώντας τα δεδομένα έχομε:

$$50.000 = 10.000 + \frac{10.000 \times 50 \times 0{,}08}{365} + 10.000 + \frac{10.000 \times 30 \times 0{,}08}{365} +$$

$$+ 10.000 - \frac{10.000 \times 20 \times 0{,}08}{365} + K_4 - \frac{K_4 \times 80 \times 0{,}08}{365}$$

ή

$$50.000 - 30.000 - \frac{10.000 \times 50 \times 0{,}08 + 10.000 \times 30 \times 0{,}08 - 10.000 \times 20 \times 0{,}08}{365}$$

$$= K_4 - \frac{6{,}4\, K_4}{365}$$

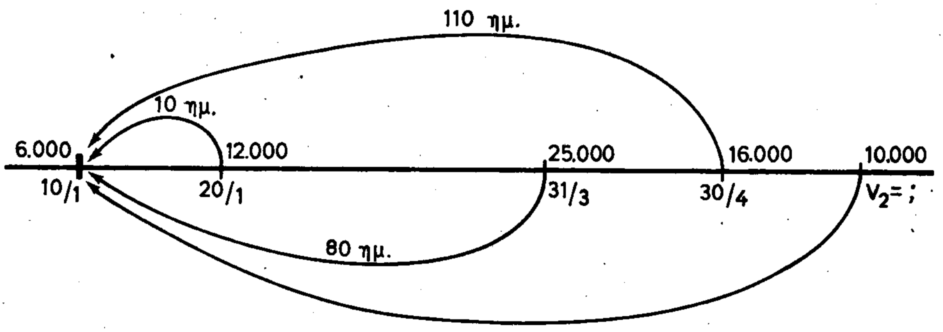
ή $365K_4 - 6{,}4K_4 = 19.868{,}5 \times 365$ και $\boxed{K_4 = 20.223{,}90.}$

Ώστε: η ονομαστική αξία του γραμματίου που λήγει στίς 19 Αυγούστου είναι 20.223,90 δρχ.

Παράδειγμα 2ο. Οφείλει κάποιος: γραμμάτιο 12.000 δρχ. που λήγει την 20η Ιανουαρίου, άλλο γραμμάτιο 16.000 δρχ. που λήγει την 30η Απριλίου και 6000 δρχ. μετρητά. Για να εξοφλήσει το χρέος υπογράφει στις 10 Ιανουαρίου δύο γραμμάτια: α) 25.000 δρχ., το οποίο λήγει την 31η Μαρτίου και β) 10.000 δρχ.

Πότε πρέπει να λήγει το β' γραμμάτιο για να εξοφληθεί το χρέος; Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού (10 Ιαν.). Επιτόκιο 6% και έτος μεικτό.

Λύση.



Για να πραγματοποιηθεί οικονομική ισοδυναμία πρέπει το άθροισμα των παρουσών αξιών των παλαιών γραμματίων να είναι ίσο με το άθροισμα των παρουσών αξιών των νέων γραμματίων, δηλαδή πρέπει να ισχύει η παρακάτω ισότητα:

$$6000 + 12.000 - \frac{12.000 \times 10}{6000} + 16.000 - \frac{16.000 \times 110}{6000} =$$

$$= 25.000 - \frac{25.000 \times 80}{6000} + 10.000 - \frac{10.000 \times v_2}{6000}$$

ή $$34.000 - 20 - 293{,}33 = 35.000 - 333{,}33 - \frac{5v_2}{3}$$

και $v_2 = 588$

Ώστε: το β' γραμμάτιο πρέπει να λήγει 588 ημέρες μετά τη 10η Ιανουαρίου, δηλαδή την 21η Ιουνίου του επομένου έτους.

6.4 Εύρεση της κοινής λήξεως.

Είπαμε ότι: **κοινή λήξη** είναι η ημερομηνία που λήγει το ενιαίο γραμμάτιο, το οποίο αντικαθιστά τα άλλα γραμμάτια.

Στην περίπτωση αυτή έχομε τα γραμμάτια:

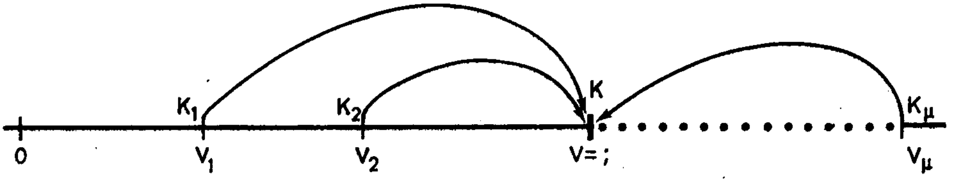
$$K_1, K_2, K_3, \ldots, K_\mu$$

τα οποία λήγουν αντιστοίχως μετά

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_\mu$$

ημέρες από σήμερα. Τα πιο πάνω γραμμάτια τα αντικαθιστούμε με ένα ενιαίο γραμμάτιο, ονομαστικής αξίας K πρός επιτόκιο i. Πότε πρέπει να λήγει το γραμμάτιο K, ώστε να πραγματοποιηθεί η οικονομική ισοδυναμία; Εποχή ισοδυναμίας: I) η κοινή λήξη και II) η ημέρα υπολογισμού.

I. Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη:



Υποθέτομε ότι το Κ θα λήγει μετά ν ημέρες από σήμερα (= 0). Η γενική μορφή της εξισώσεως της οικονομικής ισοδυναμίας είναι:

$$K = K_1 - \frac{K_1(v_1 - v)}{\Delta} + K_2 - \frac{K_2(v_2 - v)}{\Delta} + \ldots + K_\mu - \frac{K_\mu(v_\mu - v)}{\Delta}$$

Την εξίσωση αυτή πρέπει να λύσομε ως προς ν.

$K\Delta = K_1\Delta - K_1v_1 + K_1v + K_2\Delta - K_2v_2 + K_2v + \ldots + K_\mu\Delta - K_\mu v_\mu + K_\mu v$

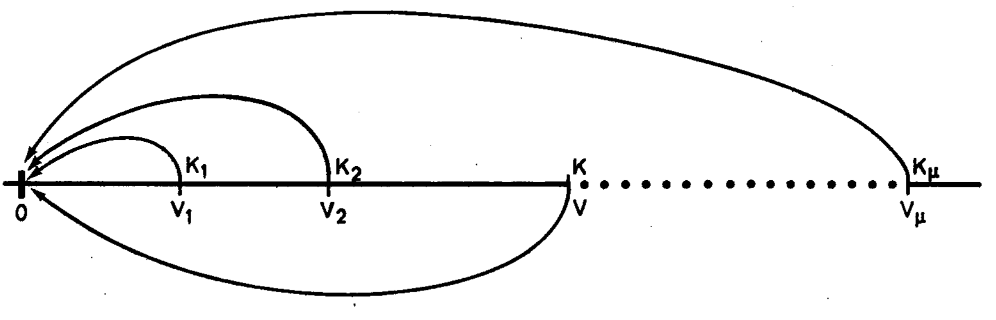
ή $K_1v + K_2v + \ldots + K_\mu v = K\Delta - \Delta(K_1 + K_2 + \ldots + K_\mu) + (K_1v_1 + K_2v_2 + \ldots + K_\mu v_\mu)$

ή $v(K_1 + K_2 + \ldots + K_\mu) = \Delta[K - (K_1 + K_2 + \ldots + K_\mu)] + (N_1 + N_2 + \ldots + N_\mu)$

και $$v = \frac{N_1 + N_2 + \ldots + N_\mu}{K_1 + K_2 + \ldots + K_\mu} + \Delta \cdot \frac{K - (K_1 + K_2 + \ldots + K_\mu)}{K_1 + K_2 + \ldots + K_\mu} \qquad (28)$$

Αν το επιτόκιο δεν είναι κατάλληλο για σταθερό διαιρέτη, τότε θέτομε όπου $\Delta = 360 : i$ ή $365 : i$.

II. Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού:



Η εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

$$K - \frac{Kv}{\Delta} = K_1 - \frac{K_1v_1}{\Delta} + K_2 - \frac{K_2v_2}{\Delta} + \ldots + K_\mu - \frac{K_\mu v_\mu}{\Delta}$$

Εκτελούμε τις πράξεις στο β΄ μέλος και έχομε:

$$K - \frac{K\nu}{\Delta} = (K_1 + K_2 + \dots + K_\mu) - \frac{K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + \dots + K_\mu\nu_\mu}{\Delta}$$

$$\text{ἤ } [K - (K_1 + K_2 + \dots + K_\mu) \cdot \Delta = K \cdot \nu - (K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + \dots + K_\mu\nu_\mu)$$

$$\text{ἤ } K \cdot \nu = K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + \dots + K_\mu\nu_\mu + \Delta\,[K - (K_1 + K_2 + \dots + K_\mu)]$$

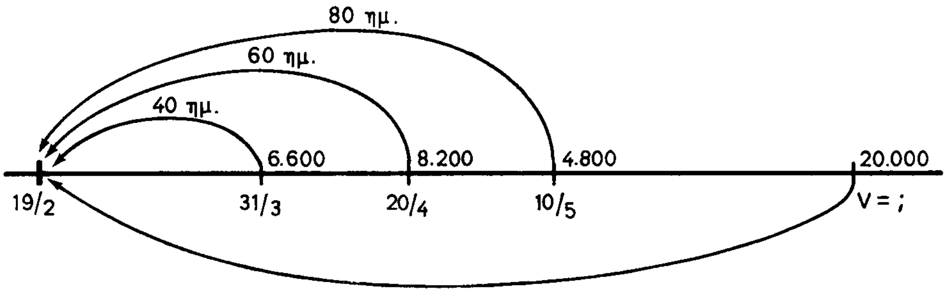
και $$\boldsymbol{\nu = \frac{K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + \dots + K_\mu\nu_\mu}{K} + \Delta \cdot \frac{K - (K_1 + K_2 + \dots + K_\mu)}{K}} \qquad \textbf{(29)}$$

Σημείωση. Η κοινή λήξη (= ν) μπορεί να βρεθεί και απευθείας από την εξίσωση ισοδυναμίας, δηλαδή: εκτελούμε τις πράξεις στο β΄ μέλος της εξισώσεως ισοδυναμίας και καταλήγομε στην εξίσωση:

$K - \dfrac{K\nu}{\Delta} = \Omega$. Λύνοντας αυτή ως προς ν βρίσκομε την κοινή λήξη.

Παράδειγμα. Πότε πρέπει να λήγει γραμμάτιο 20.000 δρχ., το οποίο στις 19 Φεβρουαρίου αντικαθιστά τα εξής γραμμάτια: α) 6600 δρχ. λήξεως 31 Μαρτίου, β) 8200 δρχ. λήξεως 20 Απριλίου και γ) 4800 δρχ. λήξεως 10 Μαΐου. Επιτόκιο 9%, έτος μεικτό. Εποχή ισοδυναμίας η 19η Φεβρουαρίου.

Λύση. Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού:



$K = 20.000$	$K_1 = 6.600$	$K_2 = 8.200$	$K_3 = 4.800$	$i = 0,09$
$V = ;$	$V_1 = 40$	$V_2 = 60$	$V_3 = 80$	$\Delta = 4.000$

α΄ λύση. Η εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

$$K - \frac{K\nu}{\Delta} = K_1 - \frac{K_1\nu_1}{\Delta} + K_2 - \frac{K_2\nu_2}{\Delta} + K_3 - \frac{K_3\nu_3}{\Delta}$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και έχομε:

$$20.000 - \frac{20.000 \cdot \nu}{4000} = 6600 - \frac{6600 \times 40}{4000} + 8200 - \frac{8200 \times 60}{4000} + 4800 - \frac{4800 \times 80}{4000}$$

ή $20.000 - 5 \cdot v = 19.600 - 280{,}5 = 19.319{,}5$

ή $5 \cdot v = 680{,}5$ και $v = 680{,}5 : 5 = 136{,}1 \approx 136$

Ώστε: Το γραμμάτιο των 20.000 δραχμών πρέπει να λήγει 136 ημέρες μετά τη 19 Φεβρουαρίου, δηλαδή στις 5 Ιουλίου.

β΄ λύση. Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (29)

$$v = \frac{6600 \times 40 + 8200 \times 60 + 4800 \times 80}{20.000} + 4.000 \times \frac{20.000 - 19.600}{20.000} =$$

$$= 56{,}1 + 80 = 136{,}1 \approx 136 \text{ ημέρες μετά τη } 19/2.$$

Παρατηρήσεις.

1) Για την εύρεση της κοινής λήξεως είναι προτιμότερο να αντικαθιστούμε τα δεδομένα στην εξίσωση ισοδυναμίας (με εποχή ισοδυναμίας την ημέρα υπολογισμού) και να την λύνομε ως προς v, γιατί η απομνημόνευση του τύπου (29) είναι δύσκολη.

2) Η κοινή λήξη δύο ή περισσοτέρων γραμματίων ισοδυναμεί με το χρόνο κατά τον οποίο όλα τα γραμμάτια που αντικαθιστά το ενιαίο γραμμάτιο μπορούν να πληρωθούν ταυτοχρόνως (= μέση λήξη).

6.5 Εύρεση της μέσης λήξεως.

Στην προηγούμενη παράγραφο είπαμε, ότι η κοινή λήξη δύο ή περισσοτέρων γραμματίων ισοδυναμεί με το χρόνο κατά τον οποίο τα γραμμάτια που αντικαθιστά το ενιαίο γραμμάτιο μπορούν να εξοφληθούν συγχρόνως. Αν όμως συμβεί η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου να είναι ίση με το άθροισμα των ονομαστικών αξιών των αντικαθισταμένων γραμματίων, τότε η κοινή λήξη ονομάζεται ειδικότερα **μέση λήξη.**

Ώστε: **Μέση λήξη είναι η περίπτωση εκείνη της κοινής λήξεως, κατά την οποία η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου ισούται με το άθροισμα των ονομαστικών αξιών των αντικαθισταμένων γραμματίων,** δηλαδή όταν είναι:

$$\mathbf{K = K_1 + K_2 + K_3 + \dots + K_\mu}$$

Συνεπώς, η μέση λήξη είναι ειδική περίπτωση της κοινής λήξεως.

Ο τύπος υπολογισμού της μέσης λήξεως προκύπτει ως εξής:

Αν στον τύπο (28), βάσει του οποίου υπολογίζεται η κοινή λήξη με εποχή ισοδυναμίας την κοινή λήξη, δηλαδή στον τύπο:

$$v = \frac{K_1 v_1 + K_2 v_2 + \dots + K_\mu v_\mu}{K_1 + K_2 + \dots + K_\mu} + \Delta \cdot \frac{K - (K_1 + K_2 + \dots + K_\mu)}{K_1 + K_2 + \dots + K_\mu}$$

ή στον τύπο (29), με τον οποίο βρίσκομε την κοινή λήξη με εποχή ισοδυναμίας την ημέρα υπολογισμού, δηλαδή στον τύπο:

$$v=\frac{K_1v_1+K_2v_2+\ldots+K_\mu v_\mu}{K}+\Delta\cdot\frac{K-(K_1+K_2+\ldots+K_\mu)}{K}$$

θέσομε όπου $K_1 + K_2 + \ldots + K_\mu = K$, τότε το δεύτερο κλάσμα του β΄ μέλους μηδενίζεται και έτσι προκύπτει ο τύπος υπολογισμού της μέσης λήξεως:

$$\mathbf{v=\frac{K_1v_1+K_2v_2+\ldots+K_\mu v_\mu}{K}=\frac{N_1+N_2+\ldots+N_\mu}{K}} \tag{30}$$

Ο τύπος (30) μπορεί να προκύψει και από τη γενική εξίσωση των ισοδυνάμων γραμματίων. Πράγματι, ας επιλύσομε ως προς v την εξίσωση:

$$K-\frac{Kv}{\Delta}=K_1-\frac{K_1v_1}{\Delta}+K_2-\frac{K_2v_2}{\Delta}+\ldots+K_\mu-\frac{K_\mu v_\mu}{\Delta}$$

Επειδή στη μέση λήξη είναι $K = K_1 + K_2 + \ldots + K_\mu$ η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{Kv}{\Delta}=\frac{K_1v_1}{\Delta}+\frac{K_2v_2}{\Delta}+\ldots+\frac{K_\mu v_\mu}{\Delta}$$

και

$$\mathbf{Kv=K_1v_1+K_2v_2+,\ldots,+K_\mu v_v=N_1+N_2+,\ldots,+N_\mu} \tag{31}$$

Από την εξίσωση (31) προκύπτει εύκολα ο τύπος (30)

Η εξίσωση (31) αποτελεί τη γενική εξίσωση επιλύσεως των προβλημάτων της μέσης λήξεως.

Ιδιότητες της μέσης λήξεως. Η μέση λήξη έχει τις ακόλουθες χαρακτηριστικές ιδιότητες:

I. Από τον τύπο (30) και την εξίσωση (31) συνάγεται ότι: **η μέση λήξη είναι ανεξάρτητη από το επιτόκιο και το έτος υπολογισμού** (πολιτικού ή μεικτού), γιατί ο τύπος (30) και η εξίσωση (31) δεν περιέχουν το i ή το Δ.

II. Η μέση λήξη είναι ανεξάρτητη από την ημέρα υπολογισμού. Για να απλοποιούνται όμως οι υπολογισμοί πρέπει να καθορίζεται (σαν ημέρα υπολογισμού) ημερομηνία, η οποία να βρίσκεται πριν από όλες τις λήξεις των γραμματίων.

III. Αν οι ονομαστικές αξίες των αντικαθισταμένων γραμματίων είναι μεταξύ τους ίσες, δηλαδή: **αν $K_1 = K_2 = K_3 = \ldots = K_\mu$ τότε η μέση λήξη ισούται με το μέσο όρο των λήξεων των γραμματίων.** Πράγματι: αν $K_1 = K_2 = K_3 = \ldots = K_\mu$, τότε ο τύπος (30) γίνεται:

$$v=\frac{K_1v_1+K_2v_2+K_3v_3+\ldots+K_\mu v_\mu}{K_1+K_2+K_3+\ldots+K_\mu}=\frac{K_1(v_1+v_2+v_3+\ldots+v_\mu)}{K_1\underbrace{(1+1+1+\ldots+1)}_{\mu\text{ φορές}}}$$

και

$$\mathbf{v=\frac{v_1+v_2+v_3+\ldots+v_\mu}{\mu}} \tag{32}$$

IV. Η μέση λήξη θα βρίσκεται πάντοτε ανάμεσα στη μικρότερη και στη μεγαλύτερη από τις δοσμένες λήξεις.

Παράδειγμα 1ο. Έχομε τέσσερα ίσα γραμμάτια, των οποίων το άθροισμα των ονομαστικών αξιών ειναι 24.000 δρχ. και λήγουν αντιστοίχως μετά 20, 40, 60 και 80 ημέρες από σήμερα και θέλομε να τα αντικαταστήσομε με ένα γραμμάτιο 24.000 δρχ. Μετά πόσες ημέρες από σήμερα θα λήγει το ενιαίο γραμμάτιο;

Λύση. Επειδή η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου είναι ίση με το άθροισμα των ονομαστικών αξιών των αντικαθισταμένων γραμματίων, συμπεραίνομε ότι πρόκειται για πρόβλημα μέσης λήξεως. Επίσης, επειδή $K_1 = K_2 = K_3 = K_4$, έπεται ότι η λήξη του ενιαίου γραμματίου (= K) ισούται με το μέσο όρο των λήξεων των αντικαθισταμένων γραμματίων. Συνεπώς, η λήξη του ενιαίου γραμματίου θα βρεθεί βάσει του τύπου (32), δηλαδή:

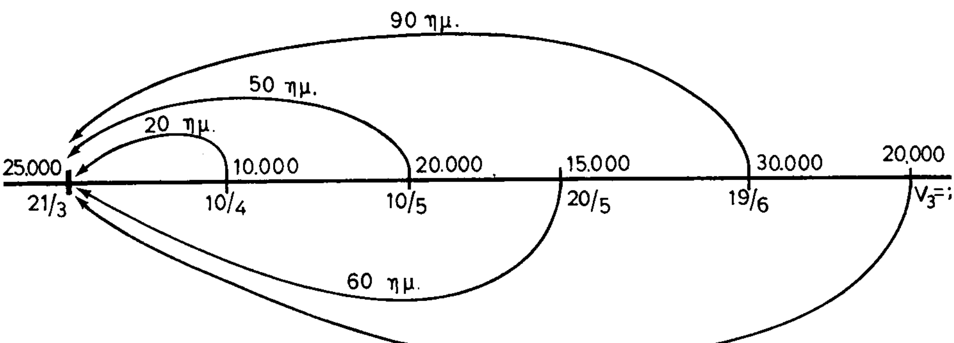
$$v = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{4} = \frac{20 + 40 + 60 + 80}{4} = \frac{200}{4} = 50$$

Ώστε: Το γραμμάτιο που θα αντικαταστήσει τα άλλα τέσσερα πρέπει να λήγει μετά 50 ημέρες από σήμερα.

Σημείωση. Το επιτόκιο και το έτος υπολογισμού δεν χρειάζονται, γιατί η μέση λήξη είναι ανεξάρτητη από το επιτόκιο και το έτος υπολογισμού.

Παράδειγμα 2ο. Οφείλει κάποιος τα εξής γραμμάτια:
α) 10.000 δρχ. λήξεως 10 Απριλίου, β) 20.000 δρχ. λήξεως 10 Μαΐου και γ) 30.000 δρχ. λήξεως 19 Ιουνίου. Για την εξόφλησή τους υπέγραψε τα εξής γραμμάτια: 1) 25.000 δρχ. λήξεως 21 Μαρτίου, 2) 15.000 δρχ. λήξεως 20 Μαΐου και 3) 20.000 δρχ. Να βρεθεί η λήξη του τελευταίου γραμματίου.

Λύση. Για την απλοποίηση των υπολογισμών, καθορίζομε ημέρα υπολογισμού την 21η Μαρτίου.



Η συνθήκη οικονομικής ισοδυναμίας είναι: $10.000 \times 20 + 20.000 \times 50 + 30.000 \times 90 = 25.000 \times 0 + 15.000 \times 60 + 20.000 \cdot v_3$ και $v_3 = 150$ ημέρες μετά την 21η Μαρτίου, δηλαδή στις 18 Αυγούστου πρέπει να λήγει το γραμμάτιο των 20.000 δρχ.

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί και ως εξής: Αντικαθιστούμε τα τρία γραμμάτια με ένα και βρίσκομε τη μέση λήξη, δηλαδή:

$60.000 \cdot v = 10.000 \times 20 + 20.000 \times 50 + 30.000 \times 90$

Από τη λύση προκύπτει $v = 65$.

Αντικαθιστώντας τώρα στην εξίσωση μέσης λήξεως (31) βρίσκομε τη λήξη του τρίτου γραμματίου, δηλαδή:

$60.000 \times 65 = 25.000 \times 0 + 15.000 \times 60 + 20.000 \cdot v_3$

και $v_3 = 150$.

Παράδειγμα 3ο. Έχομε ένα γραμμάτιο 60.000 δρχ., το οποίο λήγει μετά 100 ημέρες από σήμερα, και θέλομε να το αντικαταστήσομε με τέσσερα ίσα γραμμάτια, τα οποία λήγουν σε ίσα χρονικά διαστήματα. Να βρεθούν οι λήξεις των τεσσάρων γραμματίων.

Λύση. Κάθε γραμμάτιο θα έχει ονομ. αξία 15.000 δρχ (= 60.000:4). Αν το πρώτο γραμμάτιο λήγει μετά v_1 ημέρες, τότε το δεύτερο θα λήγει μετά $2v_1$, το τρίτο μετά $3v_1$ και το τέταρτο μετά $4v_1$ ημέρες. Επειδή είναι $K_1 = K_2 = K_3 = K_4$, θα εφαρμοσθεί η εξίσωση (31), στην οποία θέτομε: $K_2 = K_1$, $K_3 = K_1$, $K_4 = K_1$ και $v_2 = 2v_1$, $v_3 = 3v_1$, $v_4 = 4v_1$. Επομένως, θα έχομε: $Kv = K_1v_1 + K_1\,2v_1 + K_1\,3v_1 + K_1\,4v_1$ ή $Kv = K_1\,(v_1 + 2v_1 + 3v_1 + 4v_1) = K_1 \cdot 10v_1$.

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα έχομε:

$60.000 \times 100 = 15.000 \times 10 \times v_1$ και $v_1 = 40$ ημέρες = λήξη του πρώτου γραμματίου. Συνεπώς, οι λήξεις των τεσσάρων γραμματίων θα είναι: 40, 80, 120 και 160 ημέρες από σήμερα.

Παράδειγμα 4ο. Έχομε ένα γραμμάτιο 12.000 δρχ., το οποίο λήγει μετά 60 ημέρες από σήμερα και το αντικαθιστούμε με δυο γραμμάτια, τα οποία λήγουν μετά 40 και 90 ημέρες από σήμερα. Να βρεθεί η ονομαστική αξία των δύο γραμματίων, αν είναι γνωστό ότι το άθροισμά τους είναι 12.000 δρχ.

Λύση. Επειδή $K = K_1 + K_2$, συμπεραίνομε ότι πρόκειται για πρόβλημα μέσης λήξεως, με άγνωστα τα K_1 και K_2. Είναι φανερό ότι η λήξη του γραμματίου $K = 12.000$, αποτελεί και τη μέση λήξη των K_1 και K_2. Επομένως, θα ισχύει η ισοδυναμία: $(K_1 + K_2) \times 60 = K_1 \times 40 + K_2 \times 90$ (α)

Γνωρίζομε όμως ότι: $K_1 + K_2 = 12.000$ (β)

Λύνοντας την (α) ως προς K_1 παίρνομε: $K_1 = {}^3/_2\,K_2$. Αντικαθιστώντας τώρα την τιμή του K_1 στην εξίσωση (β) έχομε: ${}^3/_2\,K_2 + K_2 = 12.000$ και $K_2 = 4800$. Εξάλλου: $K_1 = {}^3/_2\,K_2$ και $K_1 = {}^3/_2 \times 4800 = 7700$.

Παράδειγμα 5ο. Έχομε ένα γραμμάτιο 15.000 δρχ. που λήγει μετά 90 ημέρες και το αντικαθιστούμε: α) με δύο ίσα γραμμάτια, τα οποία έχουν άθροισμα ονομαστικών αξιών 15.000 δρχ. και β) με τρία ίσα γραμμάτια, με άθροισμα ονομαστικών αξιών 15.000 δρχ. Να βρεθεί η λήξη κάθε γραμματίου.

Λύση. Επειδή η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου είναι ίση με το άθροισμα των ονομαστικών αξιών των αντικαθισταμένων γραμματίων, συμπεραίνομε ότι πρόκειται για πρόβλημα μέσης λήξεως. Οι λήξεις των γραμματίων θα βρεθούν ως εξής:

α) Έστω ότι το πρώτο γραμμάτιο λήγει μετά 40 ημέρες από σήμερα. Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στην εξίσωση $K \cdot v = K_1 \cdot v_1 + K_2 \cdot v_2$ και έχομε:
$15.000 \times 90 = 7500 \times 40 + 7500\, v_2$ ή $15.000 \times 90 = 7500\,(40 + v_2)$

$$ή\ 2 \times 90 = 40 + v_2\ ή\ 90 = \frac{40 + v_2}{2}\ και\ v_2 = 140$$

Αν τώρα το πρώτο γραμμάτιο λήγει μετά 60 ημέρες, τότε: $15.000 \times 90 = 7500 \times 60 + 7500 \cdot v_2$

$$ή \qquad 90 = \frac{60 + v_2}{2}\ και\ v_2 = 120$$

β) Στην περίπτωση αυτή το ένα από τα γραμμάτια θα λήγει στην κοινή λήξη (= μέση λήξη) και τα άλλα δεξιά και αριστερά της μέσης λήξεως, γιατί η μέση λήξη ισούται με το μέσο όρο των λήξεων όταν $K_1 = K_2 = K_3 = 5000$.

Συνεπώς, αν το πρώτο γραμμάτιο λήγει μετά 30 ημέρες, τότε θα είναι:

$$15.000 \times 90 = 5000 \times 30 + 5000 \times 90 + 5000 \cdot v_3$$
$$ή\ 3 \times 5000 \times 90 = 5000\,(30 + 90 + v_3)$$

$$ή \qquad 90 = \frac{30 + 90 + v_3}{3}\ και\ v_3 = 270 - 120 = 150$$

Παρατήρηση. Από τη λύση του παραπάνω προβλήματος συμπεραίνομε τα εξής:

α) Αν το πλήθος των γραμματίων που αντικαθιστούν το ενιαίο γραμμάτιο είναι αριθμός **άρτιος,** τότε οι λήξεις των γραμματίων θα βρίσκονται δεξιά και αριστερά της μέσης λήξεως και θα ισαπέχουν αυτής, γιατί η μέση λήξη είναι ο μέσος όρος των διαφόρων λήξεων.

β) Αν όμως το πλήθος των γραμματίων είναι αριθμός **περιττός,** τότε η λήξη του μεσαίου γραμματίου θα ταυτίζεται με τη μέση λήξη και τα άλλα γραμμάτια θα λήγουν δεξιά και αριστερά της μέσης λήξεως και οι λήξεις τους θα ισαπέχουν της μέσης λήξεως. Το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις.

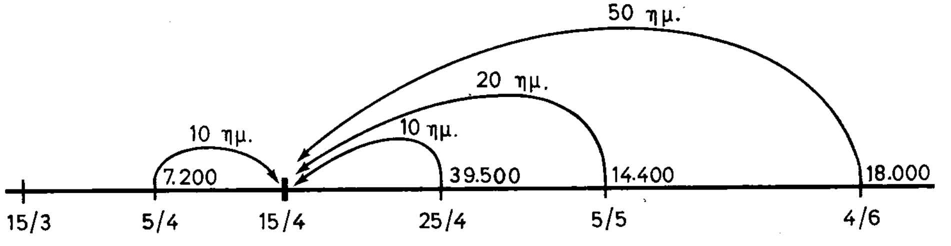
6.6 Εύρεση του επιτοκίου με το οποίο γίνεται η αντικατάσταση γραμματίων.

Για να βρούμε το επιτόκιο με το οποίο έγινε η αντικατάσταση των γραμματίων, αντικαθιστούμε τα δεδομένα του προβλήματος σε μια από τις βασικές εξισώσεις (22) ή (24) και λύνομε αυτές ως προς Δ. Αφού βρούμε το Δ είναι πλέον εύκολο να βρούμε το επιτόκιο, γιατί $Δ = 360 : i$ ή $Δ = 365 : i$

Παράδειγμα. Γραμμάτια 7200 δρχ., 14.400 δρχ. και 18.000 δρχ., τα οποία λήγουν αντιστοίχως: την 5η Απριλίου, την 5η Μαΐου και την 4η. Ιουνίου, αντικατεστάθηκαν στις 15 Μαρτίου με ένα γραμμάτιο 39.500 δρχ., το οποίο έληγε στις 25 Απριλίου. Με ποιο επιτόκιο έγινε η αντικατάσταση; Έτος πολιτικό. Εποχή ισοδυναμίας: 1) η 15η Απριλίου και 2) η κοινή λήξη.

Λύση.

Ι. Εποχή ισοδυναμίας η 15η Απριλίου:



$K = 39.500$ $\quad$ $K_1 = 7.200$ $\quad$ $K_2 = 14.400$ $\quad$ $K_3 = 18.000$ $\quad$ $i = ;$

$v = 10$ $\quad$ $v_1 = 10$ $\quad$ $v_2 = 20$ $\quad$ $v_3 = 50$

Η εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

$$K - \frac{Kv}{\Delta} = K_1 - \frac{K_1 v_1}{\Delta} + K_2 - \frac{K_2 v_2}{\Delta} + K_3 - \frac{K_3 v_3}{\Delta}$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και έχομε:

$$39.500 - \frac{39.500 \times 10}{\Delta} = 7200 + \frac{7200 \times 10}{\Delta} + 14.400 - \frac{14.400 \times 20}{\Delta} +$$

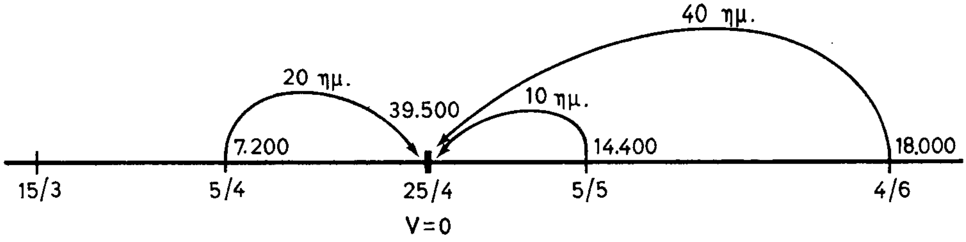
$$+ 18.000 - \frac{18.000 \times 50}{\Delta}$$

$$\text{ή} \; - 100\,\Delta = 39.500 \times 10 + 7200 \times 10 - 14.400 \times 20 - 18.000 \times 50$$

$$\text{ή} \; 100\,\Delta = 721.000 \text{ και } \Delta = 7210$$

$$\text{Αλλά:} \quad \Delta = \frac{365}{i} = 7210 \text{ και } i = \frac{365}{7210} = 0{,}0506 \text{ ή } 5{,}06\%$$

II. Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη:



$K = 39.500$ $\quad K_1 = 7.200$ $\quad K_2 = 14.400$ $\quad K_3 = 18.000$

$V = 0$ $\quad V_1 = 20$ $\quad V_2 = 10$ $\quad V_3 = 40$

Η εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

$$K = K_1 + \frac{K_1 v_1}{\Delta} + K_2 - \frac{K_2 v_2}{\Delta} + K_3 - \frac{K_3 v_3}{\Delta}$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και έχομε:

$$39.500 = 7200 + \frac{7200 \times 20}{\Delta} + 14.400 - \frac{14.400 \times 10}{\Delta} +$$

$$+ 18.000 - \frac{18.000 \times 40}{\Delta}$$

Λύνοντας ως προς Δ βρίσκομε: $\Delta = 7200$ και $i = 365{:}7200 = 0{,}0507$ ή $i = 5{,}07\%$.

6.7 Προβλήματα ισοδυνάμων γραμματίων.

1. Οφείλει κάποιος: 1) γραμμάτιο 12.000 δρχ. που λήγει την 20η Ιαν., 2) γραμμάτιο 18.000 δρχ. λήξεως 30 Απριλίου και 6000 μετρητά. Για να εξοφλήσει το χρέος υπογράφει στις 16 Ιαν/ρίου γραμμάτιο, το οποίο λήγει την 31η Μαρτίου. Ποια θα είναι η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου; Εποχή ισοδοναμίας η ημέρα υπολογισμού. Επιτόκιο 7% και έτος πολιτικό.
   (Απ. 36145)

2. Γραμμάτια 4000, 9000 και 15.000 δρχ., τα οποία λήγουν αντιστοίχως την 20η Ιαν/ρίου, την 9η Φεβρ/ρίου και την 30η Απριλίου, τα αντικαθιστούμε στις 10 Ιαν/ρίου με ένα γραμμάτιο που λήγει την 31η Μαρτίου. Να βρεθεί η ονομαστική αξία του νέου γραμματίου. Εποχή ισοδυναμίας: η κοινή λήξη και η ημέρα υπολογισμού. Επιτόκιο 4% και έτος πολιτικό.
   (Απ. 28.030,68 - 28.031,36)

3. Πότε πρέπει να λήγει γραμμάτιο ονομ. αξίας 50.500 δρχ., το οποίο την 1η Σεπτεμβρίου αντικαθιστά τα εξής γραμμάτια: α) 20.000 δρχ. λήξεως 10 Οκτωβρίου και β) 30.000 δρχ. λήξεως 19 Νοεμβρίου. Επιτόκιο 8% και έτος πολιτικό. Εποχή ισοδυναμίας: η ημέρα υπολογισμού και η κοινή λήξη.
   (Απ. 18 Δεκ. - 19 Δεκ.)

4. Πότε πρέπει να λήγει γραμμάτιο 17.500 δρχ., το οποιο την 31η Ιαν/ρίου αντικαθιστά: 1) χρέος σε μετρητά 10.000 δρχ., 2) γραμμάτιο 3674 δρχ. λήξεως 20 Φεβρουαρίου και 3) γραμμάτιο 3714 δρχ. λήξεως 11 Απριλίου. Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού. Επιτόκιο 8% και έτος πολιτικό.

(Απ. 20 Μαρτ.)

5. Γραμμάτιο 24.000 δρχ., το οποίο λήγει την 20η Μαρτίου αντικαταστάθηκε την 9η Ιανουαρίου με τα εξής γραμμάτια: α) 4000 δρχ. λήξεως 8 Φεβρουαρίου, β) 12.000 δρχ. λήξεως 10 Μαρτίου και γ) 8000 δρχ. Να βρεθεί η λήξη του γ' γραμματίου.

(Απ. 24 Απριλίου)

6. Γραμμάτια 10.000, 20.000 και 30.000 δρχ., λήγουν αντιστοίχως μετά 30,60 και 90 ημέρες από σήμερα. Μετά πόσο χρόνο από σήμερα μπορούν να πληρωθούν ταυτοχρόνως και τα τρία γραμμάτια;

(Απ. 70 ημ.)

7. Οφείλει κάποιος ποσό 50.000 δρχ., το οποίο πρέπει να πληρωθεί την 21η Μαΐου και για να το εξοφλήσει πλήρωσε 10.000 δρχ την 11η Απριλίου και 20.000 δρχ. την 1η Μαΐου. Πότε πρέπει να καταβάλει το υπόλοιπο των 20.000 δρχ. για να εξοφλήσει το χρέος του;

(Απ. 30 Ιουνίου)

8. Οφείλει κάποιος γραμμάτιο 50.000 δρχ. που λήγει την 20 Απριλίου. Για να εξοφλήσει το γραμμάτιο υπογράφει τα εξής γραμμάτια: α) 10.000 δρχ. λήξεως 21 Μαρτίου, β) 10.000 λήξεως 10 Απριλίου, γ) 10.000 δρχ. λήξεως 10 Μαΐου και δ) γραμμάτιο που λήγει στις 10 Ιουνίου. Να βρεθεί η ονομαστική αξία του δ' γραμματίου. Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη. Επιτόκιο 7% και έτος πολιτικό.

(Απ. 20.158,81)

9. Δύο γραμμάτια από 5000 δρχ. το καθένα, λήγουν: το πρώτο μετά 30 ημέρες και το δεύτερο μετά 100 ημέρες από σήμερα. Πότε πρέπει να λήγει γραμμάτιο 10.000 δρχ., το οποίο αντικαθιστά τα δυο γραμμάτια;

(Απ. 65 ημ.)

10. Γραμμάτιο 12.000 δρχ έπρεπε να πληρωθεί την 30η Μαΐου. Για την εξόφλησή του έγιναν τρία γραμμάτια: α) 4500 δρχ. λήξεως 15 Απριλίου, β) 4500 δρχ. λήξεως 10 Μαΐου και γ) 3000 δρχ. Να βρεθεί η λήξη του γ΄ γραμματίου.

(Απ. 5 Σεπτ.)

11. Γραμμάτιο 6000 δρχ. που λήγει στις 10 Ιαν. και άλλο γρ/τιο 9000 δρχ. που λήγει στις 19 Φεβρ. αντικαταστάθηκαν με δυο γραμμάτια: α) 10.000 δρχ. λήξεως 9 Φεβρ. και β) 5000 δρχ. Πότε πρέπει να λήγει το β΄ γράμ/τιο για να υπάρχει οικονομική ισοδυναμία;

(Απ. 22 Ιαν.)

12. Γραμμάτιο 12.000 δρχ., το οποίο λήγει την 26η Μαρτίου αντικαταστάθηκε στις 15 Ιαν/ρίου με τρία γραμμάτια: α) 2000 δρχ. λήξεως 14 Φεβρ., β) 6000 δρχ. λήξεως 16 Μαρτίου και γ) 4000 δρχ. Να βρεθεί η λήξη του γ΄ γραμματίου. Έτος πολιτικό.

(Απ. 30 Απρ.)

13. Δύο γραμμάτια λήγουν μετά 60 και 180 ημέρες αντιστοίχως, έχουν μέση λήξη μετά 80 ημέρες, άθροισμα ονομαστικών αξιών ισοδύναμο με γραμ/τιο 20.000 δρχ. που λήγει μετά 120 ημέρες από σήμερα. Να βρεθούν οι ονομαστικές αξίες των γραμματίων.

(Απ. 3310,80 16554)

14. Πότε πρέπει να λήγει γραμμάτιο 60.000 δρχ., το οποίο την 1ην Σεπτεμβρίου το αντικαθιστούν δύο γραμμάτια: α) 35.000 δρχ. λήξεως 20 Νοεμβρίου και β) 25.000 δρχ. λήξεως 11 Οκτωβρίου. Εποχή ισοδυναμίας: 1) η ημέρα υπολογισμού και 2) η κοινή λήξη. Επιτόκιο 9%, έτος πολιτικό.

(Απ. 4 Νοεμβρ.)

15. Γραμμάτιο 10.000 δρχ. πρέπει να πληρωθεί στις 10 Απριλίου. Συμφωνήθηκε να γίνουν δύο

γραμμάτια, τα οποία να το αντικαταστήσουν· το πρώτο να λήγει την 21η Μαρτίου και το δεύτερο την 20η Μαΐου. Το άθροισμα των ονομ. αξιών των δυο γραμ/τίων είναι 10.000 δρχ. Να βρεθούν οι ονομ. αξίες των δυο γραμματίων. Επιτόκιο 9%, έτος πολιτικό.

(Απ. 6.666,67 – 3.333,33)

16. Χρέος 42.000 δρχ. πρέπει να πληρωθεί μετά 40 ημέρες από σήμερα. Έναντι αυτού εκδίδονται δύο συναλλαγματικές, 12.000 δρχ. και 26.000 δρχ., οι οποίες λήγουν αντιστοίχως μετά 35 και 60 ημέρες από σήμερα. Πότε πρέπει να λήγει τρίτη συν/κή 4000 δρχ. για να εξοφληθεί το χρέος;

(Απ.-75 ημ. από σήμερα)

17. Ο έμπορος Χ όφειλε γραμμάτιο 36.500 δρχ. το οποιο έληγε στις 5 Μαΐου, και το αντικατάστησε με τα εξής γραμμάτια: α) 7000 δρχ. λήξεως 15 Απριλίου, β) 8000 δρχ. λήξεως 25 Μαϊου και γ) 22.200 δρχ. λήξεως 24 Ιουλίου. Με ποιο επιτόκιο έγινε η αντικατάσταση; Εποχή ισοδυναμίας: 1) η κοινή λήξη και 2) η 25 Απριλίου. Έτος πολιτικό.

(Απ. 10,7% - 10,2%)

18. Οφείλει κάποιος στις 2 Μαρτίου γραμμάτιο 45.000 δρχ. που λήγει την 21 Απριλίου. Για να το εξοφλήσει επλήρωσε 10.000 δρχ. σε μετρητά και υπέγραψε γραμμάτιο 20.000 δρχ. που λήγει την 1 Απριλίου και δεύτερο γραμμάτιο, το οποιο λήγει την 30 Ιουνίου. Να βρεθεί η ονομ. αξία του γραμματίου που λήγει στις 30 Ιουνίου. Εποχή, ισοδυναμίας: 1) η κοινή λήξη και 2) η ημέρα υπολογισμού. Επιτόκο 8% και έτος πολιτικό.

(Απ. 15.033,30 - 15.033,70)

19. Ποία η ονομ. αξία γραμματίου που λήγει την 23η Μαΐου και το οποίο το αντικαθιστούμε στις 24 Μαρτίου με τα εξής γραμμάτια: α) 5000 δρχ. λήξεως 23 Απριλίου, β) 6000 δρχ. λήξεως 13 Μαΐου και γ) 8000 δρχ. λήξεως 2 Ιουνίου. Εποχή ισοδυναμίας: η ημέρα υπολογισμού. Επιτόκιο 9%, έτος μεικτό.

(Απ. 19.033)

20. Ο έμπορος Κ θέλει να αντικαταστήσει στις 10 Οκτωβρίου τέσσερα γραμμάτια: α) 12.000 δρχ. λήξεως 20 Οκτωβρίου, β) 10.000 δρχ. λήξεως, 29 Οκτωβρίου, γ) 8000 δρχ. λήξεως 10 Νοεμβρίου και δ) 15.000 δρχ. λήξεως 20 Δεκεμβρίου, με ένα γραμμάτιο, το οποίο να λήγει στις 5 Νοεμβρίου. Να βρεθεί η ονομ. αξία του νέου γραμματίου, όταν το επιτόκιο είναι 6%, το έτος μεικτό και η εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη.

(Απ. 44.924,50)

21. Ο έμπορος Λ οφείλει τα εξής γραμμάτια: α) 6000 δρχ., β) 12.000 δρχ., γ) 15.000 δρχ. και δ) 20.000 δρχ., τα οποία λήγουν αντιστοίχως μετά 40, 50, 60 και 90 ημέρες από σήμερα και θέλει να τα αντικαταστήσει με ένα γραμμάτιο, το οποίο να λήγει μετά 55 ημέρες από σήμερα. Να βρεθει η ονομ. αξία του ενιαίου γραμματίου. Επιτόκιο 6%, έτος μεικτό. Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη.

(Απ. 52.895,80)

22. Ο έμπορος Μ δανείσθηκε από την Τράπεζα Τ τα εξής ποσά: α) 5000 δρχ. την 20 Ιαν., β) 9000 δρχ. στις 15 Φεβρ., γ) 16.500 δρχ. στις 22 Μαρτίου και δ) 8500 δρχ. στις 11 Μαΐου. Ποιο ειναι το συνολικό χρέος του την 30η Ιουνίου; Επιτόκιο 8%, έτος εμπορικό.

(Απ. 39908,30)

23. Οφείλει κάποιος γραμμάτιο 20.000 δρχ., το οποίο λήγει την 20 Οκτωβρίου και επειδή δεν μπορεί να το εξοφλήσει την ημέρα της λήξεώς του, γι' αυτό στις 10 Οκτωβρίου μεταβιβάζει με οπισθογράφηση δύο γραμμάτια πελατών του το ένα 6000 δρχ. λήξεως 29 Νοεμβρίου και το άλλο 8000 δρχ. λήξεως 30 Οκτωβρίου. Υπογράφει και ένα γραμμάτιο λήξεως 8 Δεκεμβρίου. Ποια είναι η ονομ. αξία του γραμματίου που υπέγραψε. Επιτόκιο 9%, έτος μεικτό και εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμου.

(Απ. 6.155,80)

24. Ο έμπορος Ν αγόρασε εμπορεύματα αξίας 50.000 δρχ. και επλήρωσε 14.000 δρχ. μετρητά· για το υπόλοιπο υπέγραψε τρία ισόποσα γραμμάτια, τα οποία λήγουν μετά 20, 40 και 60 ημέρες α-

πό σήμερα. Να βρεθεί η ονομαστική αξία του κάθε γραμματίου που υπέγραψε, αν τα προεξοφλητικό επιτόκιο είναι 6% και το έτος μεικτό. Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού.

(Απ. 12.080,50)

25. Ο έμπορος Ξ οφείλει γραμμάτιο 10.000 δρχ. λήξεως 20 Αυγούστου και θέλει να το αντικαταστήσει με δύο ισόποσα γραμμάτια. Η λήξη του πρώτου γραμματίου συμφωνήθηκε η 10η Ιουνίου. Να βρεθεί η λήξη του δευτέρου γραμματίου. Επιτόκιο 8% και έτος μεικτό. Εποχή ισοδυναμίας η 20 Αυγούστου.

(Απ. 30 Οκτ.)

26. Πότε πρέπει να λήγει γραμμάτιο ονομ. αξίας 4600 δρχ., το οποίο την 20η Δεκεμβρίου αντικατάστησε τα εξής γραμμάτια: α) 2000 δρχ. λήξεως 15 Ιανουαρίου και β) 2550 δρχ. λήξεως 25 Φεβρουαρίου. Επιτόκιο 9%, έτος μεικτό και εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού.

(Απ. 5 Μαρτίου)

27. Γραμμάτια 2000, 4000 και 9000 δρχ, τα οποία λήγουν αντιστοίχως μετά 40,50 και 90 ημέρες από σήμερα, αντικαταστάθηκαν με γραμμάτιο 15.300 δρχ. που λήγει μετά 160 ημέρες από σήμερα. Με ποιο επιτόκιο έγινε η αντικατάσταση; Εποχή ισοδυναμίας: α) η κοινή λήξη και β) η ημέρα υπολογισμού. Έτος μεικτό.

(Απ. 0,0825 — 0,079)

28. Ο επιχειρηματίας Ε οφείλει τα εξής γραμμάτια: α) 1000 δρχ. λήξεως 5 Ιουλίου, β) 2500 δρχ. λήξεως 22 Ιουλίου και γ) 4100 λήξεως 20 Σεπτεμβρίου. Τα παραπάνω γραμμάτια θέλει να τα αντικαταστήσει με ένα νέο γραμμάτιο ονομ. αξίας 7600 δρχ. Να βρεθεί η λήξη του νέου γραμματίου. Επιτόκιο 6%, έτος μεικτό και εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη.

(Απ. 21 Αυγ.)

29. Γραμμάτιο 6000 δρχ. πρέπει να πληρωθεί μετά 80 ημέρες από σήμερα. Συμφωνείται να γίνουν 4 ίσα γραμμάτια από 1500 δρχ. το καθένα, τα οποία να λήγουν ανά ίσα χρονικά διαστήματα από σήμερα. Να βρεθούν οι λήξεις των τεσσάρων γραμματίων. Επιτόκιο 12% και έτος μεικτό.

(Απ. 32 - 64 - 96 - 108 ημ.)

30. Οφείλομε γραμμάτιο 20.000 δρχ. που λήγει στίς 23 Ιουλίου και θέλομε να το αντικαταστήσομε με τα εξής γραμμάτια: α) 4000 δρχ. λήξεως 3 Ιουνίου, β) 6000 δρχ. λήξεως 13 Ιουλίου, γ) 8000 δρχ λήξεως 22 Αυγούστου και δ) γραμμάτιο που λήγει την 21η Σεπτεμβρίου. Να βρεθεί η ονομαστική αξία του δ΄ γραμματίου . Επιτόκιο προεξοφλήσεως 9%, έτος μεικτό και εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη.

(Απ. 2.025,38)

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΤΟΚΟΣ Ή ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

7.1 Θεμελιώδεις ορισμοί.

Όπως είπαμε και στην παράγραφο 1.4 της Εισαγωγής έχομε δύο είδη τόκων:

α) Τον **απλό τόκο** (Simple Interest), κατά τον οποίο ο παραγόμενος τόκος, στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου, εισπράττεται από τον πιστωτή και ο τόκος υπολογίζεται πάντοτε πάνω στο αρχικό κεφάλαιο, το οποίο παραμένει το ίδιο σε όλες τις χρονικές περιόδους του τοκισμού.

β) Το **σύνθετο τόκο** (Compound Interest) ή **ανατοκισμό,** κατά τον οποίο ο παραγόμενος τόκος, στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου, προστίθεται στο τοκιζόμενο κεφάλαιο και παράγει και αυτός τόκο από την επόμενη χρονική περίοδο. Δηλαδή, έχομε **κεφαλαιοποίηση** του τόκου, γι' αυτό και ο ανατοκισμός ονομάζεται και **σύνθετη κεφαλαιοποίηση.**

Η περίοδος του ανατοκισμού μπορεί να είναι το έτος ή το εξάμηνο ή το τρίμηνο ή και ο μήνας και λέμε ότι ο ανατοκισμός γίνεται κάθε έτος, κάθε εξάμηνο, κλπ.

Αν ένα κεφάλαιο ανατοκίζεται κατά τις χρονικές περιόδους 0,1,2,3,..., n, τότε το κεφάλαιο που αντιστοιχεί στην περίοδο 0 ονομάζεται **αρχικό κεφάλαιο** ή **αρχική αξία** αυτού και θα το συμβολίζομε με το $\mathbf{K_0}$, ενώ το κεφάλαιο που θα έχει σχηματισθεί στο τέλος της **n** περιόδου (δηλ. το αρχικό κεφάλαιο συν οι τόκοι που έχουν παραχθεί) ονομάζεται **τελικό κεφάλαιο** ή **τελική αξία κεφαλαίου** ή **ύψος κεφαλαίου** και θα το συμβολίζομε με το $\mathbf{K_n}$.

Όπως είπαμε πιο πάνω, στον ανατοκισμό το αρχικό κεφάλαιο στο τέλος της 1ης περιόδου θα αυξηθεί κατά τον τόκο του, οπότε στη 2η περίοδο θα τοκισθεί το αρχικό κεφάλαιο και ο τόκος της 1ης περιόδου. Στην 3η περίοδο θα τοκισθεί το αρχικό κεφάλαιο αυξημένο κατά τους τόκους της 1ης και της 2ης περιόδου, κ.ο.κ. Συνεπώς, είναι δυνατό από ένα μικρό κεφάλαιο, το οποίο θα ανατοκισθεί για πολλά χρόνια, να παραχθεί ένα τεράστιο τελικό κεφάλαιο. Αν π.χ. ανατοκίσομε 1 δραχμή για 1000 χρόνια, τότε θα παραχθεί τελικό κεφάλαιο, το οποίο αποτελείται από δεκαοκταψήφιο αριθμό, δηλαδή ποσό που υπερβαίνει το ύψος των κεφαλαίων που υπάρχουν σε όλη τη Γη. Γι' αυτό το λόγο ο ανατοκισμός απαγορεύθηκε διεθνώς με ειδικούς νόμους από την εποχή του Ιουστινιανού (527 - 565 μ.Χ.)

Στην Ελλάδα ο ανατοκισμός απαγορεύθηκε με το Νόμο ΑΞΕ΄ του 1882 και επιτρέπεται μόνο σε μερικές περιπτώσεις. Π.χ. στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο και στα ταμιευτήρια των τραπεζών επιτρέπεται να ανατοκίζονται οι καταθέσεις, ώσπου να φθάσουν σε ορισμένο ποσό, το οποίο καθορίζεται από το πιστωτικό ίδρυμα. Αυτό αποτελεί ένα κίνητρο για να αποταμιεύει το κοινό τις οικονομίες του και να ωφελείται η εθνική οικονομία.

7.2 Εύρεση της τελικής αξίας ενός κεφαλαίου τοκισμένου με ανατοκισμό. Γενικός τύπος του ανατοκισμού.

Στα προβλήματα του ανατοκισμού συμπλέκονται τέσσερα ποσά: **1)** Το **αρχικό κεφάλαιο** ($= K_0$), το οποίο αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή 0, **2)** το **τελικό κεφάλαιο** ή **τελική αξία** ($= K_n$) του κεφαλαίου που θα έχει σχηματισθεί στο τέλος της **n** περιόδου, **3)** το **επιτόκιο** ($=$ **i**), το οποίο θεωρείται σταθερό σε όλη τη διάρκεια του ανατοκισμού και **4)** ο **χρόνος**, ο οποίος συμβολίζεται: με το **n** αν εκφράζεται σε ακέραιες περιόδους (έτη, εξάμηνα, τρίμηνα) και με το **μ/ρ** αν εκφράζεται σε κλάσμα της ακεραίας περιόδου.

Για τον υπολογισμό του τελικού κεφαλαίου διακρίνομε' τις εξής περιπτώσεις:

I. Εύρεση του K_n όταν ο χρόνος εκφράζεται σε ακέραιες περιόδους.

Είπαμε ότι: Σύνθετο τόκο έχομε όταν ο παραγόμενος τόκος, στο τέλος κάθε περιόδου, προστίθεται στο τοκιζόμενο κεφάλαιο και παράγει και αυτός τόκο από την επόμενη χρονική περίοδο κ.ο.κ. ώσπου να λήξει το δάνειο.

Στηριζόμενοι στον παραπάνω ορισμό, ο τύπος του ανατοκισμού προκύπτει ως εξής:

Στο τέλος της 1ης περιόδου έχομε τελικό κεφάλαιο: $K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0\,(1 + i)$
Στο τέλος της 2ης περιόδου έχομε τελικό κεφάλαιο: $K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_1\,(1 + i)$
Στο τέλος της 3ης περιόδου έχομε τελικό κεφάλαιο: $K_3 = K_2 + K_2 \cdot i = K_2\,(1 + i)$
....
....
....
Στο τέλος της $n_{ης}$ περιόδου έχομε τελικό κεφάλαιο: $K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot i = K_{n-1}\,(1+i)$

Πολλαπλασιάζομε τώρα κατά μέλη τις πιο πάνω ισότητες και έχομε:

$$K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \ldots K_n = K_0\,(1 + i)\,K_1\,(1 + i)\,K_2\,(1 + i) \ldots K_{n-1}\,(1 + i)$$
$$= K_0 \cdot K_1 \cdot K_2 \ldots K_{n-1}\,[\underbrace{(1 + i)\,(1 + i)\,(1 + i) \ldots (1 + i)}_{\text{n φορές}}]$$

Δηλαδή:

$$K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \ldots K_{n-1}\,K_n = K_0 \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \ldots K_{n-1}\,(1 + i)^n$$

και

$$\mathbf{K_n = K_0\,(1 + i)^n} \qquad \mathbf{(33)}$$

Παρατήρηση 1η. Ο τύπος (33) αποτελεί το γενικό τύπο του ανατοκισμού και βάσει αυτού λύνονται όλα τα προβλήματα του σύνθετου τόκου. Το διώνυμο $(1 + i)^n$ ονομάζεται **συντελεστής κεφαλαιοποιήσεως** ή **ανατοκισμού** και το βρίσκομε σε ειδικούς πίνακες (Βλέπε Πίνακα Ι στους Πίνακες Ανατοκισμού - Ραντών - Χρεωλυσίων) για διάφορα επιτόκια ($i = 0{,}0025$ έως $i = 0{,}20$) και χρόνους ($n = 1$ έως $n = 100$). Ο τύπος (33) προϋποθέτει ότι το επιτόκιο παραμένει το ίδιο σε όλη τη διάρκεια του ανατοκισμού.

Παρατήρηση 2η. Το $(1 + i)^n$ είναι η τελική αξία 1 νομισματική μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί n ακέραιες χρονικές περιόδους. Επειδή το $(1 + i)^n$ είναι δύναμη, όταν αυξάνεται το i ή το n, το $(1 + i)^n$ δεν αυξάνει ανάλογα προς τα i και n, αλλά αυξάνει κατά γεωμετρική πρόοδο με λόγο $(1 + i)$. Το τελικό όμως κεφάλαιο ($= K_n$) είναι ανάλογο προς το αρχικό κεφάλαιο ($= K_0$). Πρέπει επίσης να έχομε υπόψη μας ότι η περίοδος πού αναφέρεται το επιτόκιο πρέπει να ταυτίζεται με την περίοδο του ανατοκισμού.

Παράδειγμα 1ο. Κεφάλαιο 200.000 δρχ. ανατοκίζεται κάθε έτος προς 6%. Τι ποσό θα έχει σχηματισθεί στο ταμιευτήριο στο τέλος των 10 ετών;

Λύση. $K_0 = 200.000$, $n = 10$, $i = 0{,}06$, $K_n = ;$

1ος τρόπος. Η τελική αξία του δοσμένου κεφαλαίου θα υπολογισθεί βάσει του τύπου: $K_n = K_0 (1 + i)^n$. Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και έχομε:

$$K_n = 200.000\,(1 + 0{,}06)^{10} = 200.000\,(1{,}06)^{10} \qquad (\alpha)$$

Την τιμή $(1{,}06)^{10}$ την βρίσκομε στους Πίνακες Ανατοκισμού - Ραντών - Χρεωλυσίων ως εξής: Στην πρώτη γραμμή του Πίνακα Ι εντοπίζομε πρώτα το επιτόκιο 6% και στην πρώτη στήλη (= n) βρίσκομε τον αριθμό 10. Στη διασταύρωση τώρα της γραμμής $n = 10$ και της στήλης 0,06 βρίσκομε τον αριθμό 1,7908 4770, ο οποίος αποτελεί το εξαγόμενο της δυνάμεως $(1{,}06)^{10} = 1{,}7908\ 4770$.

Αντικαθιστώντας τώρα το $(1{,}06)^{10}$ με τον αριθμό 1,79085 στην (α) βρίσκομε το K_n, ήτοι:

$$K_n = 200.000 \times 1{,}79085 = 358.170$$

Ώστε: στο τέλος των 10 ετών θα έχει σχηματισθεί το ποσό των 358.170 δρχ.

Σημείωση. Οι πίνακες έχουν 8 δεκαδικά ψηφία και ανάλογα με την προσέγγιση που θέλομε παίρνομε και τα δεκαδικά ψηφία. Το τελευταίο δεκαδικό το παίρνομε με έλλειψη αν το επόμενο ψηφίο είναι 4 και κάτω ή με υπεροχή αν το επόμενο ψηφίο είναι 5 και άνω. Στο πιο πάνω παράδειγμα πήραμε 5 δεκαδικά ψηφία και επειδή το έκτο ψηφίο είναι 7 αυξήσαμε το προηγούμενο ψηφίο (4) κατά 1 μονάδα. Δηλαδή: $1{,}7908\ 4770 \approx 1{,}79085$.

2ος τρόπος. Θα εργασθούμε με λογαρίθμους.

$$K_n = 200.000\,(1{,}06)^{10}$$

Λογαριθμούμε και τα δύο μέλη της παραπάνω εξισώσεως και έχομε:

$$\text{λογ}K_n = \text{λογ}\,200.000 + 10\,\text{λογ}(1{,}06) \qquad (\beta)$$

Από τους λογαριθμικούς πίνακες βρίσκομε ότι:

$$\text{λογ}200.000 = 5{,}30103 \text{ και } \text{λογ}1{,}06 = 0{,}02531.$$

Αντικαθιστούμε τώρα στη (β) και έχομε:

$$\text{λογ}K_n = 5{,}30103 + 10 \times 0{,}02531 = 5{,}55413.$$

Από τους λογαριθμικούς πίνακες βρίσκομε τον αντιλογάριθμο, δηλαδή τον αριθμό που αντιστοιχεί σε ένα λογάριθμο. Έχομε λογK_n = 5,55413 και ζητούμε το K_n. Το δεκαδικό μέρος 55413 του λογK_n αντιστοιχεί στον αριθμό 3582. Το χαρακτηριστικό 5 δηλώνει ότι ο K_n έχει 6 ακέραια ψηφία. Συνεπώς:
$K_n = 358.200$.

Σημ. Στον πρώτο τρόπο βρέθηκε K_n = 358.170. Η διαφορά: 358.200 − 358.170 = 30 οφείλεται στις υπολογιστικές προσεγγίσεις.

Παρατήρηση 3η. Αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο ή κάθε τρίμηνο και ο χρόνος δίνεται σε έτη και εξάμηνα ή έτη και τρίμηνα, τότε τα έτη πρέπει να μετατραπούν σε εξάμηνα ή τρίμηνα και εργαζόμαστε πλέον όπως στο πιο πάνω παράδειγμα. Πρέπει να έχομε πάντοτε υπόψη μας ότι η περίοδος στην οποία αναφέρεται το επιτόκιο πρέπει να συμπίπτει με την περίοδο του ανατοκισμού.

Παράδειγμα 2ο. Κεφάλαιο 20.000 δρχ. ανατοκίζεται με εξαμηνιαίο επιτόκιο 3%. Τι ποσό θα έχει σχηματισθεί στο ταμιευτήριο μετά 5 έτη και 6 μήνες;

Λύση. Επειδή ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο, πρέπει να μετατρέψομε το χρόνο σε εξάμηνα. Θα έχομε: $n = 5 \times 2 + 1 = 11$ εξάμηνα, $K_0 = 200.000$, $i = 0{,}03$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (33) και έχομε:

$$K_n = 20.000\,(1 + 0{,}03)^{11} = 20.000 \times 1{,}03^{11}, \qquad (\alpha)$$

Από τον Πίνακα I με $i = 0{,}03$ και $n = 11$ βρίσκομε $(1{,}03)^{11} = 1{,}38423$. Αντικαθιστώντας τώρα στην (α) βρίσκομε: $K_n = 20.000 \times 1{,}38423 = 27.684{,}60$ δρχ.

Αν τώρα λογαριθμήσομε και τα δύο μέλη της (α) έχομε:

$$\text{λογ}K_n = \text{λογ}20.000 + 11\ \text{λογ}(1{,}03)$$

$$= 4{,}30103 + 11 \times 0{,}1284 = 4{,}44227$$

και $$K_n = 27.686{,}70 \text{ δρχ.}$$

II. Εύρεση του K_n όταν ο χρόνος εκφράζεται σε μεικτό αριθμό χρονικών περιόδων.

Όταν ο χρόνος του ανατοκισμού εκφράζεται σε ακέραιες και κλασματικές περιόδους (δηλ. σε έτη και μήνες ή έτη και ημέρες ή εξάμηνα και μήνες, κ.ο.κ.), τότε για τον υπολογισμό της τελικής αξίας ενός κεφαλαίου, το οποίο ανατοκίζεται με επιτόκιο i επί n ακέραιες περιόδους και μ/ρ κλασματικές περιόδους, εργαζόμαστε με τους επόμενους δύο τρόπους:

1ος τρόπος. Στην περίπτωση αυτή, για να βρούμε το K_n στο τέλος των n + μ/ρ χρονικών περιόδων, εφαρμόζομε το γενικό τύπο του ανατοκισμού, οποίος έχει τώρα την παρακάτω μορφή:

$$K_n = K_0 (1+i)^{n+\frac{\mu}{\rho}} = K_0 (1+i)^n \; (1+i)^{\frac{\mu}{\rho}} \qquad (34)$$

Αν όμως η ακεραία περίοδος είναι το εξάμηνο, τότε ο τύπος (34) έχει τη μορφή:

$$K_n = K_0 (1+i)^n \, (1+i)^{\frac{\mu}{6}} \qquad (34\beta)$$

Αν τώρα η ακεραία περίοδος είναι το έτος, τότε ο τύπος (34) γράφεται ως εξής:

$$K_n = K_0 (1+i)^n \, (1+i)^{\frac{\mu}{12}} \qquad (34\alpha)$$

Παράδειγμα 1ο. Καταθέσαμε στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο με ανατοκισμό 20.000 δρχ. με ετήσιο επιτόκιο 6%. Να βρεθεί το κεφάλαιο που θα έχει σχηματισθεί μετά 5 έτη και 8 μήνες.

Λύση. $K_0 = 20.000$, $i = 0{,}06$, $n = 5$, $\mu = 8$, $K_n =;$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στον τύπο (34α) έχομε:

$$K_n = 20.000\,(1{,}06)^5\,(1{,}06)^{\frac{8}{12}} \qquad (\alpha)$$

Στον πίνακα I βρίσκομε: $(1{,}06)^5 = 1{,}33822$ και στον Πίνακα II βρίσκομε:

$(1{,}06)^{\frac{8}{12}} = 1{,}03961.$

Αντικαθιστούμε τώρα στην (α) και βρίσκομε ότι:

$$K_n = 20.000 \times 1{,}33822 \times 1{,}03961 = 27.825{,}93 \text{ δρχ.}$$

Παράδειγμα 2ο. Κεφάλαιο 10.000 δρχ. ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο με εξαμηνιαίο επιτόκιο $3^1/_2\%$ επί 8 έτη και 8 μήνες. Να βρεθεί η τελική του αξία.

Λύση. Στην περίπτωση αυτή, ως ακεραία περίοδος θεωρείται το εξάμηνο, δηλαδή είναι:

8 έτη και 8 μήνες $= 8 \times 12 + 8 = 104$ μήνες ή $104 : 6 = 17$ εξάμηνα και 2 μήνες. Άρα έχομε:

$n = 17$, $\mu = 2$, $K_0 = 10.000$, $i = 0{,}035$, $K_n =;$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στον τύπο (34β) έχομε:

$$K_n = 10.000\,(1{,}035)^{17}\,(1{,}035)^{\frac{2}{6}} = 10.000\,(1{,}035)^{17}\,(1{,}035)^{\frac{4}{12}} =$$

$$= 10.000 \times 1{,}79468 \times 1{,}01153 = 18.153{,}70 \text{ δρχ.}$$

Σημ. Το $(1{,}035)^{17}$ το πήραμε από τον Πίνακα I και το $(1{,}035)^{4/12}$ από τον Πίνακα II. Ο κλασματικός εκθέτης πρέπει να μετατρέπεται σε δωδέκατα για να χρησιμοποιείται ο πίνακας II.

2ος τρόπος. Στην τραπεζική πρακτική εφαρμόζεται **ο μεικτός ανατοκισμός**, δηλαδή για τις ακέραιες περιόδους εφαρμόζεται ο σύνθετος τόκος, ενώ για τις κλασματικές περιόδους εφαρμόζεται ο απλός τόκος. Συνεπώς, κεφάλαιο K_0, το οποίο ανατοκίζεται επί n ακέραιες περιόδους και μ/ρ κλασματικές, στο τέλος των n + μ/ρ χρονικών περιόδων θα έχει τελική αξία:

$$K_n = K_0 (1 + i)^n + K_0 (1 + i)^n \cdot \frac{\mu}{\rho} \cdot i$$

ή

$$\mathbf{K_n = K_0 (1 + i)^n \left(1 + \frac{\mu}{\rho} \cdot i\right)} \qquad \mathbf{(35)}$$

Αν η ακεραία περίοδος εκφράζεται σε έτη, τότε ο τύπος (35) γράφεται ως εξής:

$$K_n = K_0 (1 + i)^n \left(1 + \frac{\mu}{12} \cdot i\right) \qquad (35\alpha)$$

όπου n = έτη και μ = μήνες.

Αν η ακεραία περίοδος εκφράζεται σε εξάμηνα, τότε εφαρμόζεται ο τύπος:

$$K_n = K_0 (1 + i)^n \left(1 + \frac{\mu}{6} \cdot i\right) \qquad (35\beta)$$

όπου n = εξάμηνα και μ = μήνες.

Αν, τέλος, ο χρόνος εκφράζεται σε έτη (ή εξάμηνα) μήνες και ημέρες, τότε μετατρέπομε τους μήνες σε ημέρες και εφαρμόζομε τον τύπο:

$$K_n = K_0 (1 + i)^n \left(1 + \frac{\nu}{360} \cdot i\right) \qquad (35\gamma)$$

Παράδειγμα 1ο. Κεφάλαιο 20.000 δρχ. ανατοκίζεται κάθε έτος προς 6%. Τι ποσό θα έχει σχηματισθεί μετά 5 έτη και 8 μήνες;

Λύση. $K_0 = 20.000$, $n = 5$, $\mu = 8$, $i = 0{,}06$, $K_n = ;$
Αντικαθιστώντας στον τύπο (35α) βρίσκομε ότι:

$$K_n = 20.000\,(1{,}06)^5 \left(1 + \frac{8}{12} \times 0{,}06\right)$$

$$= 20.000 \times 1{,}3382 \times 1{,}04 = 27.834{,}56 \text{ δρχ.}$$

Παράδειγμα 2ο. Κεφάλαιο 10.000 δρχ. ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο με εξαμηνιαίο επιτόκιο 3,5% επί 8 έτη και 8 μήνες. Να βρεθεί το τελικό κεφάλαιο.

Λύση. $K_0 = 10.000$, $n = 17$ εξάμηνα, $\mu = 2$ μήνες, $i = 0,035$.
Αντικαθιστούμε στον τύπο (35β) και βρίσκομε:

$$K_n = 10.000\,(1,035)^{17}\,(1 + \frac{2}{6} \times 0,035) =$$

$$= 10.000 \times 1,79468 \times 1,01167 = 18.156,20 \text{ δρχ.}$$

Παράδειγμα 3ο. Δανείζεται κάποιος σήμερα 1.000.000 δρχ. με ανατοκισμό. Τι ποσό πρέπει να επιστρέψει στον πιστωτή μετά 10 έτη 3 μήνες και 10 ημέρες, όταν το ετήσιο επιτόκιο είναι 6% και ο ανατοκισμός γίνεται κάθε έτος;

Λύση. $K_0 = 1.000.000$, $n = 10$, $\mu = 3$, $v = 10$, $i = 0,06$, $K_n = ;$

1ος τρόπος. Θα μετατρέψομε τους μήνες σε ημέρες και θα εφαρμόσομε τον τύπο (35γ). Δηλαδή $v = 3 \times 30 + 10 = 100$ ημ.

$$K_n = 1.000.000\,(1,06)^{10}\,(1 + \frac{100}{360} \times 0,06)$$

$$= 1.000.000 \times 1,79085 \times 1,01667 = 1.820.703,40 \text{ δρχ.}$$

2ος τρόπος. Θα εφαρμόσομε τον τύπο (34)

$$K_n = 1.000.000\,(1,06)^{10 + \frac{3}{12} + \frac{10}{360}} = 1.000.000\,(1,06)^{10}\,(1,06)^{\frac{3}{12} + \frac{10}{360}}$$

Στον Πίνακα I βρίσκομε: $(1,06)^{10} = 1,79085$.

Το $(1,06)^{\frac{3}{12} + \frac{10}{360}}$ θα βρεθεί (από τον Πίνακα II) προσεγγιστικώς με τη **μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής** μεταξύ των αριθμών $(1,06)^{\frac{3}{12}}$ και $(1,06)^{\frac{4}{12}}$
Θα εφαρμόσομε τον τύπο:

$$\psi = \psi_1 + (\psi_2 - \psi_1) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad \textbf{(36)}$$

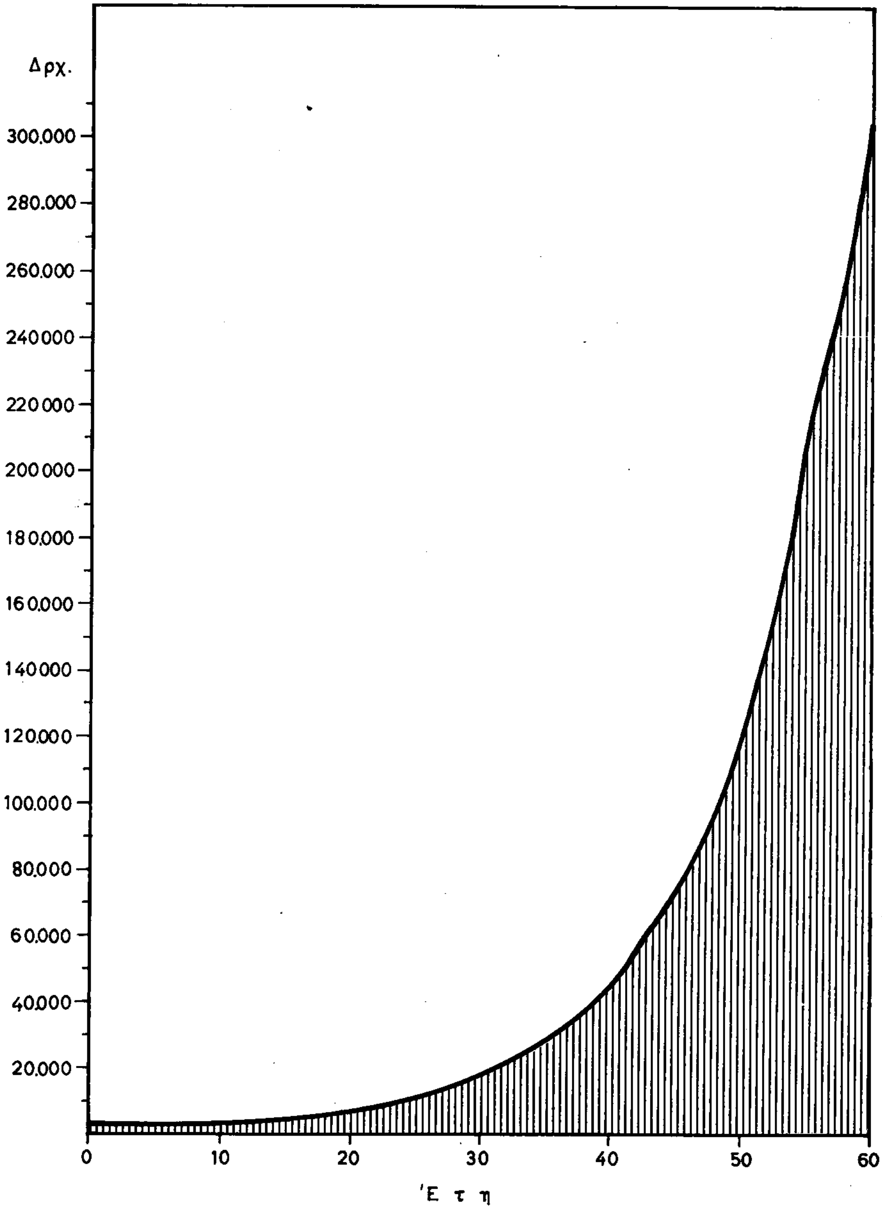
όπου:

$\psi_1 = (1,06)^{\frac{3}{12}} = 1,01467$ $\qquad \psi_2 = (1,06)^{\frac{4}{12}} = 1,01961$

$\psi = (1,06)^{\frac{3}{12} + \frac{10}{360}} = ;$ $\qquad$ και $\quad x_1 = \dfrac{3}{12}$

Ο παρακάτω πίνακας και το αντίστοιχο διάγραμμα δείχνουν το κεφάλαιο που σχηματίζεται στο τέλος των 10,15,20, ..., 100 ετών, αν ανατοκίσομε 1000 δραχμές με ετήσιο επιτόκιο 10%.

n	$K_n = 1000(1+0{,}1)^n$
10	2.594
15	4.177
20	6.727
25	10.835
30	17.449
35	28.102
40	45.259
45	72.890
50	117.391
60	304.482
70	789.747
80	2.048.400
90	5.313.023
100	13.780.612



$$x = \frac{3}{12} + \frac{10}{360} = \frac{3}{12} + \frac{\frac{10}{30}}{12} = \frac{3,33}{12}$$

$$x_2 = \frac{4}{12}$$

Αντικαθιστώντας στον τύπο (36) βρίσκομε:

$$\Psi = 1,01467 + (1,01961 - 1,01467)\ \frac{\frac{3,33}{12} - \frac{3}{12}}{\frac{4}{12} - \frac{3}{12}} = 1,0163$$

Συνεπώς, θα έχομε:

$$K_n = 1.000.000 \times 1,79085 \times 1,0163 = 1.820.041 \text{ δρχ.}$$

7.3 Εύρεση του αρχικού κεφαλαίου, του χρόνου και του επιτοκίου στον ανατοκισμό.

I. Εύρεση του αρχικού κεφαλαίου. Το αρχικό κεφάλαιο (= K_0), το οποίο ανατοκίζεται επί n χρονικές περιόδους προς επιτόκιο i, ονομάζεται και **παρούσα αξία** του κεφαλαίου που θα σχηματισθεί στο τέλος της n περιόδου, γιατί παριστάνει την αξία που έχει σήμερα το τελικό κεφάλαιο K_n.

Στην περίπτωση αυτή δημιουργείται το εξής πρόβλημα: Ποιο κεφάλαιο K_0, το οποίο ανατοκίσθηκε επί n περιόδους με επιτόκιο i, έδωσε τελικό κεφάλαιο K_n;

Για να βρούμε το αρχικό κεφάλαιο πρέπει να λύσομε τον τύπο του ανατοκισμού $K_n = K_0\ (1 + 1)^n$ ως πρός K_0. Επομένως, το αρχικό κεφάλαιο θα υπολογίζεται βάσει του τύπου:

$$\mathbf{K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = K_n \cdot \frac{1}{(1+i)^n} = K_n\ (1+i)^{-n}} \qquad \mathbf{(37)}$$

Από τον τύπο (37) συμπεραίνομε, ότι ο τύπος του ανατοκισμού ισχύει γενικά, δηλαδή όταν το n είναι αριθμός ακέραιος ή κλασματικός, θετικός ή αρνητικός.

Αν τώρα παραστήσομε το $\frac{1}{1+i}$ με το U, τότε ο τύπος (37) γράφεται ως εξής:

$$\mathbf{K_0 = K_n \cdot U^n} \qquad \mathbf{(38)}$$

Το $\frac{1}{(1+i)^n} = U^n$, το οποίο είναι η παρούσα αξία μιας νομισματικής μονάδας, ονομάζεται **συντελεστής προεξοφλήσεως** στον ανατοκισμό και βρίσκεται από τους Πίνακες (Βλ. Πίνακα III στο τέλος του βιβλίου) Ανατοκισμού — Ραντών — Χρεωλυσίων γιά $n = 1$ έως $n = 100$ και $i = 1/4\%$ έως $i = 20\%$. Μπορούμε όμως να το υπολογίσομε και με τους λογαρίθμους. Αν το i ή το n δεν περιλαμβάνεται στους πίνακες, τότε εργαζόμαστε με τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής.

Για τον υπολογισμό του αρχικού κεφαλαίου, διακρίνομε δύο περιπτώσεις:

α) Όταν ο χρόνος εκφράζεται σε ακέραιες περιόδους. Στην περίπτωση αυτή, το K_0 υπολογίζεται βάσει του τύπου: $K_0 = K_n \cdot U^n$.

Παράδειγμα. Ποιο κεφάλαιο πρέπει να καταθέσομε σήμερα, με ανατοκισμό προς 4%, για να εισπράξομε 100.000 δρχ. μετά 20 έτη;

Λύση. $K_0 =;\quad K_n = 100.000,\quad n = 20,\quad i = 0{,}04$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (38) και έχομε:

$$K_n = K_0 \cdot U^n = 100.000 \times U^{20}$$

Στον Πίνακα III, με $i = 0{,}04$ και $n = 20$, βρίσκομε:

$$U^{20} = \frac{1}{(1,04)^{20}} = 0{,}45639$$

Άρα: $K_0 = 100.000 \times 0{,}45639 = 45.639$ δραχμές πρέπει να καταθέσομε σήμερα, για να εισπράξομε 100.000 δρχ. μετά 20 ετη.

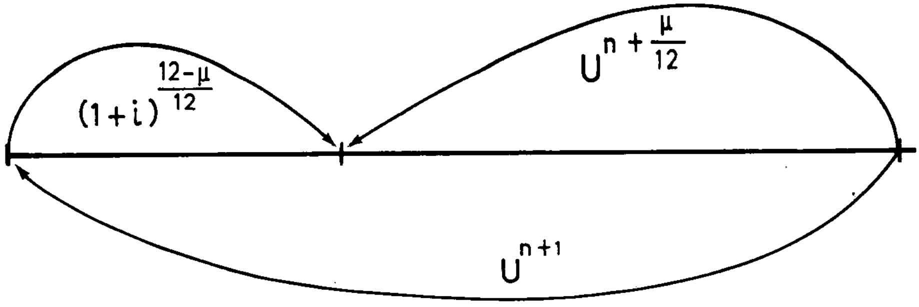
β) Όταν ο χρόνος εκφράζεται σε μεικτό αριθμό χρονικών περιόδων. Στην περίπτωση αυτή, ο τύπος (38) γράφεται ως εξής:

$$K_0 = K_n \cdot U^{n + \frac{\mu}{12}} \qquad (38\alpha)$$

Το $U^{n + \frac{\mu}{12}}$ θα μπορούσε να βρεθεί με τη μέθοδο της παρεμβολής μεταξύ του U^n και του U^{n+1}. Επειδή όμως δεν υπάρχει αναλογία μεταξύ των U^n και U^{n+1} δεν μπορούμε να εργασθούμε με τη μέθοδο της παρεμβολής (ούτε μπορούμε να αναλύσομε το $U^{n + \frac{\mu}{12}}$ γιατί ο Πίνακας III δεν παρέχει το U σε κλασματική δύναμη), γι' αυτό εργαζόμαστε κατά το σχήμα της σελ. 156.

Δηλαδή: Προεξοφλούμε για $n + 1$ έτη και ανατοκίζομε για τη διαφορά των μηνών. Συνεπώς, ο τύπος (38) γράφεται:

$$K_0 = K_n \cdot U^{n+1} \cdot (1 + i)^{\frac{12 - \mu}{12}} \qquad (38\beta)$$



Ο τύπος (38β) προκύπτει ως εξής: Γνωρίζομε ότι: $U^{n+\frac{\mu}{12}} = (1+i)^{-n-\frac{\mu}{12}}$
Στον εκθέτη του β΄ μέλους προσθέτομε και αφαιρούμε τη μονάδα και έχομε:

$$(1+i)^{-n-\frac{\mu}{12}+1-1} = (1+i)^{-(n+1)+\frac{12-\mu}{12}} = (1+i)^{-(n+1)}(1+i)^{\frac{12-\mu}{12}} =$$

$$= U^{n+1}(1+i)^{\frac{12-\mu}{12}}, \text{ διότι } (1+i)^{-(n+1)} = \frac{1}{(1+i)^{n+1}} = U^{n+1}$$

Συνεπώς, θα είναι:

$$U^{7+\frac{7}{12}} = U^8 (1+i)^{\frac{5}{12}} \quad \text{και } U^{\frac{3}{12}} = U \quad (1+i)^{\frac{9}{12}}$$

Παράδειγμα. Να βρεθεί το κεφάλαιο που ανατοκίσθηκε με ετήσιο επιτόκιο $4^1/_2\%$ επί 11 έτη και 5 μήνες και έγινε με τους τόκους του 16.500 δρχ.

Λύση. $K_0 = ;$ $n = 11,$ $\mu = 5,$ $i = 0{,}045,$ $K_n = 16.500,$

$K_0 = 16.500 \cdot U^{12} (1{,}045)^{7/12}$. Με $i = 0{,}045$ και $n = 12$, στον Πίνακα III βρίσκομε: $U^{12} = 0{,}58966$. Με $i = 0{,}045$ και $\mu = 7$, στον Πίνακα II βρίσκομε: $(1+i)^{7/12} = 1{,}02601$.

Άρα: $K_0 = 16.500 \times 0{,}58966 \times 1{,}02601 = 9.982{,}50$ δρχ.

II. Εύρεση του χρόνου. Στην περίπτωση αυτή είναι γνωστά: το αρχικό κεφάλαιο, το τελικό κεφάλαιο και το επιτόκιο και άγνωστος ο χρόνος του ανατοκισμού, δηλαδή το n. Για να βρούμε το n, αντικαθιστούμε τα γνωστά στο γενικό τύπο του ανατοκισμού $K_n = K_0 (1+i)^n$ και τον λύνομε ως πρός n, οπότε προκύπτει ο τύπος:

$$(1+i)^n = \frac{K_n}{K_0} \qquad \textbf{(39)}$$

Ο υπολογισμός του n γίνεται με δύο τρόπους:

1ος τρόπος. Βρίσκομε πρώτα το πηλίκο $K_n : K_0$ και το αναζητούμε στους αριθμούς του Πίνακα I (στη στήλη του δοσμένου επιτοκίου). Αν το πηλίκο βρεθεί ακριβώς στον Πίνακα I, τότε στην πρώτη κατακόρυφη στήλη του Πίνακα I βρίσκομε το n. Αν όμως το πηλίκο περιέχεται μεταξύ δύο αριθμών του Πίνακα I, τότε το n θα βρεθεί με γραμμική παρεμβολή.

2ος τρόπος. Επειδή το πηλίκο $K_n : K_0$ δεν βρίσκεται συνήθως στους Πίνακες και η μέθοδος της παρεμβολής παρουσιάζει σχετική δυσκολία, γι' αυτό χρησιμοποιούμε τους λογαρίθμους για να βρούμε το n.

Λογαριθμούμε και τα δύο μέλη της (39) και έχομε:

$$\lambda o\gamma(1+i)^n = \lambda o\gamma \frac{K_n}{K_0} \quad \text{ή} \quad n \cdot \lambda o\gamma(1+i) = \lambda o\gamma K_n - \lambda o\gamma K_0$$

καί

$$\mathbf{n = \frac{\lambda o\gamma K_n - \lambda o\gamma K_0}{\lambda o\gamma(1+i)}} \qquad \mathbf{(40)}$$

Παράδειγμα. Κεφάλαιο 200.000 δρχ. ανατοκίσθηκε με ετήσιο επιτόκιο 6% και έγινε μαζί με τους τόκους του 358.170 δρχ. Να βρεθεί ο χρόνος (έτη) του ανατοκισμού.

Λύση. $K_0 = 200.000$, $i = 0{,}06$, $K_n = 358.170$, $n = ;$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (39) και έχομε:

$$(1+i)^n = \frac{358.170}{200.000} = 1{,}79085$$

Στον Πίνακα I και στη στήλη του επιτοκίου 6% βρίσκομε τον αριθμό 1,79085, ο οποίος αντιστοιχεί σε n = 10 (πρώτη στήλη του Πίνακα I).

Αν τώρα αντικαταστήσομε τα δεδομένα του προβλήματος στον τύπο (40) θα βρούμε:

$$n = \frac{\lambda o\gamma 358170 - \lambda o\gamma 200.000}{\lambda o\gamma(1{,}06)} = \frac{5{,}55413 - 5{,}30103}{0{,}02531} = 10$$

III. Εύρεση του επιτοκίου. Για να βρούμε το επιτόκιο με το οποίο έγινε ο ανατοκισμός, λύνομε τον τύπο του ανατοκισμού $K_n = K_0(1+i)^n$ ως προς $(1+i)^n = K_n : K_0$. Στον Πίνακα I και στη γραμμή του δοσμένου n αναζητούμε το πηλίκο $K_n : K_0$ · αν το πηλίκο βρεθεί ακριβώς, τότε στη στήλη που υπάρχει το πηλίκο βρίσκεται και το ζητούμενο επιτόκιο. Αν όμως το πηλίκο περιέχεται μεταξύ δύο αριθμών του πίνακα, τότε εργαζόμαστε με γραμμική παρεμβολή. Είναι όμως προτιμότερο να εργασθούμε με τους λογαρίθμους. Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο:

$$\mathbf{\lambda o\gamma(1+i) = \frac{\lambda o\gamma K_n - \lambda o\gamma K_0}{n}} \qquad \mathbf{(41)}$$

και έπειτα υπολογίζομε το επιτόκιο.

Παράδειγμα 1ο. Κεφάλαιο 200.000 δρχ. ανατοκίσθηκε επί 10 έτη και έγινε μαζί με τους τόκους του 358.200 δρχ. Με ποιο επιτόκιο έγινε ο ανατοκισμός;

Λύση. $K_0 = 200.000$, $n = 10$, $K_n = 358.200$, $i =;$
Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (41) και βρίσκομε:

$$\text{λογ}(1+i) = \frac{\text{λογ}358.200 - \text{λογ}200.000}{10} = \frac{5{,}55413 - 5{,}30103}{10} =$$

$$= \frac{0{,}25310}{10} = 0{,}02531$$

Από τους λογαριθμικούς πίνακες βρίσκομε τον αντιλογάριθμο του 0,02531 [δηλ. τον αριθμό $(1 + i)$ που αντιστοιχεί στον πιο πάνω λογάριθμο].
Έχομε: $1 + i = 1{,}06$ ή $i = 1{,}06 - 1$ και $i = 0{,}06$.

Παράδειγμα 2ο. Κεφάλαιο 100.000 δρχ. ανατοκίσθηκε επί 10 έτη και έγινε μαζί με τους τόκους του 175.000 δρχ. Με ποιό επιτόκιο υπολογίσθηκε ο ανατοκισμός;

Λύση. $K_0 = 100.000$, $n = 10$, $K_n = 175.000$, $i =;$

$$K_n = K_0(1+i)^n, \quad 175.000 = 100.000\,(1+i)^{10}$$

και

$$(1+i)^{10} = \frac{175.000}{100.000} = 1{,}75$$

Στον Πίνακα I και στη γραμμή $n = 10$ αναζητούμε τον αριθμό 1,75 και παρατηρούμε ότι αυτός περιλαμβάνεται μεταξύ των αριθμών 1,70814 και 1,79085, οι οποίοι αντιστοιχούν στα επιτόκια 0,055 και 0,06. Για να βρούμε με ακρίβεια το ζητούμενο επιτόκιο, πρέπει να εργασθούμε με τη μέθοδο της παρεμβολής. Θα εφαρμόσομε το γνωστό τύπο:

$$\psi = \psi_1 + (\psi_2 - \psi_1)\cdot\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

όπου:

$\psi_1 = 0{,}055$ και $x_1 = 1{,}70814$
$\psi =;$ » $x = 1{,}75$
$\psi_2 = 0{,}06$ » $x_2 = 1{,}79085$

Άρα:

$$\psi = i = 0{,}055 + (0{,}06 - 0{,}055)\cdot\frac{1{,}75000 - 1{,}70814}{1{,}79085 - 1{,}70814}$$

ή

$i = 0{,}055 + 0{,}005 \times 0{,}506 = 0{,}0575$, δηλαδή $i = 5^3/_4\%$.

7.4 Επιτόκια ανάλογα και ισοδύναμα.

Υποθέτομε ότι κεφάλαιο 10.000 δρχ. τοκίζεται επί 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο 8% ή με εξαμηνιαίο επιτόκιο 4%. Ποια θα είναι η τελική αξία του κεφαλαίου αν τοκισθεί: 1) με απλό τόκο και 2) με ανατοκισμό;

1) Η τελική αξία του δοσμένου κεφαλαίου με απλό τόκο θα υπολογισθεί βάσει του τύπου: $K_n = K_0 + K_0 \cdot n \cdot i$.

α) $K_0 = 10.000$, $n = 5$ έτη, $i = 0{,}08$, $K_n =;$

$\mathbf{K_n} = 10.000 + 10.000 \times 5 \times 0{,}08 =$ **14.000** δρχ.

β) $K_0 = 10.000$, $n = 5 \times 2 = 10$ εξάμηνα, $i = 0{,}04$, $K_n =;$

$\mathbf{K_n} = 10.000 + 10.000 \times 10 \times 0{,}04 =$ **14.000** δρχ.

Από τη λύση του παραπάνω προβλήματος προκύπτει ότι: το κεφάλαιο των 10.000 δραχμών που τοκίσθηκε επί 5 έτη προς 8% ή επί 10 εξάμηνα προς 4%, έδωσε την ίδια τελική αξία (= 14.000 δρχ.). Τα επιτόκια 8% και 4%, τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικές χρονικές περιόδους και τα οποία έχουν τον ίδιο λόγο (πράγματι, ο λόγος των επιτοκίων 0,08/0,04 = 2 ισούται με το λόγο των χρονικών περιόδων 12 (μήνες)/6 (μήνες) = 2) που έχουν και οι περίοδοι, στις οποίες αντιστοιχούν, ονομάζονται **επιτόκια ανάλογα,** γιατί δίνουν (στον απλό τόκο) την ίδια τελική αξία (και τον ίδιο τόκο) για το ίδιο αρχικό κεφάλαιο που τοκίζεται στον ίδιο χρόνο. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο στον ανατοκισμό, όπως θα δούμε πιο κάτω.

2) Η τελική αξία του δοσμένου κεφαλαίου με ανατοκισμό θα υπολογισθεί βάσει του τύπου $K_n = K_0 (1 + i)^n$.

α) Αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε έτος, τότε το κεφάλαιο των 10.000 δρχ. θα έχει τελική αξία:

$\mathbf{K_n} = 10.000\,(1{,}08)^5 = 10.000 \times 1{,}469328 =$ **14.693,28** δρχ.

β) Αν τώρα ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο, τότε η τελική αξία του δοσμένου κεφαλαίου θα είναι:

$\mathbf{K_n} = 10.000(1{,}04)^{10} = 10.000 \times 1{,}480244 =$ **14.802,44** δρχ.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το κεφάλαιο των 10.000 δρχ. που ανατοκίσθηκε επί 5 έτη προς 8% ή επί 10 εξάμηνα προς 4% (δηλ. για τον ίδιο χρόνο), δεν έδωσε την ίδια τελική αξία, γιατί ο τόκος κάθε περιόδου προστίθεται στο τοκιζόμενο κεφάλαιο και παράγει και αυτός τόκο από την επόμενη περίοδο. Για να δώσει (το τοκιζόμενο κεφάλαιο) την ίδια τελική αξία — και στις δύο περιπτώσεις του ανατοκισμού— θα πρέπει ο ανατοκισμός να μη γίνεται με το ανάλογο επιτόκιο, αλλά με το λεγόμενο **ισοδύναμο επιτόκιο.**

Για την πλήρη κατανόηση του ισοδυνάμου επιτοκίου θέτομε το προηγούμενο πρόβλημα ως εξής:

Με ποιο εξαμηνιαίο επιτόκιο πρέπει να ανατοκισθεί κεφάλαιο 10.000 δρχ. επί 10 εξάμηνα έτσι, ώστε η τελική του αξία να είναι ίση με την τελική αξία που φέρει το ίδιο κεφάλαιο (= 10.000 δρχ.), το οποίο ανατοκίζεται για το ίδιο χρόνο (= 5 έτη) προς 8%;

Αν παραστήσομε με το x το άγνωστο εξαμηνιαίο επιτόκιο, τότε, για να προκύψει η ίδια τελική αξία και στις δύο περιπτώσεις του ανατοκισμού, θα πρέπει να ισχύει η επόμενη ισότητα:

$$10.000\ (1 + x)^{10} = 10.000\ (1{,}08)^5$$

ή

$$(1 + x)^{10} = (1{,}08)^5 = 1{,}46933$$

ή $1 + x = \sqrt[10]{1{,}46933} = (1{,}46933)^{\frac{1}{10}} = 1{,}039.$

(Για τον υπολογισμό του $(1{,}46933)^{1/10}$ χρησιμοποιήσαμε τους λογαρίθμους).

Δηλαδή: $1 + x = 1{,}039$ και $x = 1{,}039 - 1 = 0{,}039$ ή $x = 3{,}9\%$. Τα επιτόκια 8% (ετήσιο) και 3,9% (εξαμηνιαίο) ονομάζονται ισοδύναμα επιτόκια.

Ώστε: **Δύο επιτόκια θα λέγονται ισοδύναμα, όταν αντιστοιχούν σε διαφορετικές περιόδους ανατοκισμού και δίνουν την ίδια τελική αξία για το ίδιο κεφάλαιο που ανατοκίζεται στο ίδιο χρονικό διάστημα.**

Από τη λύση του προηγουμένου προβλήματος και τον ορισμό των ισοδυνάμων επιτοκίων συμπεραίνομε ότι υπάρχει κάποια σχέση, η οποία συνδέει τα ισοδύναμα επιτόκια. Για να βρούμε αυτή τη σχέση εργαζόμαστε ως εξής: Υποθέτομε ότι η ακεραία περίοδος του ανατοκισμού (= n) διαιρείται σε ρ κλασματικές περιόδους· άρα η ακεραία περίοδος αποτελείται από $n \cdot \rho$ κλασματικές περιόδους.

Αν τώρα παραστήσομε με το i το επιτόκιο της ακεραίας περιόδου και με το i_ρ το επιτόκιο της κλασματικής περιόδου, τότε βάσει του ορισμού των ισοδυνάμων επιτοκίων και του γενικού τύπου του ανατοκισμού, θα ισχύει πάντοτε η σχέση:

$$K_0\,(1 + i_\rho)^{n \cdot \rho} = K_0\,(1 + i)^n$$

Αν τώρα διαιρέσομε και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσεως με το K_0 και εξάγομε τη n-στη ρίζα, τότε προκύπτει η επόμενη σχέση:

$$\mathbf{(1 + i_\rho)^\rho = 1 + i} \qquad \textbf{(42)}$$

$\rho = 2,3,4,6,12.$

Ο τύπος (42) αποτελεί τη θεμελιώδη σχέση, η οποία συνδέει το επιτόκιο της ακεραίας περιόδου (= i) με το επιτόκιο της κλασματικής περιόδου (= i_ρ).

Τα επιτόκια i και i_ρ ειναι **ισοδύναμα,** διότι αν και αντιστοιχούν σε διαφορετικές χρονικές περιόδους, ωστόσο δίνουν την ίδια τελική αξία για το ίδιο κεφάλαιο, το οποίο ανατοκίζεται στον ίδιο χρόνο. Το επιτόκιο i λέγεται και **πραγματικό επιτόκιο,** ενώ το γινόμενο $\boldsymbol{\rho \cdot i_\rho = J_\rho}$ ονομάζεται **ονομαστικό επιτόκιο.** Τα επιτόκια i_ρ και J_ρ είναι ανάλογα επιτόκια. Αν, π.χ. το εξαμηνιαίο επιτόκιο (= i_2) είναι 0,04, τότε το ανάλογο ετήσιο είναι 0,08(= 2 × 0,04). Αν το ονομαστικό επιτόκιο είναι 10%, τότε το ανάλογό του εξαμηνιαίο είναι 5%.

Αν στον τύπο (42) θέσομε όπου $i_\rho = \dfrac{J_\rho}{\rho}$ τότε προκύπτει η σχέση:

$$\left(1 + \frac{J_\rho}{\rho}\right)^\rho = 1 + i \quad \text{καί} \quad \mathbf{i = \left(1 + \frac{J_\rho}{\rho}\right)^\rho - 1} \qquad \mathbf{(42\alpha)}$$

Τη σχέση (42α) λύνομε ως προς $\dfrac{J_\rho}{\rho}$ και έχομε:

$$1 + i = \left(1 + \frac{J_\rho}{\rho}\right)^\rho \quad \text{ή} \quad (1 + i)^{\frac{1}{\rho}} = 1 + \frac{J_\rho}{\rho}.$$

Άρα:

$$\mathbf{\frac{J_\rho}{\rho} = (1 + i)^{\frac{1}{\rho}} - 1} \quad (42\beta) \quad \text{και} \quad \mathbf{J_\rho = \rho\left[(1 + i)^{\frac{1}{\rho}} - 1\right]} \quad (42\gamma)$$

Αν τώρα θέσομε όπου $\dfrac{J_\rho}{\rho} = i_\rho$, τότε η σχέση (42β) γράφεται ως εξής:

$$\mathbf{i_\rho = (1 + i)^{\frac{1}{\rho}} - 1} \qquad (42\delta)$$

όπου: $\rho = 2,3,4,6,12$.

Με τους παραπάνω τύπους βρίσκομε τα επιτόκια i_ρ και J_ρ όταν είναι γνωστό το i και αντιστρόφως.

Παράδειγμα 1ο. Το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο είναι 6%. Να βρεθούν: 1) το ισοδύναμο εξαμηνιαίο επιτόκιο και 2) το ισοδύναμο τριμηνιαίο επιτόκιο.

Λύση.

1) $i = 0{,}06$, $\rho = 2$, $i_2 =;$

Θα εφαρμοσθεί ο τύπος (42δ):

$$i_2 = (1 + 0{,}06)^{\frac{1}{2}} - 1 = (1{,}06)^{\frac{6}{12}} - 1 = 1{,}0296 - 1 = 0{,}0296 \text{ ή } 2{,}96\%.$$

Τό $(1 + i)^{\frac{1}{\rho}}$ βρίσκεται με λογαρίθμους ή απευθείας από τον Πίνακα ΙΙ, αφού μετατραπεί ο εκθέτης σε δωδέκατα.

2) $i = 0{,}06$, $\rho = 4$, $i_4 =;$

$$i_4 = (1{,}06)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1{,}06)^{\frac{3}{12}} - 1 = 1{,}0147 - 1 = 0{,}0147, \text{ δηλαδή } i_4 = 1{,}47\%.$$

Παράδειγμα 2ο. Το μηνιαίο επιτόκιο είναι 3%. Να βρεθεί το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο.

Λύση. $i_{12} = 0{,}03$, $\quad p = 12$, $\quad i = ;$
Θα εφαρμοσθεί ο τύπος (42).

$(1 + i_{12})^{12} = 1 + i$ ή $(1{,}03)^{12} = 1 + i$ ή $1{,}4258 = 1 + i$ και $i = 42{,}58\%$.

Παράδειγμα 3ο. Το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο είναιο 6%. Ποιο είναι το ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο, όταν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε μήνα;

Λύση. $i = 0{,}06$, $\quad p = 12$, $\quad J_{12} = ;$
Αντικαθιστώντας στον τύπο (42γ) βρίσκομε ότι:

$$J_{12} = 12\left[(1{,}06)^{\frac{1}{12}} - 1\right] = 12(1{,}004867 - 1) = 12 \times 0{,}004867 = 0{,}058.$$

Παρατήρηση. Το ονομαστικό επιτόκιο είναι πάντοτε μικρότερο του αντίστοιχου πραγματικού του, δηλαδή ισχύει: $J_p < i$.

Παράδειγμα 4ο. Το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο είναι 8%. Να βρεθεί το ισοδύναμο εξαμηνιαίο επιτόκιο.

Λύση. $i = 0{,}08$, $\quad p = 2$, $\quad i_2 = (1{,}08)^{\frac{1}{2}} - 1$. Τό $(1{,}08)^{\frac{1}{2}}$ θα βρεθεί με τους λογαρίθμους ως εξής:

$$\text{λογ}(1{,}08)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ \text{λογ}(1{,}08) = \frac{1}{2} \times 0{,}03342 = 0{,}01671 \text{ και}$$

$$(1{,}08)^{\frac{1}{2}} = 1{,}03922.$$

Επομένως: $i_2 = 1{,}03922 - 1 = 0{,}03922$ ή $i_2 = 3{,}92\%$.

7.5 Προεξόφληση με ανατοκισμό.

Από το γενικό τύπο (33) του ανατοκισμού προκύπτει ότι: αν την αρχική αξία ($= K_0$) ενός κεφαλαίου πολλαπλασιάσομε επί το συντελεστή ανατοκισμού $(1 + i)^n$, τότε βρίσκομε την τελική αξία του κεφαλαίου, δηλαδή: $K_n = K_0 (1 + i)^n$.

Από τον τύπο (38) προκύπτει ότι: αν την τελική αξία ($= K_n$) ενός κεφαλαίου πολλαπλασιάσομε επί το συντελεστή προεξοφλήσεως ($= U^n$), τότε βρίσκομε την αρχική αξία του κεφαλαίου, δηλαδή $K_0 = K_n \cdot U^n$.

Αν τώρα, από την τελική αξία ενός κεφαλαίου, (η οποία υπολογίζεται με ανατοκισμό) αφαιρέσομε την αρχική του αξία, τότε βρίσκομε το (εσωτερικό) **προεξόφλημα με ανατοκισμό,** δηλαδή:

$$\mathbf{E = K_n - K_n \cdot U^n} \qquad \textbf{(43)}$$

Αν τώρα γνωρίζομε την παρούσα αξία ($= K_0$), τότε το προεξόφλημα βρίσκεται βάσει του τύπου:

$$\mathbf{E = K_0 (1 + i)^n - K_0} \qquad \textbf{(44)}$$

Παρατήρηση. Αν πολλαπλασιάσομε και τα δύο μέλη της σχέσεως (43) επί $(1+i)^n$ θα έχομε:

$$E(1+i)^n = K_n(1+i)^n - K_n \cdot U^n (1+i)^n \qquad (\alpha)$$

$$\text{Αλλά: } U^n(1+i)^n = (1+i)^{-n}(1+i)^n = 1$$

Επομένως η σχέση (α) γράφεται:

$$E(1+i)^n = K_n(1+i)^n - K_n = I = \text{τόκος με ανατοκισμό}$$

Ώστε: $\mathbf{I = E(1+i)^n}$ καί $\mathbf{E = \dfrac{I}{(1+i)^n} = I \cdot U^n}$

Δηλαδή: Ο τόκος στον ανατοκισμό ισούται με την τελική αξία του προεξοφλήματος, ενώ το προεξόφλημα ισούται με την παρούσα αξία του τόκου.

Παράδειγμα. Ποια η παρούσα αξία και ποιο το προεξόφλημα (με ανατοκισμό) γραμματίου 10.000 δρχ., το οποίο προεξοφλήθηκε 5 έτη προτού λήξει με 8,5%;

Λύση. $K_0 =$; $K_n = 10.000$, $n = 5$, $i = 0{,}085$, $E =$;

$$(1{,}085)^5 = 1{,}503657 \qquad U^5_{0,085} = 0{,}665045$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στους τύπους (38) και (43) βρίσκομε:

$K_0 = K_n \cdot U^n = 10.000 \times 0{,}665045 = 6.650{,}45$

$E = K_n - K_n \cdot U^n = 10.000 - 6.650{,}45 = 3.349{,}55$

$I = K_n(1+i)^n - K_n = 10.000 \times 1{,}503657 - 10.000 = 5.036{,}57$

$I = E(1+i)^n = 3.349{,}55 \times 1{,}503657 = 5.036{,}57$

$E = I \cdot U^n = 5.036{,}57 \times 0{,}665045 = 3.349{,}55.$

7.6 Προβλήματα ανατοκισμού.

1. Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 10.000 δρχ. το οποίο ανατοκίσθηκε επί 12 έτη προς 6%.
(Απ. 20.122)

2. Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 20.000 δρχ. που ανατοκίσθηκε προς $4^1/_4$ % επί 8 έτη και 10 μήνες.
(Απ. 28.886,94)

3. Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 15.000 δρχ., το οποίο ανατοκίσθηκε επί 35 έτη με ετήσιο πραγματικό επιτόκιο 5%, του ανατοκισμού γινωμένου κάθε εξαμηνία.
(Απ. 82.740)

4. Κατάθεσε κάποιος στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο 5000 δρχ. Τι ποσό θα έχει σχηματισθεί μετά από 6 έτη, αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο με ετήσιο επιτόκιο 5%;
(Απ. 6700)

5. Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 10.000 δρχ., το οποίο ανατοκίσθηκε επί 12 έτη 7 μήνες και 13 ημέρες με ετήσιο επιτόκιο $4^1/_2$ %.
(Απ. 17.427)

6. Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 50.000 δρχ., το οποίο ανατοκίσθηκε επί 8 έτη 4 μήνες και 20 ημέρες με ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο 6%, όταν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο.
(Απ. 82.096)

7. Καταθέτει κάποιος σήμερα 100.000 δρχ. με ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο 6% και ζητείται να βρεθεί το ποσό που θα σχηματισθεί μετά 10 έτη 3 μήνες και 10 ημέρες.
(Απ. 182070)

8. Καταθέτει κάποιος σήμερα 1.000.000 δρχ. με ανατοκισμό προς ετήσιο επιτόκιο 20% και ζητείται να βρεθεί το ποσό που θα σχηματισθεί μετά 10 έτη, αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο.
(Απ. 6.256.300)

9. Την 1η Φεβρουαρίου 1978 κατάθεσε κάποιος στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο 75.000 δρχ. με ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο $3^1/_2$%. Τι ποσό θα έχει σχηματισθεί στις 15 Ιουλίου 1988;
(Απ. 107.488)

10. Ο έμπορος Ε κατάθεσε στην Τράπεζα Τ 25.000 δρχ., με ανατοκισμό και με εξαμηνιαίο επιτόκιο $2^1/_2$%. Έξι έτη μετά την αρχική κατάθεση, το επιτόκιο άλλαξε και έγινε 3% το εξάμηνο. Να βρεθεί το ποσό που θα εμφανίζει ο λογαριασμός του Ε 10 έτη μετά την αλλαγή του επιτοκίου.
(Απ. 60.725,50)

11. Ο υπάλληλος Υ κατάθεσε με ανατοκισμό στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο 20.000 δρχ. με εξαμηνιαίο επιτόκιο $4^1/_2$% για μια περίοδο 5 ετών. Στο τέλος όμως των 2,5 ετών ο Υ απέσυρε 10.000 δρχ. Τι ποσό θα υπάρχει στο λ/σμό του Υ στο τέλος των 5 ετών;
(Απ. 18.597,49)

12. Στη δεκαετία 1960 - 1970 το ετήσιο ποσοστό αυξήσεως του πληθυσμού μιας πόλεως ήταν 3%. Αν κατά το 1970 ο πληθυσμός της πόλεως ήταν 300.000 κάτοικοι, να υπολογισθεί ο πληθυσμός της πόλεως κατά το 1980, με την προϋπόθεση ότι ισχύει ο τύπος του ανατοκισμού σχετικώς με την αύξηση του πληθυσμού.
(Απ. 403.175)

13. Ένας πατέρας κατάθεσε σε μια τράπεζα 20.000 δρχ. την ημέρα που γεννήθηκε η κόρη του με ετήσιο επιτόκιο 3,5%. Αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο, ποιό ποσό θα έχει σχηματισθεί όταν η κόρη του θα έχει συμπληρώσει το 18ο έτος της ηλικίας της;
(Απ. 37.348)

14. Την 31η Δεκεμβρίου 1974, ο υπάλληλος Υ πήρε από την Κτηματική Τράπεζα δάνειο 600.000 δρχ. Ποιό ποσό πρέπει να επιστρέψει στις 31 Δεκεμβρίου 1980, αν το δάνειο υπολογίσθηκε με ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο 5% και ο ανατοκισμός γινόταν κάθε εξάμηνο;
(Απ. 806.933,40)

15. Στίς 30 Ιουνίου 1974, ο καταθέτης Κ κατάθεσε σε μιά τράπεζα 15.000 δρχ. Τι ποσό θα εμφανίζει ο λ/σμός του Κ στις 30 Ιουνίου 1980, αν η κατάθεση έγινε με ανατοκισμό προς ετήσιο επιτόκιο 6% και ο ανατοκισμός γινόταν κάθε τρίμηνο;
(Απ. 21.442,55)

16. Ποιο κεφάλαιο ανατοκίσθηκε με 2,5% και έγινε μετά από 12 έτη 14.000 δρχ;
(Απ. 10.409,70)

17. Κεφάλαιο που ανατοκίσθηκε με ετήσιο πραγματικό επιτόκιο 6%, έγινε μετά 10 έτη και 6 μηνες 30.000 δρχ. Αν ο ανατοκισμός γινόταν κάθε εξάμηνο ποιό κεφάλαιο ανατοκίσθηκε;
(Απ. 16271)

18. Κεφάλαιο ανατοκίσθηκε επί 11 έτη ως εξής: Τα πρώτα 6 έτη με 4% και τα υπόλοιπα έτη με 2%. Να βρεθεί το κεφάλαιο που ανατοκίσθηκε, αν είναι γνωστό ότι στο τέλος των 11 ετών είχε σχηματισθεί κεφάλαιο 10.000 δρχ.
(Απ. 7158)

19. Ποιο κεφάλαιο, αν ανατοκισθεί με 6%, θα δώσει μετά 14 έτη και 3 μήνες τελική αξία 300.000 δρχ;
(Απ. 130.772)

20. Να βρεθεί το κεφάλαιο, το οποίο ανατοκίσθηκε με ετήσιο επιτόκιο 5% επί 6 έτη και 5 μήνες και έγινε μαζί με τους τόκους του 35.600 δρχ.

(Απ. 25.868)

21. Ποιο κεφάλαιο ανατοκίσθηκε με 5% και έγινε μετά 10 έτη και 3 μήνες 20.000 δχ;

(Απ. 12.129,40)

22. Μετά πόσο χρόνο κεφάλαιο 4000 δρχ. γίνεται 6000 δρχ., όταν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο με εξαμηνιαίο ονομαστικό επιτόκιο 2,5%;

(Απ. 16,5 έξάμ.)

23. Σε πόσο χρόνο 30.000 δρχ. γίνονται 100.000 δρχ. με ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο 4,5% όταν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο;

(Απ. 27,5)

24. Σε πόσο χρόνο κεφάλαιο 12.400 δρχ. που ανατοκίσθηκε με ετήσιο επιτόκιο 6% θα γίνει 18.000 δρχ.;

(Απ. 6 έτη 4 μην. 20 ημ.)

25. Δάνεισε κάποιος κεφάλαιο 60.000 δρχ. με ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο 5,5% για 8 έτη. Επί πόσο χρόνο πρέπει να δανείσει το ίδιο κεφάλαιο και με το ίδιο επιτόκιο με απλό τόκο για να εισπράξει το ίδιο τελικό κεφάλαιο και στις δύο περιπτώσεις;

(Απ. 3500 ημ. ή 9 έτη 8μην. 20 ημ.)

26. Μετά πόσο χρόνο κεφάλαιο 100.000 δρχ., το οποίο ανατοκίσθηκε με ετήσιο επιτόκιο 6%, έγινε 175.000;

(Απ. 9 έτη 7 μην. 6 ημ.)

27. Σε πόσο χρόνο κεφάλαιο 21.100 δρχ. που ανατοκίζεται κάθε έτος με $5^1/_2$% γίνεται 44.649,60 δρχ.;

(Απ. 14 έτη)

28. Κάποιος πατέρας που πέθανε άφησε στην κόρη του που ήταν 8 χρονών 100.000 δρχ. Σύμφωνα με όρο της διαθήκης του πατέρα, το πιο πάνω ποσό κατατέθηκε σε μια τράπεζα με ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο 7%. Να βρεθεί η ηλικία της κόρης όταν το κεφάλαιο που ανατοκίσθηκε θα έχει γίνει 240.984,50 δρχ.

(Απ. 21 ετών)

29. Με ποιο ετήσιο πραγματικό επιτόκιο, κεφάλαιο 1000 δρχ. που ανατοκίσθηκε επί 25 έτη έγινε 4500 δρχ., όταν ο ανατοκισμός γινόταν κάθε εξάμηνο;

(Απ. 6,19%)

30. Κεφάλαιο 20.000 δρχ. που ανατοκίσθηκε επί 20 έτη και 9 μηνες έγινε 50.000 δρχ. Να βρεθεί το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο, όταν ο ανατοκισμός γινόταν κάθε εξάμηνο.

(Απ. 4,489%)

31. Με ποιο επιτόκιο κεφάλαιο 100.000 δρχ. ανατοκίσθηκε επί 20 έτη και έγινε 424.785,11 δρχ.;

(Απ. 7,5%)

32. Με ποιο πραγματικό ετήσιο επιτόκιο, κεφάλαιο 1.000.000 δρχ. που ανατοκίσθηκε για 12 έτη, έγινε 2.100.000 δρχ., όταν ο ανατοκισμός γινόταν κάθε εξάμηνο;

(Απ. 6,37%)

33. Με ποιο επιτόκιο πρέπει να ανατοκισθούν 25.000 δραχμές για να γίνουν 52.529,65 δρχ. μετά 16 έτη;

(Απ. 4,75%)

34. Κεφάλαιο 50.000 δρχ. ανατοκίσθηκε επί 5 έτη και έγινε 70.000 δρχ.· ο ανατοκισμός γινόταν κάθε τρίμηνο. Να βρεθεί το ετήσιο επιτόκιο.

(Απ. 6,78%)

35. Το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο είναι 10%. Να βρεθούν: 1) το εξαμηνιαίο ονομαστικό επιτόκιο. 2)

Το ετήσιο πραγματικό επιτόκιο, όταν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο.

(Απ. 5% - 10,38%)

36. Ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο και το τριμηνιαίο επιτόκιο είναι 6%. Να βρεθούν τα εξής επιτόκια: 1) το ισοδύναμο ετήσιο· 2) το ισοδύναμο εξαμηνιαίο· 3) το ισοδύναμο μηνιαίο· 4) το ανάλογο ετήσιο· 5) το ανάλογο εξαμηνιαίο· 6) το ανάλογο μηνιαίο.

(Απ. 26,24% - 12,36% - 1,96% - 24% - 12% - 2%)

37. Το ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο είναι 18%. Αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο, να βρεθούν τα εξής επιτόκια: 1) το ισοδύναμο τριμηνιαίο· 2) το ισοδύναμο εξαμηνιαίο· 3) το ισοδύναμο μηνιαίο· 4) το ανάλογο εξαμηνιαίο· 5) το ανάλογα μηνιαίο· 6) το ανάλογο τριμηνιαίο· 7) το ετήσιο πραγματικό επιτόκιο.

(Απ. 4,5% - 9,2% - 1,478% - 9% - 1,5% - 4,5% - 19,25%)

38. Το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο είναι 26,24%. Αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο, να βρεθούν τα επιτόκια: 1) το ετήσιο ονομαστικό και 2) το μηνιαίο πραγματικό.

(Απ. 24% - 1,96%)

39. Γραμμάτιο, ονομ. αξίας 10.000 δρχ., προεξοφλείται 3 έτη και 8 μήνες προτού λήξει, με ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο 6%. Να βρεθεί η παρούσα αξία και το προεξόφλημα.

(Απ. 8.076,23 - 1.923,77)

40. Ο έμπορος Ε κατέχει γραμμάτιο, ονομ. αξίας 25.000 δρχ., το οποίο λήγει μετά 5 έτη. Επειδή ο Ε έχει ανάγκη από χρήματα, προεξοφλεί το γραμμάτιο με ετήσιο επιτόκιο 5%. Αν υποθέσομε ότι ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο, ποια θα είναι η παρούσα αξία και ποιο το προεξόφλημα;

(Απ. 19.500,20 - 5.499,80)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ

ΡΑΝΤΕΣ

8.1 Ορισμοί, κατάταξη και σύμβολα ραντών.

Ορισμοί. Στις τραπεζικές και γενικά στις οικονομικοεμπορικές συναλλαγές, συνηθίζεται πάρα πολύ η εξόφληση ενός δανείου με δόσεις, οι οποίες καταβάλλονται σε ίσα χρονικά διαστήματα, ή ο σχηματισμός ενός κεφαλαίου με καταθέσεις που γίνονται σε ίσα χρονικά διαστήματα (κάθε μήνα, κάθε εξάμηνο, κ.ο.κ.).

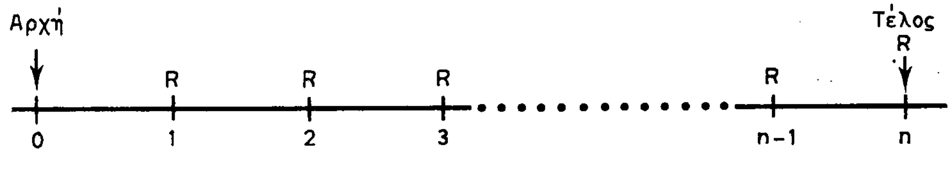
Μια σειρά δόσεων για την εξόφληση ενός χρέους, ή οι διάφορες περιοδικές καταθέσεις για το σχηματισμό ενός κεφαλαίου, ονομάζεται ειδικότερα **Ράντα.** [Η λέξη Ράντα προέρχεται από τη λατινική λέξη Reddita. Στις λατινογενείς γλώσσες αποδίδεται με τις λέξεις: Rent ή Annuity (Αγγλ.), Rente ή Annuité (Γαλλ.) die Rente ή die Annuitat (Γερμ.) και Rendita ή Annualita (Ίταλ.). Στην ελληνική ορολογία χρησιμοποιήθηκαν οι λέξεις: παροχή, πρόσοδος, χρηματοσειρά, περιοδική καταβολή, αλλά επικράτησε τελικά η λέξη Ράντα].

Ώστε: **Ράντα καλείται σειρά κεφαλαίων, τα οποία καταβάλλονται ή καταθέτονται σε ίσα χρονικά διαστήματα.**

Κάθε χρηματικό ποσό που καταβάλλεται ή καταθέτεται στα ίσα χρονικά διαστήματα λέγεται **όρος** ή **δόση** της ράντας. Η χρονική στιγμή της πληρωμής ή καταθέσεως της δόσεως καλείται **λήξη.** Ο χρόνος ο οποίος περιέχεται μεταξύ δύο διαδοχικών λήξεων λέγεται **περίοδος** της ράντας. Αν ο όρος μιας ράντας καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου, τότε η ράντα λέγεται **ληξιπρόθεσμη,** ενώ αν ο όρος της ράντας καταβάλλεται στην αρχή κάθε περιόδου, τότε η ράντα λέγεται **προκαταβλητέα.**

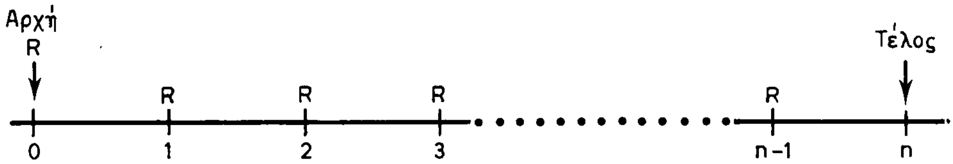
Για την καλύτερη κατανόηση των πιο πάνω ορισμών, παραθέτομε τα επόμενα σχήματα:

Ληξιπρόθεσμη ράντα



R = όρος της ράντας, 0, 1, 2, 3, ..., n = περίοδοι ράντας.

Προκαταβλητέα ράντα



Αρχή ράντας λέγεται: στις ληξιπρόθεσμες ράντες, μία περίοδος πριν από την κατάθεση του πρώτου όρου, ενώ στις προκαταβλητέες ράντες η περίοδος καταθέσεως του πρώτου όρου.

Τέλος ράντας είναι: στις ληξιπρόθεσμες ράντες, η περίοδος καταθέσεως του τελευταίου όρου της ράντας, ενώ στις προκαταβλητέες ράντες, μία περίοδος μετά την κατάθεση του τελευταίου όρου της ράντας.

Εποχή υπολογισμού λέγεται η χρονική στιγμή κατά την οποία ζητείται ο υπολογισμός της αξίας των όρων μιας ράντας.

Αρχική ή **παρούσα αξία ράντας** λέγεται η αξία των όρων μιας ράντας στην αρχή της.

Τελική αξία ράντας λέγεται η αξία των όρων μιας ράντας στο τέλος της.

Κατάταξη ραντών. Οι ράντες κατατάσσονται:

α) Ανάλογα με τον όρο: 1) σε **σταθερές,** όταν όλοι οι όροι της ράντας είναι ίσοι και 2) σε **μεταβλητές,** όταν οι όροι της ράντας δεν είναι ίσοι.

β) Ανάλογα με τη διάρκεια: 1) σε **πρόσκαιρες,** όταν το πλήθος των όρων της ράντας είναι ορισμένο, 2) σε **διηνεκείς,** όταν το πλήθος των όρων της ράντας είναι άπειρο και 3) σε **ράντες ζωής,** όταν το πλήθος των όρων μιας ράντας εξαρτάται από τη ζωή ενός ατόμου.

γ) Ανάλογα με την εποχή υπολογισμου: 1) σε **άμεσες,** όταν η εποχή υπολογισμού της ράντας ταυτίζεται με την αρχή ή τέλος της ράντας, 2) σε **αρξάμενες,** όταν η εποχή υπολογισμού βρίσκεται μετά την αρχή της ράντας και 3) σε **μέλλουσες,** όταν η εποχή υπολογισμού βρίσκεται πριν από την αρχή της ράντας.

δ) Ανάλογα με το χρόνο πληρωμής των όρων: 1) σε **ληξιπρόθεσμες** και 2) **προκαταβλητέες.**

ε) Ανάλογα με την περίοδο: 1) σε **ακέραιες** και 2) σε **κλασματικές.** Αν ο όρος μιας ράντας είναι ετήσιος, εξαμηνιαίος, κλπ. και ο ανατοκισμός γίνεται κάθε έτος ή κάθε εξάμηνο, κλπ. τότε η ράντα λέγεται **ακεραία.** Αν όμως ο κάθε όρος μιας ακεραίας ράντας διαιρείται σε ρ ίσους όρους και η ακεραία περίοδος του ανατοκισμού διαιρείται σε ρ κλασματικές περιόδους, τότε η ράντα λέγεται **κλασματική.**

Στις επόμενες παραγράφους, θα εξετάσομε μόνο τις ράντες εκείνες που έχουν πρακτική αξία και εφαρμόζονται στις οικονομικοεμπορικές συναλλαγές, δηλαδή με ράντες: σταθερές, πρόσκαιρες, ακέραιες, ληξιπρόθεσμες και προκαταβλητέες.

Σύμβολα ραντών. Κατά τη λύση των διαφόρων προβλημάτων των ραντών χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα σύμβολα:

R = Όρος ή δόση μιας σταθερής ράντας.

$a_{\overline{n|}i}$ = Αρχική αξία **ληξιπρόθεσμης** ράντας, n όρων 1 νομισματικής μονάδας με επιτόκιο i.

$\mathbf{a}_{\overline{n|}i}$ = Αρχική αξία **προκαταβλητέας** ράντας, n όρων 1 νομισματικής μονάδας με επιτόκιο i.

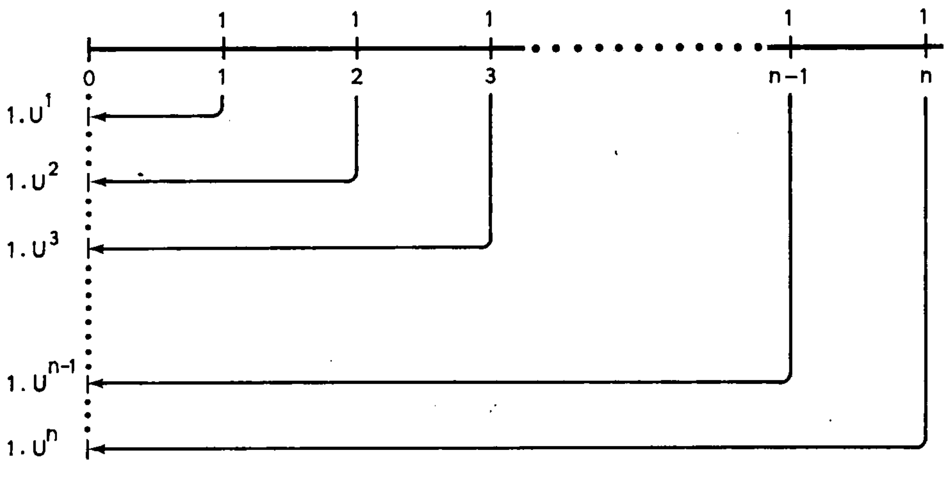
$S_{\overline{n|}i}$ = Τελική αξία **ληξιπρόθεσμης** ράντας, n όρων 1 νομισματικης μονάδας με επιτόκιο i.

$s_{\overline{n|}i}$ = Τελική αξία **προκαταβλητέας** ράντας, n όρων 1 νομισματικής μονάδας με επιτόκιο i.

$V_{αρχ.}$ = Αρχική αξία ράντας n όρων, R νομισμ. μονάδων.
$V_{τελ.}$ = Τελική αξία ράντας n όρων, R νομισμ. μονάδων.

8.2 Εύρεση της αρχικής αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας.

Στην περίπτωση αυτή, έχομε μια ληξιπρόθεσμη ράντα, διάρκειας n ετών, όρου 1 νομισματικής μονάδας, και θέλομε να υπολογίσομε την αρχική (παρούσα) αξία των όρων της ράντας με επιτόκιο i, δηλαδή να βρούμε την αξία της ράντας στην αρχή της. Για την καλύτερη κατανόηση του υπολογισμού της παρούσας αξίας της ράντας, παραθέτομε το παρακάτω διάγραμμα:



Η παρούσα (αρχική) αξία κάθε όρου της ράντας θα βρεθεί βάσει του γνωστού τύπου $K_0 = K_n \cdot U^n$, όπου $K_n = 1$.

Η 1η νομισμ. μονάδα έχει παρούσα αξία: $1 \cdot U^1 = U^1$
Η 2η νομισμ. μονάδα έχει παρούσα αξία: $1 \cdot U^2 = U^2$
Η 3η νομισμ. μονάδα έχει παρούσα αξία: $1 \cdot U^3 = U^3$
. . . .
. . . .
Η n νομισμ. μονάδα έχει παρούσα αξία: $1 \cdot U^n = U^n$.

Επομένως, η ζητούμενη παρούσα (αρχική) αξία ισούται με το άθροισμα των επιμέρους παρουσών αξιών των όρων της ράντας, δηλαδή:

$$a_{\overline{n}|i} = U^1 + U^2 + U^3 + \ldots + U^{n-1} + U^n \qquad (45)$$

Το β' μέλος της σχέσεως (45) είναι άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου, με πρώτο όρο το U, με λόγο το U και τελευταίο όρο το U^n. Επομένως, αν στον τύπο (με τον τύπο αυτό βρίσκομε το άθροισμα των n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το α, λόγο το $\omega \neq 1$ και τελευταίο όρο το τ) $\Sigma = \dfrac{\tau \cdot \omega - \alpha}{\omega - 1}$ θέσομε $\alpha = U$, $\omega = U$ και $\tau = U^n$, τότε θα έχομε:

$$\Sigma = a_{\overline{n}|i} = \frac{U^n \cdot U - U}{U-1} = \frac{U(U^n - 1)}{U-1}.$$

Αν τώρα διαιρέσομε αριθμητή και παρονομαστή με το U, τότε θα έχομε:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{U^n - 1}{1 - \dfrac{1}{U}} = \frac{1 - U^n}{\dfrac{1}{U} - 1}$$

Γνωρίζομε όμως ότι: $U = \dfrac{1}{1+i}$ και $\dfrac{1}{U} = 1 + i$

Αν τώρα αντικαταστήσομε στον παρονομαστή της παραπάνω σχέσεως το $\dfrac{1}{U}$ με το ίσο του $(1 + i)$, τότε προκύπτει η επόμενη θεμελιώδης σχέση:

$$\mathbf{a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - U^n}{i}} \qquad \mathbf{(46)}$$

Το $a_{\overline{n}|i}$ είναι η αρχική (παρούσα) αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας, n όρων 1 νομισματικής μονάδας. Το $a_{\overline{n}|i}$ το βρίσκομε στους πίνακες Ανατοκισμού - Ραντών - Χρεωλυσίων (βλ. Πίνακα IV) με ορισμένα i και n. Μπορούμε όμως να βρούμε πρώτα το U^n από τον Πίνακα III και να το αντικαταστήσομε κατόπιν στον τύπο (46). Π.χ. με $i = 0{,}02$ και $n = 20$, από τον Πίνακα IV βρίσκομε: $a_{\overline{20}|0,02} = 16{,}3514\ 3334$. Αν τώρα θέλομε να βρούμε το $a_{\overline{n}|i}$ μέ $i = 0{,}09$, 0,10, ..., 0,20, τότε χρησιμοποιούμε τον Πίνακα III, γιατί ο Πίνακας IV παρέχει τις τιμές του $a_{\overline{n}|i}$ με επιτόκια $i = 0{,}0025$ έως $i = 0{,}08$. Αν π.χ. θέλομε να βρούμε την

τιμή της
$$a_{\overline{20}|0,12} = \frac{1 - U^{20}}{0,12}, \qquad (\alpha)$$

τότε εργαζόμαστε ως εξής: Στον Πίνακα ΙΙΙ, με $i = 0,12$ και $n = 20$, βρίσκομε: $U^{20} = 0,10366677$. Αντικαθιστώντας τώρα το U^{20} με το ίσο του στη σχέση (α) βρίσκομε:

$$a_{\overline{20}|0,12} = \frac{1 - 0,10366677}{0,12} = 7,469444$$

Το $a_{\overline{n}|i}$ αυξάνεται όταν αυξάνει το n και ελαττώνεται όταν αυξάνει το επιτόκιο.

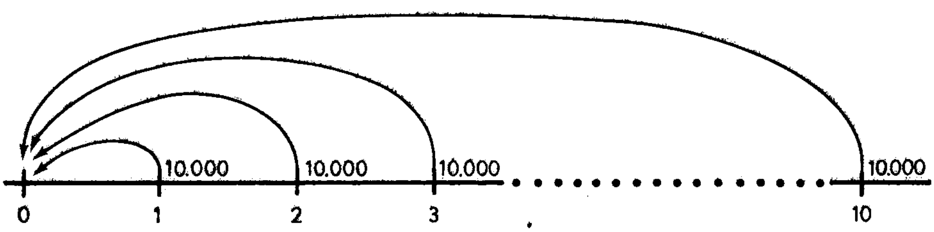
Αν ο όρος της ράντας είναι R νομισματικές μονάδες, τότε το $a_{\overline{n}|i}$ (το οποίο είναι η αρχική αξία μιας νομισματικής μονάδας) πρέπει να πολλαπλασιασθεί επί R.

Επομένως, η αρχική αξία όλων των όρων μιας ληξιπρόθεσμης ράντας, όρου R νομισμ. μονάδων, υπολογίζεται βάσει του τύπου:

$$V_{\text{αρχ.}} = R \cdot a_{\overline{n}|i} \qquad \textbf{(47)}$$

Παράδειγμα 1ο. Να βρεθεί το ποσό που πρέπει να καταθέσομε σήμερα σε μια τράπεζα, με ανατοκισμό προς 5%, για να έχομε το δικαίωμα να αποσύρομε 10.000 δρχ. στο τέλος κάθε έτους και επί 10 έτη.

Λύση. $R = 10.000$, $n = 10$, $i = 0,05$



Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (47) και έχομε:

$$V_{\text{αρχ.}} = R \cdot a_{\overline{n}|i} = 10.000\, a_{\overline{10}|0,05} \qquad (\alpha)$$

Στον Πίνακα IV, με $i = 0,05$ και $n = 10$, βρίσκομε: $a_{\overline{10}|0,05} = 7,72173$.

Αντικαθιστώντας τώρα στη σχέση (α) βρίσκομε ότι:

$$V_{\text{αρχ.}} = 10.000 \times 7,72173 = 77.217,30 \text{ δρχ.}$$

Άρα, πρέπει να καταθέσομε σήμερα 77.217,30 δρχ. σε μια τράπεζα προς 5%, για να έχομε το δικαίωμα να αποσύρομε 10.000 δρχ. στο τέλος κάθε έτους και επί 10 έτη.

Παράδειγμα 2ο. Ένα ίδρυμα θέλει να χορηγεί κάθε χρόνο μια υποτροφία 30.000 δρχ. και επί 10 χρόνια. Η πρώτη υποτροφία θα δοθεί μετά ένα χρόνο. Ποιο ποσό πρέπει να καταθέσει σήμερα το ίδρυμα σε μια τράπεζα, με ανατοκισμό προς 4%, για να μπορεί να δίνει τις 30.000 δρχ. στο τέλος κάθε χρόνου για την υποτροφία;

Λύση. Το ποσό που πρέπει να καταθέσει σήμερα το ίδρυμα αντιστοιχεί με την αρχική (παρούσα) αξία ληξιπρόθεσμης ράντας 10 όρων που ο κάθε όρος αποτελείται από 30.000 δρχ. Δηλαδή: $R = 30.000, \quad n = 10, \quad i = 0,04$

Αν αντικαταστήσομε τα δεδομένα στον τύπο (47) θα βρούμε:

$$V_{\alpha\rho\chi.} = 30.000\ \alpha_{\overline{10}|\,0,04} = 30.000 \times 8,110896 = 243.326,88 \text{ δρχ.}$$

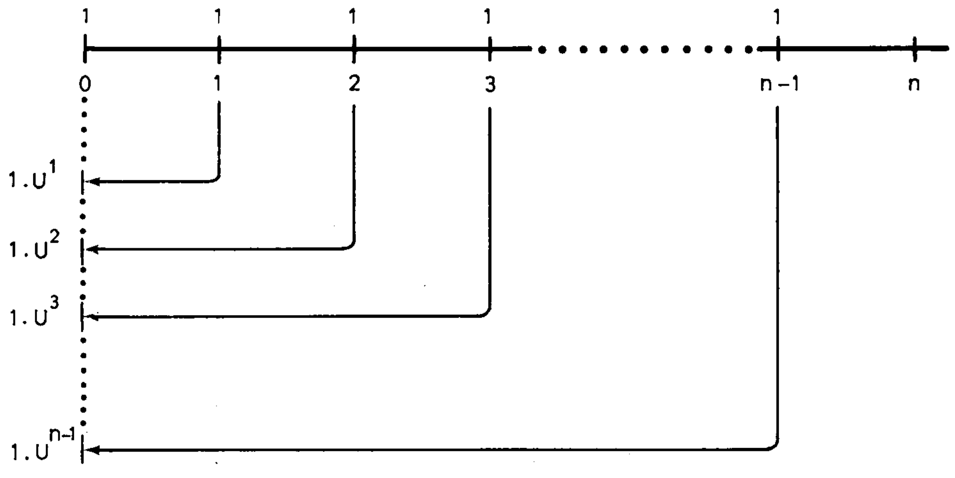
Ώστε: Το ίδρυμα πρέπει να καταθέσει σήμερα 243.326,88 δρχ. για να μπορεί να αποσύρει κάθε χρόνο 30.000 δρχ. για την υποτροφία.

8.3 Εύρεση της αρχικής αξίας προκαταβλητέας ράντας.

Γνωρίζομε ότι: **Προκαταβλητέα** λέγεται μια ράντα, αν ο κάθε όρος της καταβάλλεται στην αρχή κάθε περιόδου.

Έστω ότι έχομε μια προκαταβλητέα ράντα n ετών, όρου 1 νομισματικής μονάδας και θέλομε να υπολογίσομε την αξία των όρων της ράντας στην αρχή της.

Για την εύρεση της αρχικής αξίας μιας προκαταβλητέας ράντας, εργαζόμαστε όπως ακριβώς εργασθήκαμε και στη ληξιπρόθεσμη ράντα. Για την καλύτερη κατανόηση παραθέτομε το ακόλουθο διάγραμμα:



Η αρχική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας (n όρων 1 νομισμ. μονάδας) συμβολίζεται με το $a_{\overline{n}|\,i}$. Όπως φαίνεται και από το παραπάνω διάγραμμα, η παρούσα αξία του 1ου όρου είναι 1, του 2ου όρου είναι $1 \cdot U^1$, του 3ου $1 \cdot U^2$, κ.ο.κ. και του τελευταίου όρου είναι $1 \cdot U^{n-1}$. Δηλαδή, για να βρούμε την παρούσα αξία κάθε όρου της ράντας προεξοφλούμε. Ο πρώτος όρος δεν προεξοφλείται, γιατί η παρούσα αξία του, κατά τη χρονική στιγμή 0, ισούται με τον εαυτό του. Επομένως, η αρχική (παρούσα) αξία όλων των όρων μιας προκαταβλητέας ράντας, ισούται με το άθροισμα των επιμέρους παρουσών αξιών των όρων της ράντας. Δηλαδή είναι:

$$a_{\overline{n}|i} = 1 + U^1 + U^2 + U^3 + \dots + U^{n-1} \tag{48}$$

Το β΄ μέλος της σχέσεως (48) είναι άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου, με πρώτο όρο $\alpha = 1$, λόγο $\omega = U$ και τελευταίο όρο $\tau = U^{n-1}$. Επομένως, σύμφωνα με το γνωστό τύπο $\Sigma = \dfrac{\tau \cdot \omega - \alpha}{\omega - 1}$, θα έχομε:

$$\Sigma = a_{\overline{n}|i} = \frac{U^{n-1} \cdot U - 1}{U - 1} = \frac{U^{n-1+1} - 1}{U - 1} = \frac{U^n - 1}{U - 1} = \frac{(-1)(U^n - 1)}{(-1)(U - 1)} =$$

$$= \frac{1 - U^n}{1 - U} = \frac{1 - U^n}{1 - \dfrac{1}{1+i}}, \text{ διότι } \quad U = \frac{1}{1+i}$$

ή

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - U^n}{\dfrac{(1+i) - 1}{1+i}} = \frac{1 - U^n}{i}\,(1+i) \tag{49}$$

Γνωρίζομε όμως ότι: $\dfrac{1 - U^n}{i} = \alpha_{\overline{n}|i}$. Αν τώρα αντικαταστήσομε στη σχέση

(49) το $\dfrac{(1 - U^n)}{i}$ με το ίσο του $\alpha_{\overline{n}|i}$, τότε προκύπτει η σχέση:

$$\mathbf{a_{\overline{n}|i} = \alpha_{\overline{n}|i}\,(1 + i)} \tag{50}$$

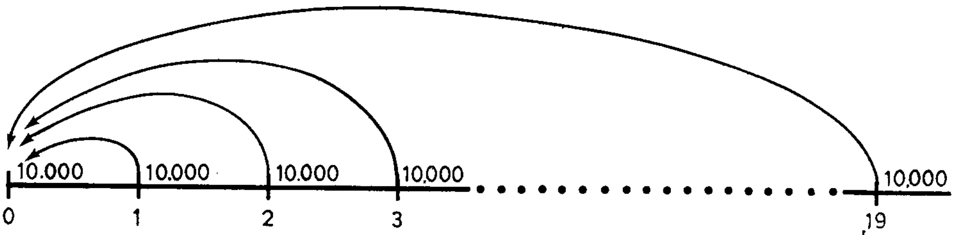
Με τον τύπο (50) βρίσκομε την αρχική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας, n όρων 1 νομισμ. μονάδας. Αν όμως, κάθε όρος της ράντας είναι R νομισματικές μονάδες, τότε η αρχική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας υπολογίζεται βάσει του τύπου:

$$\mathbf{V_{\alpha\rho\chi.} = R \cdot a_{\overline{n}|i} = R\,\alpha_{\overline{n}|i}\,(1 + i)} \tag{51}$$

Παρατήρηση. Από τον τύπο (51) συνάγεται ότι: για να βρούμε την αρχική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας, αρκεί να ανατοκίσομε την αντίστοιχη ληξιπρόθεσμη για μια ακόμη περίοδο.

Παράδειγμα. Να βρεθεί η αρχική αξία προκαταβλητέας ράντας, ετήσιου όρου 10.000 δρχ., διάρκειας 20 ετών, προς ετήσιο επιτόκιο 6%.

Λύση. $R = 10.000, \quad n = 20, \quad i = 0{,}06$



Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (51) και έχομε:

$$V_{αρχ} = R \cdot a_{\overline{n|}\,i}\,(1 + i) = 10.000\; a_{\overline{20|}\,0{,}06}\,(1{,}06) \qquad (α)$$

Στον Πίνακα IV, με $i = 0{,}06$ και $n = 20$, βρίσκομε $a_{\overline{20|}\,0{,}06} = 11{,}46992$
Με αντικατάσταση τώρα στη σχέση (α) βρίσκομε:

$$V_{αρχ} = 10.000 \times 11{,}46992 \times 1{,}06 = 121.581{,}15$$

Άρα, πρέπει να καταθέσομε σήμερα 121.581,15 σε ένα ταμιευτήριο, για να μπορούμε να αποσύρομε στην αρχή κάθε χρόνου 10.000 και επί 20 χρόνια.

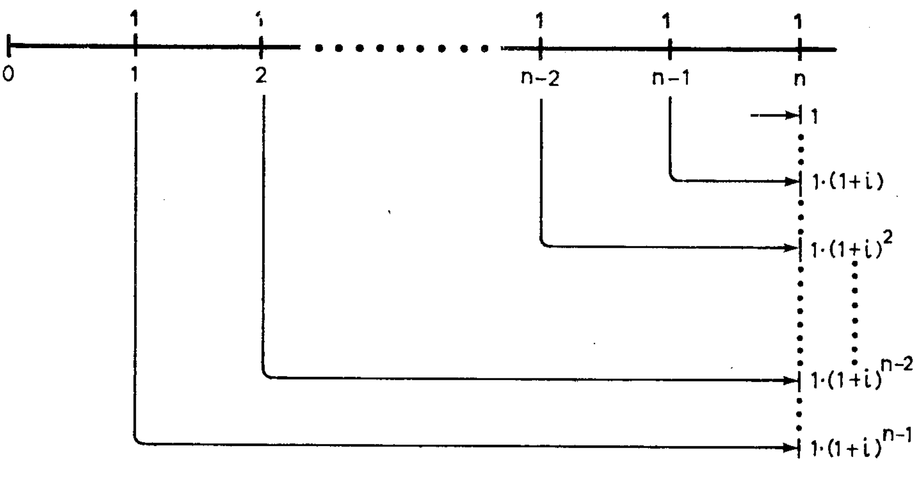
8.4 Εύρεση της τελικής αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας.

Είπαμε ότι: **τελική αξία ράντας** λέγεται η αξία των όρων μιας ράντας στο τέλος της.

Έστω ότι έχομε μια **ληξιπρόθεσμη** ράντα, n όρων 1 νομισματικής μονάδας και θέλομε να βρούμε την αξία των όρων της στο τέλος των n ετών.

Για να βρούμε την τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας, αρκεί να υπολογίσομε την τελική αξία κάθε όρου της ράντας και κατόπιν να αθροίσομε τις επιμέρους τελικές αξίες.

Η εύρεση της τελικής αξίας κάθε όρου μιας ράντας γίνεται με το γνωστό τύπο: $K_n = K_0\,(1 + i)^n$, όπου $K_0 = 1$, κατά το ακόλουθο διάγραμμα:



Όπως φαίνεται από το παραπάνω διάγραμμα, ο 1ος όρος της ράντας ανατοκίζεται επί $(n-1)$ χρονικές περιόδους και αποκτά τελική αξία $1(1+i)^{n-1}$, ο 2ος όρος αποκτά τελική αξία $1(1+i)^{n-2}$, κ.ο.κ. ο $(n-1)$ όρος ανατοκίζεται για μία χρονική περίοδο και δίνει τελική αξία $1 \cdot (1+i)$. Ο n-στός ορος ισούται με τον εαυτό του, διότι δεν ανατοκίζεται.

Επομένως, η τελική αξία όλων των όρων μιας ληξιπρόθεσμης ράντας, η οποία συμβολίζεται με το $S_{\overline{n}|\,i}$, ισούται με το άθροισμα των επιμέρους τελικών αξιών των όρων της ράντας. Δηλαδή είναι:

$$S_{\overline{n}|\,i} = 1(1+i)^{n-1} + 1(1+i)^{n-2} + \ldots + 1(1+i)^2 + 1(1+i)^1 + 1$$

Αν τώρα αντιμεταθέσομε τους όρους του β' μέλους της πιο πάνω σχέσεως, θα έχομε:

$$S_{\overline{n}|\,i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} \qquad (52)$$

Το β' μέλος της σχέσεως (52) είναι άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου, με πρώτο όρο $\alpha = 1$, λόγο $\omega = (1+i)$ και τελευταίο όρο $\tau = (1+i)^{n-1}$. Επομένως,

σύμφωνα με τον τύπο $\Sigma = \dfrac{\tau \cdot \omega - \alpha}{\omega - 1}$, θα είναι:

$$\Sigma = S_{\overline{n}|\,i} = \frac{(1+i)^{n-1}(1+i) - 1}{(1+i) - 1} = \frac{(1+i)^{n-1+1} - 1}{1+i-1}$$

και

$$\mathbf{S_{\overline{n}|\,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}} \qquad \mathbf{(53)}$$

Το $S_{\overline{n}|\,i}$ παρέχει την τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας, n όρων 1 νομισματικής μονάδας, και το βρίσκομε στους πίνακες Ανατοκισμού — Ραντών — Χρεωλυσίων (βλ. Πίνακα V) με ορισμένα i και n. Μπορούμε όμως να βρούμε πρώτα το $(1+i)^n$ από τον πίνακα I και να το αντικαταστήσομε κατόπιν στον τύπο (53). Π.χ. με $i = 0{,}08$ και $n = 10$ στον Πίνακα V βρίσκομε: $S_{\overline{10}|\,0,08} = 14{,}4865625$. Αν τώρα θέλομε να βρούμε το $S_{\overline{n}|\,i}$, όταν $i = 0{,}09,\ 0{,}10,\ 0{,}11, \ldots,\ 0{,}20$, τότε χρησιμοποιούμε τον Πίνακα I, γιατί ο πίνακας V δίνει τιμές του $S_{\overline{n}|\,i}$ για $i = 0{,}0025$ έως $i = 0{,}08$. Αν π.χ. θέλομε να βρούμε την τιμή:

$$S_{\overline{20}|\,0,12} = \frac{(1{,}12)^{20} - 1}{0{,}12} \qquad (\alpha)$$

τότε εργαζόμαστε ως εξής:

Στον Πίνακα I, με $i = 0{,}12$ και $n = 20$, βρίσκομε: $(1{,}12)^{20} = 9{,}6462926$. Αντικαθιστώντας πλέον το $(1{,}12)^{20}$ με το ίσο του στη σχέση (α) βρίσκομε ότι:

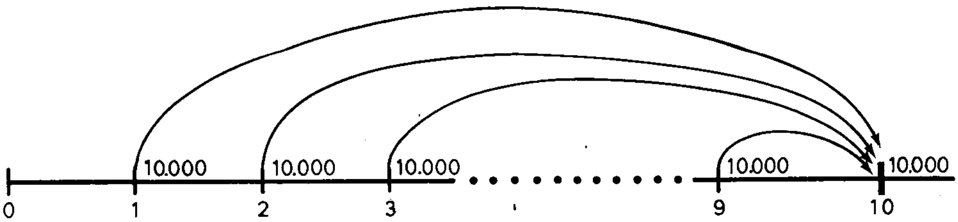
$$S_{\overline{20}|\,0,12} = \frac{9,6462926 - 1}{0,12} = \frac{8,6462926}{0,12} = 72,052438$$

Αν τώρα ο όρος μιας ληξιπρόθεσμης ράντας είναι R νομισματικές μονάδες, τότε το $S_{\overline{n}|\,i}$ (που είναι η τελική αξία ράντας όρου 1 νομισμ. μονάδας) θα πρέπει να πολλαπλασιασθεί επί R. Επομένως, η τελική αξία όλων των όρων μιας ληξιπρόθεσμης ράντας, όρου R νομισματικών μονάδων, θα υπολογίζεται βάσει του τύπου:

$$V_{\tau\varepsilon\lambda.} = R \cdot S_{\overline{n}|\,i} \qquad \textbf{(54)}$$

Παράδειγμα 1ο. Ο εισοδηματίας Ε καταθέτει στο τέλος κάθε έτους 10.000 δρχ. με ανατοκισμό, με ετήσιο επιτόκιο 6% και αυτό γίνεται επί 10 έτη. Τι ποσό θα έχει σχηματισθεί στο λ/σμό του Ε στο τέλος των 10 ετών;

Λύση. Το ποσό που θα έχει συσσωρευθεί στο λ/σμό του Ε στο τέλος των 10 ετών, ισοδυναμεί με την τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας με τα εξής στοιχεία: R = 10.000, i = 0,06, n = 10



Η τελική αξία της εξεταζόμενης ράντας θα υπολογισθεί βάσει του τύπου (54). Δηλαδή:

$$V_{\tau\varepsilon\lambda.} = R \cdot S_{\overline{n}|\,i} = 10.000 \cdot S_{\overline{10}|\,0,06}$$

Στον Πίνακα V, με i = 0,06 και n = 10, βρίσκομε: $S_{\overline{10}|\,0,06} = 13,18079$

Άρα: $V_{\tau\varepsilon\lambda.} = 10.000 \times 13,18079 = 131.807,90$

Επομένως, στο τέλος του 10ου έτους ο λογαριασμός του Ε θα εμφανίζει 131.807,90 δρχ.

Παράδειγμα 2ο. Να βρεθεί η τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας, εξαμηνιαίου όρου 6000 δρχ., διάρκειας 8 ετών, με εξαμηνιαίο επιτόκιο 6%.

Λύση. R = 6000, n = 8 × 2 = 16 εξάμηνα, i = 0,06

Εργαζόμαστε όπως ακριβώς στο προηγούμενο παράδειγμα. Μετατρέψαμε τη διάρκεια της ράντας σε εξάμηνα, γιατί και ο όρος τής ράντας και το επιτόκιο αντιστοιχούν σε εξάμηνο. Επομένως, θα έχομε:

$$V_{\tau\varepsilon\lambda.} = R \cdot S_{\overline{n}|\,i} = 6000 \times S_{\overline{16}|\,0,06} = 6000 \times 25,672528 = 154.035,16 \text{ δρχ.}$$

Παράδειγμα 3ο. Ο Α απουσίασε 4 χρόνια στο εξωτερικό και νοίκιαζε το διαμέρισμά του με μηνιαίο ενοίκιο 5000 δρχ. Ο ενοικιαστής του διαμερίσματος, στο τέλος κάθε μήνα, κατέθετε κανονικά το ενοίκιο σε μια τράπεζα στο λ/σμό του Α με ανατοκισμό με μηνιαίο επιτόκιο 1 $^1/_2$%. Να βρεθεί το ποσό που θα έχει συσσωρευθεί στο λ/σμό του Α στο τέλος του 4ου έτους.

Λύση. Μετατρέπομε τα έτη σε μήνες και εργαζόμαστε όπως στα προηγούμενα παραδείγματα: R = 5000, n = 4 × 12 = 48 μήνες, i = 0,015

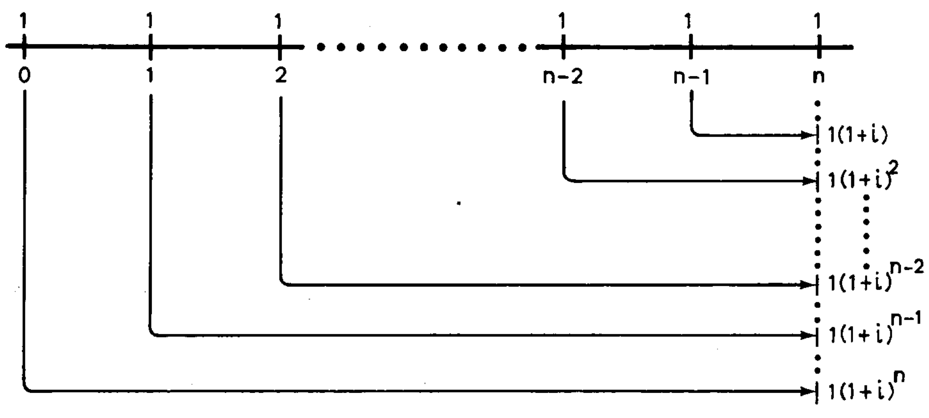
$$V_{\tau\epsilon\lambda.} = R \cdot S_{\overline{n|}\,i} = 5000 \quad S_{\overline{48|}\,0{,}015} = 5000 \times 69{,}56522 = 347.826$$

Ώστε: Ο λ/σμός του Α, στο τέλος του τετάρτου έτους θα εμφανίζει ποσό 347.826 δρχ.

8.5 Εύρεση της τελικής αξίας προκαταβλητέας ράντας.

Έστω ότι έχομε μια **προκαταβλητέα** ράντα, n όρων 1 νομισματικής μονάδας και θέλομε να υπολογίσομε την αξία των όρων της στο τέλος των n ετών.

Για να υπολογίσομε την τελική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας, αρκεί να υπολογίσομε την τελική αξία κάθε όρου της ράντας και κατόπιν να αθροίσομε τις επιμέρους τελικές αξίες σύμφωνα με το παρακάτω διάγραμμα:



Όπως φαίνεται από το παραπάνω διάγραμμα, ο 1ος όρος ανατοκίζεται επί n χρονικές περιόδους και αποκτά τελική αξία $1\,(1 + i)^n$, ο 2ος όρος ανατοκίζεται επί (n − 1) περιόδους και δίνει τελική αξία $1(1 + i)^{n-1}$ κ.ο.κ., ο προτελευταίος όρος ανατοκίζεται για δύο περιόδους και δίνει τελική αξία $1(1 + i)^2$ και ο τελευταίος όρος δίνει τελική αξία $1(1 + i)$.

Επομένως, η τελική αξία όλων των όρων μιας προκαταβλητέας ράντας (που συμβολίζεται με το $\varsigma_{\overline{n|}\,i}$) ισούται με το άθροισμα των επιμέρους τελικών αξιών των ορών της ράντας. Δηλαδή:

$$\varsigma_{\overline{n|}\,i} = 1(1 + i)^n + 1(1 + i)^{n-1} + 1(1 + i)^{n-2} + \ldots + 1(1 + i)^2 + 1(1 + i)^1$$

Αν τώρα αντιμεταθέσομε τους όρους του β΄ μέλους, θα έχομε:

$$\varsigma_{\overline{n|}i} = (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n \qquad (55)$$

Το β΄ μέλος της σχέσεως (55) είναι άθροισμα όρων γεωμετρικής πρόδου με $\alpha = (1+i)$, $\omega = (1+i)$ και $\tau = (1+i)^n$. Επομένως αντικαθιστώντας στον τύπο

$\Sigma = \dfrac{\tau \cdot \omega - \alpha}{\omega - 1}$, έχομε:

$$\Sigma = \varsigma_{\overline{n|}i} = \frac{(1+i)^n(1+i) - (1+i)}{(1+i) - 1} = \frac{(1+i)\,[(1+i)^n - 1]}{i} =$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i).$$ Αλλά το $\dfrac{(1+i)^n - 1}{i} = s_{\overline{n|}i} =$ τελική

αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας.

Επομένως, η τελική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας, n όρων 1 νομισματικής μονάδας, υπολογίζεται βάσει του τύπου:

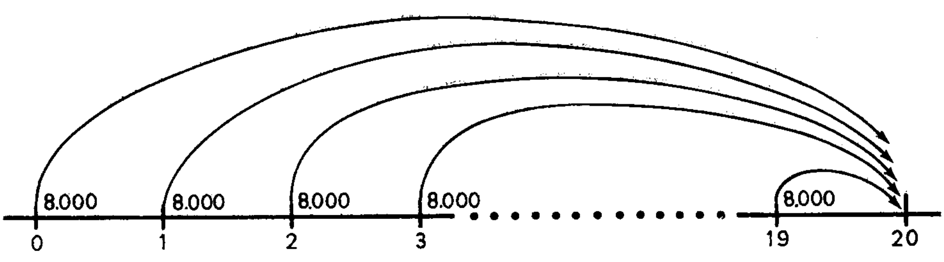
$$\varsigma_{\overline{n|}i} = s_{\overline{n|}i}\,(1+i) \qquad \textbf{(56)}$$

Από τον τύπο (56) προκύπτει ότι: Αν την τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας πολλαπλασιάσομε επί το συντελεστή (1 + i), τότε βρίσκομε την τελική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας. Αν τώρα ο όρος της ράντας είναι R νομισματικές μονάδες, τότε η τελική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας υπολογίζεται βάσει του τύπου:

$$V_{\tau\varepsilon\lambda.} = \varsigma_{\overline{n|}i}\,R = R \cdot s_{\overline{n|}i}\,(1+i) \qquad \textbf{(57)}$$

Παράδειγμα 1ο. Ο υπάλληλος Υ, μόλις γεννήθηκε η κόρη του, άρχισε να καταθέτει στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο, στην αρχή κάθε έτους, 8000 δρχ. με ανατοκισμό προς ετήσιο επιτόκιο 5%. Να βρεθεί το ποσό που θα έχει συσσωρευθεί στο λ/σμό του Υ, όταν η κόρη του θα έχει συμπληρώσει το 20ο έτος της ηλικίας της.

Λύση. Πρόκειται για προκαταβλητέα ράντα με στοιχεία: $R = 8000$, $i = 0{,}05$, $n = 20$. Ζητείται η τελική αξία της ράντας.



Για να υπολογίσομε την τελική αξία της δοσμένης ράντας θα εφαρμόσομε τον τύπο (57).

$$V_{\tau\epsilon\lambda.} = R \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|i} = R \cdot s_{\overline{n}|i}\,(1+i) = 8000\, s_{\overline{20}|0,05}\,(1{,}05) =$$

$$= 8000 \times 33{,}06595 \times 1{,}05 = 277.754$$

Ώστε: όταν η κόρη του Υ θα έχει συμπληρώσει το 20ο έτος της ηλικίας της, στο λ/σμό του Υ θα έχουν συσσωρευθεί 277.754 δραχμές.

Παράδειγμα 2ο. Ο έμπορος Ε καταθέτει σε μια τράπεζα στην αρχή κάθε εξαμήνου 10.000 δρχ. με εξαμηνιαίο επιτόκιο 4%. Να βρεθεί το ποσό που θα έχει συσσωρευθεί στο λ/σμό του Ε μετά 8 έτη και 6 μήνες από τότε που έγινε η πρώτη κατάθεση.

Λύση. $R = 10.000$, $n = 8 \times 2 + 1 = 17$ εξάμηνα, $i = 0{,}04$.
Το ποσό που θα έχει σχηματισθεί στο τέλος του 17ου εξαμήνου αποτελεί την τελική αξία προκαταβλητέας ράντας.

$$V_{\tau\epsilon\lambda.} = R \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|i} = R \cdot s_{\overline{n}|i}\,(1+i) = 10.000 \times s_{\overline{17}|0,04}\,(1{,}04) =$$

$$= 10.000 \times 23{,}69571 \times 1{,}04 = 246.435{,}40 \text{ δρχ.}$$

8.6 Εύρεση του όρου μίας ράντας.

Γνωρίζομε ότι: κάθε ράντα αποτελείται από τα εξής τέσσερα στοιχεία: 1) από τον **όρο** (= **R**), 2) από το **επιτόκιο** υπολογισμού (= **i**), 3) από το **πλήθος των όρων** (= **n**) και 4) από την **αρχική** ή **τελική αξία** των όρων της. Επομένως, αν είναι γνωστά τα τρία από τα τέσσερα στοιχεία μιας ράντας, μπορούμε να υπολογίσομε και το τέταρτο στοιχείο της ράντας.

Έστω ότι γνωρίζομε: τη διάρκεια μιας ράντας, το επιτόκιο υπολογισμού και την αρχική ή τελική της αξία και θέλομε να βρούμε τον όρο της ράντας.

Για να βρούμε τον όρο (= δόση) μιας ράντας, αρκεί να λύσομε ως προς R τους βασικούς τύπους: $V_{\alpha\rho\chi.} = R \cdot a_{\overline{n}|i}$ και $V_{\tau\epsilon\lambda.} = R \cdot s_{\overline{n}|i}$. Συνεπώς, ο όρος μιας ράντας υπολογίζεται βάσει των τύπων:

$$R = \frac{V_{\alpha\rho\chi.}}{a_{\overline{n}|i}} \quad \textbf{(58)} \qquad \text{καί} \qquad R = \frac{V_{\tau\epsilon\lambda.}}{s_{\overline{n}|i}} \quad \textbf{(59)}$$

ανάλογα αν γνωρίζομε την αρχική ή τελική αξία μιας ράντας.

Παράδειγμα 1ο. Δανείσθηκε κάποιος 100.000 δρχ. με ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο 6%. Το δάνειο θα εξοφληθεί σε 10 χρόνια με ίσες ετήσιες δόσεις. Κάθε δόση θα πληρώνεται στο τέλος του έτους και η πρώτη δόση θα πληρωθεί μετά ένα έτος από σήμερα. Να υπολογισθεί η ετήσια δόση.

Λύση. Πρόκειται για ληξιπρόθεσμη ράντα με γνωστά στοιχεία:
$V_{\alpha\rho\chi.} = 100.000$, $i = 0{,}06$, $n = 10$ και άγνωστο το R. Η ετήσια δόση θα υπολογισθεί βάσει του τύπου (58). Αντικαθιστώντας τα δεδομένα βρίσκομε:

$$R = \frac{100.000}{a_{\overline{10}|0,06}} = \frac{100.000}{7,360087} = 13.586,80$$

Ώστε: ο οφειλέτης πρέπει να πληρώνει, στο τέλος κάθε έτους και επί 10 έτη, 13.586,80 δρχ. για να εξοφλήσει το δάνειο.

Παράδειγμα 2ο. Οφείλει κάποιος 100.000 δρχ. μετά 10 έτη. Τι ποσό πρέπει να πληρώνει στο τέλος κάθε έτους, για να εξοφλήσει το χρέος του, αν το ετήσιο επιτόκιο του ανατοκισμού είναι 4%;

Λύση. Πρόκειται για ληξιπρόθεσμη ράντα με γνωστά στοιχεία: $V_{τελ.} = 100.000$, $n = 10$, $i = 0,04$ και άγνωστο τον όρο, τον οποίο θα υπολογίσομε με τον τύπο (59). Αντικαθιστώντας τα δεδομένα βρίσκομε:

$$R = \frac{100.000}{S_{\overline{10}|0,04}} = \frac{100.000}{12,006107} = 8329$$

Άρα, πρέπει να πληρώνει 8329 δρχ. στο τέλος κάθε έτους και επί 10 έτη, για να εξοφλήσει το χρέος.

Παράδειγμα 3ο. Τι ποσό πρέπει να καταθέτει κάποιος στην αρχή κάθε έτους, με ανατοκισμό προς 6%, ώστε μετά 5 έτη να έχει σχηματισθεί κεφάλαιο 100.000;

Λύση. Πρόκειται για προκαταβλητέα ράντα με γνωστά στοιχεία: $V_{τελ.} = 100.000$, $n = 5$, $i = 0,06$ και άγνωστο το R.

Γνωρίζομε, ότι η τελική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας υπολογίζεται βάσει της σχέσεως:

$$V_{τελ.} = R \cdot Ş_{\overline{n}|i} = R \cdot S_{\overline{n}|i}\,(1 + i) \qquad (α)$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στην (α) έχομε:

$$100.000 = R \cdot S_{\overline{5}|0,06}\,(1,06)$$

Λύνοντας ως προς R βρίσκομε το ζητούμενο ποσό. Δηλαδή:

$$R = \frac{100.000}{S_{\overline{5}|0,06}\,(1,06)} = \frac{100.000}{5,637093 \times 1,06} = 16.735,50 \text{ δρχ.}$$

8.7 Εύρεση του επιτοκίου υπολογισμού μιας ράντας.

Περίπτωση Ι. Στην περίπτωση αυτή, γνωρίζομε την αρχική αξία ($= V_{αρχ.}$) μιας ράντας, τον όρον της ($= R$), τη διάρκειά της ($= n$) και ζητούμε το επιτόκιο ($= i$) υπολογισμού της ράντας.

Αν το βασικό τύπο $V_{αρχ.} = R \cdot a_{\overline{n}|i}$ λύσομε ως προς $a_{\overline{n}|i}$ τότε προκύπτει ο ακόλουθος τύπος:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{V_{\alpha\rho\chi.}}{R} \tag{60}$$

Με τον τύπο (60) υπολογίζεται το επιτόκιο υπολογισμού μιας ληξιπρόθεσμης ράντας, με τη βοήθεια των Πινάκων των Ραντών ως εξής: Στον Πίνακα IV και στη γραμμή του δοσμένου n αναζητούμε την τιμή του $a_{\overline{n}|i}$. Αν η τιμή που προκύπτει από τον τύπο (60) βρεθεί ακριβώς στον Πίνακα IV, τότε στη στήλη που ανήκει αυτή η τιμή υπάρχει και το ζητούμενο επιτόκιο. Αν όμως η τιμή $a_{\overline{n}|i}$ δεν βρεθεί ακριβώς στον Πίνακα IV, τότε αυτή θα περιέχεται μεταξύ των διαδοχικών αριθμών $a_{\overline{n}|i_1}$ και $a_{\overline{n}|i_2}$ δηλαδή ισχύει η ανισότητα:

$$a_{\overline{n}|i_1} > a_{\overline{n}|i} > a_{\overline{n}|i_2}$$

όπου i_1 και i_2 είναι δύο διαδοχικά επιτόκια για τα οποία ισχύει η ανισότητα: $i_1 < i < i_2$, γιατί η αρχική αξία μιας ράντας ελαττώνεται όταν αυξάνει το i.

Ο υπολογισμός του επιτοκίου γίνεται με τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής, βάσει του τύπου:

$$\frac{a_{\overline{n}|i} - a_{\overline{n}|i_1}}{a_{\overline{n}|i_1} - a_{\overline{n}|i_2}} = \frac{i - i_1}{i_1 - i_2} \tag{61}$$

Παράδειγμα 1ο. Με ποιο ετήσιο επιτόκιο πρέπει να καταθέτομε, στο τέλος κάθε έτους, 10.000 δρχ. με ανατοκισμό έτσι, ώστε μετά 10 έτη να έχει εξοφληθεί χρέος 67.100,814 δρχ. τις οποίες οφείλομε σήμερα;

Λύση. Γνωστά: $R = 10.000$, $n = 10$, $V_{\alpha\rho\chi.} = 67.100{,}814$, άγνωστο το i.

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στον τύπο (60) βρίσκομε:

$$a_{\overline{10}|i} = \frac{67.100{,}814}{10.000} = 6{,}7100814$$

Τον αριθμό 6,7100814 τον αναζητούμε στον Πίνακα IV στη γραμμή n = 10 και τον βρίσκομε στη στήλη του επιτοκίου 0,08. Άρα, το ζητούμενο επιτόκιο είναι 8%.

Παράδειγμα 2ο. Με ποιο ετήσιο επιτόκιο, ληξιπρόθεσμη ράντα, ετήσιου όρου 10.000 δρχ. που διαρκεί 10 έτη, έχει αρχική αξία 75.000 δρχ.;

Λύση. Γνωστά: $R = 10.000$, $n = 10$, $V_{\alpha\rho\chi.} = 75.000$. Άγνωστο το i.

Αντικαθιστούμε στον τύπο (60) και βρίσκομε: $a_{\overline{10}|i} = 7{,}5$. Στον πίνακα IV και στη γραμμή n = 10 βρίσκομε ότι ο αριθμός 7,5 περιέχεται μεταξύ των αριθμών 7,537626 και 7,360087, οι οποίοι αντιστοιχούν στα επιτόκια 0,055 και 0,06· άρα το ζητούμενο επιτόκιο θα βρίσκεται μεταξύ του 5,5% και του 6% και θα υπολογισθεί με γραμμική παρεμβολή.

Δίνονται: $a_{\overline{10}|0,055} = 7{,}537626$, $a_{\overline{10}|i} = 7{,}5$, $a_{\overline{10}|0,06} = 7{,}360087$, $i_1 = 0{,}055$ και $i_2 = 0{,}06$.

Αντικαθιστώντας στον τύπο (61) έχομε:

$$\frac{7{,}500000 - 7{,}537626}{7{,}537626 - 7{,}360087} = \frac{i - 0{,}055}{0{,}055 - 0{,}06}$$

και $$i = \frac{0{,}0099527}{0{,}177539} = 0{,}056059 \quad \text{ή} \quad i = 5{,}61\%$$

Περίπτωση II. Γνωστά: $V_{τελ.}$, R, n και άγνωστο το i.

Αν το βασικό τύπο: $V_{τελ.} = R\ S_{\overline{n}|i}$ λύσομε ως προς $S_{\overline{n}|i}$ τότε προκύπτει ο τύπος:

$$\mathbf{S_{\overline{n}|i} = \frac{V_{τελ.}}{R}} \qquad \textbf{(62)}$$

βάσει του οποίου υπολογίζεται το επιτόκιο.

Παράδειγμα. Με ποιό επιτόκιο ράντα ληξιπρόθεσμη, ετήσιου όρου 10.000 δρχ. διάρκειας 10 ετών, έδωσε τελική αξία 131.807,95 δρχ.

Λύση. $R = 10.000$, $n = 10$, $V_{τελ.} = 131.807{,}95$, $i =;$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (62) και βρίσκομε:

$$S_{\overline{10}|i} = \frac{131.807{,}95}{10.000} = 13{,}180795$$

Στον Πίνακα V και στη γραμμή n = 10 αναζητούμε τον αριθμό 13,180795 και τον βρίσκομε στη στήλη του επιτοκίου 0,06. Άρα το ζητούμενο επιτόκιο είναι 6%.

8.8 Εύρεση του πλήθους των όρων μιας ράντας.

Είπαμε ότι: Ράντα λέγεται μια σειρά κεφαλαίων τα οποία καταβάλλονται σε ίσα χρονικά διαστήματα. Από τον ορισμό της ράντας προκύπτει, ότι το πλήθος των όρων μιας ράντας είναι ακέραιος αριθμός. Συνεπώς, αν τους τύπους:

$$V_{αρχ.} = R \cdot a_{\overline{n}|i} \text{ και } V_{τελ.} = R \cdot S_{\overline{n}|i}$$

λύσομε ως προς n και βρούμε ακέραιο αριθμό, τότε το n θα αντιπροσωπεύει το πλήθος των όρων της ράντας. Είναι όμως ενδεχόμενο να μη βρεθεί τιμή του n ακέραιος αριθμός, αλλά να βρούμε **n = α + κ**, όπου α = ακέραιος αριθμός περιόδων και κ = κλάσμα της ακεραίας περιόδου. Στην περίπτωση αυτή, γίνεται η λεγόμενη **τακτοποίηση του κλασματικού όρου** της ράντας έτσι, ώστε το n να αντιπροσωπεύει ακέραιο αριθμό περιόδων (όρων).

I. Τακτοποίηση κλασματικού όρου σε πρόβλημα αρχικής αξίας ράντας.

Ο υπολογισμός του πλήθους των όρων μιας ράντας γίνεται με δύο τρόπους:

α) Με τους πίνακες των Ραντών: Το βασικό τύπο:

$V_{αρχ.} = R \cdot α_{\overline{n}|i} = R \cdot \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, λύνομε ως προς $α_{\overline{n}|i}$ και βρίσκομε:

$$α_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{V}{R} \qquad \textbf{(63)}$$

όπου $V = V_{αρχ.}$.

Το πηλίκο V : R αναζητούμε στον Πίνακα IV και στη στήλη του δοσμένου επιτοκίου. Αν βρεθεί ακριβώς, τότε στην πρώτη στήλη του Πίνακα IV βρίσκομε το n.

β) Με τους λογαρίθμους: Η σχέση (63) γράφεται:

$$1-(1+i)^{-n} = \frac{V}{R} \cdot i \quad ή \quad (1+i)^{-n} = 1 - \frac{V \cdot i}{R} = \frac{R - V \cdot i}{R} \quad ή$$

$$\frac{1}{(1+i)^{n}} = \frac{R - V \cdot i}{R} \quad καί \quad (1+i)^{n} = \frac{R}{R - V \cdot i}. \qquad (α)$$

Λογαριθμούμε και τα δύο μέλη της (α) και έχομε:

$$n \cdot λογ(1+i) = λογR - λογ(R - V \cdot i)$$

και

$$n = \frac{λογR - λογ(R - V \cdot i)}{λογ(1+i)} \qquad \textbf{(64)}$$

Αν το n είναι ακέραιος αριθμός, τότε το πρόβλημα είναι λυμένο. Αν όμως είναι $n = α + κ$ ($α$ = ακέραιος και $κ$ = κλασματικός αριθμός), τότε εργαζόμαστε ως εξής: Υποθέτομε ότι το ποσό $V_{αρχ.}$ είναι ένα χρέος που πρέπει να εξοφληθεί με ίσες δόσεις (= R). Εφόσον το $n = α + κ$, έπεται ότι η εξόφληση του χρέους με ληξιπρόθεσμη ράντα α όρων είναι αδύνατη. Αν καταβάλομε (α + 1) δόσεις, τότε πληρώνομε μεγαλύτερο ποσό από το οφειλόμενο ποσό (= $V_{αρχ.}$). Για να αποφύγομε αυτή τη δυσκολία, προβαίνομε στην **τακτοποίηση του κλασματικού όρου** της ράντας με ένα από τους επόμενους τρόπους:

1) Να καταβάλομε **α** δόσεις R δρχ. και μια συμπληρωματική δόση που προκύπτει με πολλαπλασιασμό της κλασματικής περιόδου επί τον όρο της ράντας (= $κ \cdot R$).

2) Να τροποποιήσομε τον όρο της ράντας, ώστε το χρέος να εξοφληθεί σε **α** ή **α + 1** δόσεις. Στην περίπτωση αυτή εξισώνομε τις αρχικές αξίες και λύνομε ως προς R. Δηλαδή:

$$V_{αρχ.} = R \cdot α_{\overline{α}|} \qquad καί \qquad R = \frac{V_{αρχ.}}{α_{\overline{α}|}}$$

ή

$$V_{αρχ.} = R \cdot α_{\overline{α+1}|} \qquad καί \qquad R = \frac{V_{αρχ.}}{α_{\overline{α+1}|}}$$

3) Να καταβάλομε **α** δόσεις R δρχ. και μια συμπληρωματική δόση που προκύπτει αν ανατοκίσομε επί (α + 1) έτη τη διαφορά: αρχικό χρέος μείον παρούσα αξία ράντας **α** όρων. Επομένως, η (α + 1) δόση θα είναι: $[V_{αρχ.} - R\, a_{\overline{α}|}] \cdot (1 + i)^{α+1}$

Παράδειγμα 1ο. Να βρεθεί το πλήθος των όρων ληξιπρόθεσμης ράντας, η οποία έχει αρχική αξία 100.000 δρχ., ετήσιο όρο 5000 δρχ. και υπολογίσθηκε με επιτόκιο 3%.

Λύση. $V_{αρχ.} = 100.000$, $R = 5000$, $i = 0{,}03$, $n = ;$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (63) και βρίσκομε: $a_{\overline{n}|0,03} = 100.000 : 5000 = 20$. Τον αριθμό 20 αναζητούμε στον Πίνακα IV. Στη στήλη του επιτοκίου 0,03 και στη γραμμή n = 31 βρίσκομε τον αριθμό 20,00042849 ≈ 20. Άρα η ράντα αποτελείται από 31 όρους.

Παράδειγμα 2ο. Ο έμπορος Ε οφείλει σήμερα 100.000 δραχμές και για να τις εξοφλήσει πληρώνει στο τέλος κάθε έτους 10.000 δρχ. Επί πόσα έτη θα πληρώνει το ποσό των 10.000 δρχ.; Επιτόκιο 6%. Αν βρεθεί κλασματικός όρος να γίνει η τακτοποίησή του.

Λύση. $V_{αρχ.} = 100.000$, $R = 10.000$, $i = 0{,}06$, $n = ;$

Ο υπολογισμός του n γίνεται με δύο τρόπους:

α) Με τους Πίνακες: Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (63) και βρίσκομε: $a_{\overline{n}|0,06} = 10$. Στον Πίνακα IV και στη στήλη του επιτοκίου 0,06 παρατηρούμε ότι ο αριθμός 10 ($= a_{\overline{n}|0,06}$) περιέχεται στους αριθμούς 9,71225 ($= a_{\overline{15}|0,06}$) και 10,10589 ($= a_{\overline{16}|0,06}$). Για να βρούμε τώρα το n θα εργασθούμε ως εξής:

Σε $a_{\overline{15}|0,06}$	αντιστοιχεί αριθμός	9,71225
Σε $a_{\overline{n}|0,06}$	αντιστοιχεί αριθμός	10,00000
Σε $a_{\overline{16}|0,06}$	αντιστοιχεί αριθμός	10,10589

Σε αύξηση 1 έτους ή 12 μηνών έχομε αύξηση παρ. αξίας 0,39364
Σε αύξηση x; μηνών έχομε αύξηση παρ. αξίας 0,28775

και $$x = 12 \times \frac{0{,}28775}{0{,}39364} = 12 \times 0{,}73 = 8{,}76 \text{ μηνες}$$

Άρα: $$n = 15 + \frac{8{,}76}{12}, \text{ δηλαδή 15 έτη 8 μήνες και 23 ημ.}$$

β) Με τους λογαρίθμους: Το n υπολογίζεται πιο εύκολα με τους λογαρίθμους. Πράγματι, αν αντικαταστήσομε τα δεδομένα στον τύπο (64), θα βρούμε:

$$n = \frac{λογ10.000 - λογ(10.000 - 100.000 \times 0{,}06)}{λογ(1{,}06)} =$$

$$= \frac{\lambda o\gamma 10.000 - \lambda o\gamma 4000}{\lambda o\gamma(1,06)} = \frac{0,39794}{0,02531} = 15,723$$

Άρα: n = 15,723 έτη, ή 15 έτη 8 μήνες και 20 ημέρες.

Επομένως, ο Ε μπορεί να εξοφλήσει το χρέος με τους εξής τρόπους:

1) Να πληρώσει 15 δόσεις των 10.000 δρχ. και μία συμπληρωματική δόση 7.230 δρχ. (= 10.000 × 0,723).

2) Να τροποποιήσομε τον όρο της ράντας, ώστε το χρέος να εξοφληθεί σε 15 ή 16 έτη. Δηλαδή:

$$100.000 = R \cdot a_{\overline{15|}\,0,06} \quad \text{και} \quad R = \frac{100.000}{a_{\overline{15|}\,0,06}} = \frac{100.000}{9,71225} = 10.296$$

ή

$$100.000 = R \cdot a_{\overline{16|}\,0,06} \quad \text{και} \quad R = \frac{100.000}{a_{\overline{16|}\,0,06}} = \frac{100.000}{10,10589} = 9895$$

Δηλαδή ο Ε θα πληρώνει επί 15 έτη 10.296 δρχ. ή 9895 δρχ. επί 16 έτη.

3) Να πληρώσει 15 δόσεις των 10.000 δρχ. και μια συμπληρωματική δόση που υπολογίζεται ως εξης:

$$(100.000 - 10.000\ a_{\overline{15|}\,0,06})\,(1,06)^{16} =$$

$$= (100.000 - 10.000 \times 9,71225) \times 2,54035 \approx 7310 \text{ δρχ.}$$

II. Τακτοποίηση κλασματικού όρου σε πρόβλημα τελικής αξίας ράντας.

Γνωστά στοιχεία: $V_{\tau\epsilon\lambda.}$, R, i. Άγνωστο το n. Ο υπολογισμός του n γίνεται με δύο τρόπους:

α) Με τους Πίνακες: Το γνωστό τύπο:

$$V_{\tau\epsilon\lambda.} = R \cdot S_{\overline{n|}\,i} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

λύνομε ως προς $S_{\overline{n|}\,i}$ και βρίσκομε:

$$\mathbf{S_{\overline{n|}\,i} = \frac{V}{R} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}} \qquad \textbf{(65)}$$

όπου $V = V_{\tau\epsilon\lambda.}$.

Το πηλίκο V : R αναζητούμε στον Πίνακα V στη στήλη του i. Αν βρεθεί ακριβώς, τότε βρίσκομε και το n.

β) Με τους λογαρίθμους: Η σχέση (65) γράφεται:

$$(1+i)^n = \frac{V \cdot i}{R} + 1 = \frac{V \cdot i + R}{R}$$

Λογαριθμούμε και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσεως ˙

$$n \cdot \text{λογ}(1+i) = \text{λογ}(V \cdot i + R) - \text{λογ}R$$

και
$$n = \frac{\text{λογ}(V \cdot i + R) - \text{λογ}R}{\text{λογ}(1+i)} \qquad \textbf{(66)}$$

όπου $V = V_{\text{τελ.}}$:

Αν το n είναι ακέραιος αριθμός, τότε το πρόβλημα είναι λυμένο. Αν όμως το n αποτελείται από ακέραιες περιόδους και κλάσμα της ακεραίας περιόδου, τότε κάνομε την τακτοποίηση του κλασματικού όρου κατά τα γνωστά.

Παράδειγμα. Επί πόσα έτη πρέπει να καταθέτομε με ανατοκισμό 10.000 δρχ., στο τέλος κάθε έτους, για να σχηματισθεί κεφάλαιο 100.000 δρχ., αν το επιτόκιο είναι 4%; Αν βρεθεί κλασματικός αριθμός ετών να γίνει η τακτοποίησή του.

Λύση. $n =;$ $R = 10.000$, $V_{\text{τελ.}} = 100.000$, $i = 0{,}04$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (66) και βρίσκομε:

$$n = \frac{\text{λογ}'(100.000 \times 0{,}04 + 10.000) - \text{λογ}10.000}{\text{λογ}(1{,}04)} =$$

$$= \frac{\text{λογ}14.000 - \text{λογ}10.000}{\text{λογ}(1{,}04)} = \frac{\text{λογ}(14.000 : 10.000)}{\text{λογ}(1{,}04)} =$$

$$= \frac{\text{λογ}(1{,}40)}{\text{λογ}(1{,}04)} = \frac{0{,}14613}{0{,}01703} = 8{,}58 \text{ έτη ή } 8 \text{ έτη και } 6{,}96 \text{ μήνες.}$$

Τακτοποίηση κλασματικού όρου.

1) Για να σχηματισθεί το κεφάλαιο των 100.000 δρχ. πρέπει να καταθέτομε επί 8 έτη 10.000 δρχ. και κατά τη λήξη των 8 ετών μια συμπληρωματική κατάθεση 5800 δρχ., η οποία προκύπτει ως εξής:

Σε 1 έτος πρέπει να καταθέτομε 10.000 δρχ.
Σε 0,58 έτος πρέπει να καταθέτομε x; δρχ.

Άρα: $x = 10.000 \times 0{,}58 = 5800$ δρχ.

2) Αν επί 8 έτη καταθέτομε 10.000 δρχ., τότε στο τέλος των 8 ετών θα έχει σχηματισθεί ποσό $10.000\ S_{\overline{8}|0{,}04} = 10.000 \times 9{,}2142 = 92.142$ δραχμών. Το ποσό αυτό αν ανατοκισθεί επί 6,96 μήνες θα γίνει $92.142\,(1{,}04)^{\frac{6{,}96}{12}} = 92.142 \times$ $\times\ 1{,}023 = 94.261$ δρχ. Επομένως για να σχηματισθεί το κεφάλαιο των 100.000 δρχ. κατά τη χρονική στιγμή $n = 8{,}58$ θα πρέπει να καταθέσομε το συμπληρωματικό ποσό των 5739 δρχ. (= 100.000 − 94.261).

3) Τροποποιούμε τον όρο της ράντας και λέμε: Τι πρέπει να καταθέτομε κάθε έτος, ώστε το ποσό των 100.000 δρχ. να σχηματισθεί στο τέλος του 8ου ή 9ου έτους; Εξισώνομε τις τελικές αξίες:

$$100.000 = R \cdot S_{\overline{8|}\,0,04} \text{ και } R = \frac{100.000}{S_{\overline{8|}\,0,04}} = \frac{100.000}{9,21423} = 10.853$$

ή

$$100.000 = R \cdot S_{\overline{9|}\,0,04} \text{ και } R = \frac{100.000}{S_{\overline{9|}\,0,04}} = \frac{100.000}{10,58279} = 9449$$

8.9 Προβλήματα ραντών.

1. Να βρεθεί η αρχική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας ετήσιου όρου 8000 δρχ. διάρκειας 17 ετών προς ετήσιο επιτόκιο 4%.
   (Απ. 97.325,36)

2. Να βρεθεί η αρχική αξία προκαταβλητέας ράντας, ετήσιου όρου 20.000 δρχ., διάρκειας 8 ετών προς ετήσιο επιτόκιο 5,5%.
   (Απ. 133.659)

3. Να υπολογισθεί η αρχική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας, ετήσιου όρου 10.000 δρχ., διάρκειας 10 ετών προς 7%.
   (Απ. 70.236)

4. Να βρεθεί η αρχική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας, εξαμηνιαίου όρου 10.000 δρχ., διάρκειας 6 ετων προς εξαμηνιαίο επιτόκιο 6%.
   (Απ. 83.838)

5. Να υπολογισθεί η αρχική αξία προκαταβλητέας ράντας, τριμηνιαίου όρου 10.000 δρχ., διάρκειας 10 ετων προς τριμηνιαίο επιτόκιο 3%.
   (Απ. 238.082)

6. Να υπολογισθεί η αρχική αξία προκαταβλητέας ράντας, μηνιαίου όρου 8000 δρχ., διάρκειας 5 ετών προς μηνιαίο επιτόκιο $1^1/_4$%.
   (Απ. 340.480)

7. Να βρεθεί η τελική αξία ράντας, ετήσιου όρου 6000 δρχ., διάρκειας 18 ετών προς ετήσιο επιτόκιο 5%, αν η ράντα είναι: α) ληξιπρόθεσμη και β) προκαταβλητέα.
   (Απ. 168.794 - 177.234)

8. Να υπολογισθεί η τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας, εξαμηνιαίου όρου 5000 δρχ. διάρκειας 10 ετών προς εξαμηνιαίο επιτόκιο 3%.
   (Απ. 134.352)

9. Να βρεθεί η αρχική και τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας, ετήσιου όρου 5000 δρχ., διάρκειας 10 ετών προς ετήσιο επιτόκιο 6%.
   (Απ. 36.800 - 65.904)

10. Καταθέτει κάποιος στην αρχή κάθε εξαμήνου 10.000 δρχ. με εξαμηνιαίο επιτόκιο 5%. Τι ποσό θα έχει συσσωρευθεί στο ταμιευτήριο μετά 7 έτη και 6 μήνες από της πρώτης καταθέσεως;
    (Απ. 226.574,88)

11. Κάποιος πατέρας, μόλις η κόρη του συμπλήρωσε το 10ο έτος της ηλικίας της, κατέθετε με ανατοκισμό στην Εθνική Τράπεζα, στο τέλος κάθε έτους, 10.000 δρχ. με ετήσιο επιτόκιο 5,5%. Τι ποσό θα εισπράξει η κόρη του όταν θα έχει συμπληρώσει το 30ο έτος της ηλικίας της;
    (Απ. 348.683)

12. Ο εισοδηματίας Ε καταθέτει στο Ταχ. Ταμιευτήριο, στο τέλος κάθε έτους 12.500 δρχ. προς ετήσιο επιτόκιο 5%. Τι ποσό θα εμφανίζει ο λ/σμός του Ε στο τέλος του 11ου έτους;
(Απ. 177.585)

13. Καταθέτει κάποιος, στο τέλος κάθε έτους, 20.000 δρχ. με ετήσιο επιτόκιο $4^1/_2$% και αυτό συνεχίζεται επί 12 έτη. Το κεφάλαιο που έχει σχηματισθεί στο τέλος του 12ου έτους τοποθετεί στο ίδιο ταμιευτήριο με ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο $5^1/_2$%. Τι ποσό θα εισπράξει ο καταθέτης στο τέλος του 24ου έτους από της αρχικής καταθέσεως;
(Απ. 588.007)

14. Καταθέτει κάποιος, επί 25 έτη και στην αρχή κάθε έτους, 3000 δρχ. με ετήσιο επιτόκιο 3%. Ένα έτος μετά την τελευταία κατάθεση αρχίζει να αποσύρει κάθε χρόνο 6000 δρχ. και επί 10 χρόνια. Να βρεθεί το ποσό που θα εισπράξει στο τέλος του 35ου έτους από της πρώτης καταθέσεως.
(Απ. 80.557)

15. Ο υπάλληλος Υ καταθέτει στην Τράπεζα Τ, στην αρχή κάθε τριμήνου, 5000 δρχ. με τριμηνιαίο επιτόκιο $2^3/_4$%. Τι ποσό θα εμφανίζει ο λ/σμός του Υ μετά 4 έτη από της πρώτης καταθέσεως;
(Απ. 101.537)

16. Να υπολογισθεί η τελική αξία προκαταβλητέας ράντας, εξαμηνιαίου όρου 10.000 δρχ., διάρκειας 10 ετών προς εξαμηνιαίο επιτόκιο 4%.
(Απ. 309.692)

17. Κάποιος πατέρας άρχισε να καταθέτει σε μια τράπεζα, στο τέλος κάθε εξαμήνου, 10.000 δρχ. με εξαμηνιαίο επιτόκιο 3%. Η πρώτη κατάθεση έγινε όταν ο γιος του ήταν 6 μηνών και η τελευταία όταν ο γιος του ήταν 21 ετών. Τα χρήματα έμειναν στην τράπεζα ώσπου ο γιος συμπλήρωσε το 25ο έτος της ηλικίας του. Ποιο χρηματικό ποσό είχε μαζευθεί στην τράπεζα;
(Απ. 1.039.045)

18. Να βρεθεί η τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας, εξαμηνιαίου όρου 10.000 δρχ., διάρκειας 10 ετών προς εξαμηνιαίο επιτόκιο $3^1/_2$%.
(Απ. 282.797)

19. Να βρεθεί η τελική αξία προκαταβλητέας ράντας, εξαμηνιαίου όρου 10.000 δρχ., διάρκειας 15 ετών προς εξαμηνιαίο επιτόκιο $4^1/_2$%.
(Απ. 637.524)

20. Η βιομηχανία Β, μετά 10 έτη από σήμερα, θέλει να αντικαταστήσει το μηχανικό εξοπλισμό της και πρέπει να έχει συγκεντρώσει 12.000.000 δρχ. Τι ποσό πρέπει να καταθέτει (με ανατοκισμό) στο τέλος κάθε έτους έτσι, ώστε στο τέλος του 10ου έτους να έχει συγκεντρωθεί στο ταμιευτήριο το απαιτούμενο ποσό, αν το ετήσιο επιτόκιο είναι 8%;
(Απ. 828.354)

21. Ο Α δανείσθηκε 400.000 δρχ. με ετήσιο επιτόκιο 10%. Το δάνειο πρέπει να εξοφληθεί με 10 ετήσιες δόσεις. Κάθε δόση πληρώνεται στο τέλος κάθε έτους. Η πρώτη δόση θα πληρωθεί στο τέλος του πρώτου έτους. Να υπολογισθεί η ετήσια δόση.
(Απ. 65.098)

22. Πόσα χρήματα πρέπει να καταθέτει κάποιος στο Ταχ. Ταμιευτήριο, στο τέλος κάθε εξαμήνου με εξαμηνιαίο επιτόκιο 5% έτσι, ώστε μετά 10 έτη να έχουν συγκεντρωθεί στο ταμιευτήριο 100.000 δραχμές;
(Απ. 3024)

23. Νεόνυμφο ζευγάρι, για την αγορά επίπλων και σκευών, δανείσθηκε 200.000 δρχ. Το δάνειο πρόκειται να εξοφληθεί με ίσες μηνιαίες ληξιπρόθεσμες δόσεις σε 8 έτη, με μηνιαίο επιτόκιο $^1/_2$%. Να βρεθεί η μηνιαία δόση.
(Απ. 2628)

24. Χρέος 90.000 δρχ. εξοφλειται με ετήσια ληξιπρόθεσμη ράντα 20 όρων. Ο ετήσιος όρος είναι 7500 δρχ. Ποιο το επιτόκιο υπολογισμου;

(Απ. *0,0546)*

25. Οφείλει κάποιος σήμερα 120.000 δραχμές και για να τις εξοφλήσει συμφώνησε να πληρώνει, στο τέλος κάθε έτους, 11.000 δρχ. επί 15 έτη. Με ποιό επιτόκιο υπολογίσθηκε η ετήσια δόση;

(Απ. *0,0427)*

26. Ο έμπορος Ε κατέθετε επί 15ετία στην Τράπεζα Τ, στο τέλος κάθε έτους, 10.000 δρχ. Στο τέλος του 15ου έτους είχαν συγκεντρωθεί στην τράπεζα 207.840 δραχμές. Ποιο το επιτόκιο υπολογισμού;

(Απ. *0,045)*

27. Η βιομηχανία Β, για την αγορά σύγχρονου μηχανικού εξοπλισμού, δανείσθηκε από την Ε.Τ.Β.Α. 60.000.000 δρχ. Για την εξόφληση του δανείου συμφωνήθηκε να καταθέτει η βιομηχανία, στο ταμιευτήριο της Ε.Τ.Β.Α. με ανατοκισμό στο τέλος κάθε εξαμήνου 5.000.000 δρχ., ώστε μετά 10 έτη από την τελευταία κατάθεση να έχει εξοφληθεί το δάνειο. Με ποιό εξαμηνιαίο επιτόκιο υπολογίσθηκε η εξαμηνιαία δόση;

(Απ. *0,0545)*

28. Καταθέτει κάποιος, στο τέλος κάθε έτους, 1000 δρχ. Επί πόσα έτη πρέπει να συνεχισθούν οι καταθέσεις για να σχηματισθεί κεφάλαιο 100.000 δρχ., αν το ετήσιο επιτόκιο είναι 4%;

(Απ. *$n = 41$)*

29. Κατέθεσε κάποιος με ανατοκισμό100.000 δρχ. επί 8 έτη και 3 μήνες προς 4%. Ένα έτος μετά τη λήξη του ανατοκισμού αρχίζει να αποσύρει κάθε έτος 20.000 δρχ. Επί πόσα έτη θα συνεχίσει τις αναλήψεις, ώστε να αποσύρει ολόκληρο το ποσό;

(Απ. *$n = 8{,}25$)*

30. Ο κτηματίας Κ αγόρασε αγροτικά μηχανήματα αξίας 540.000 δρχ. και δανείσθηκε το ποσό από την Α.Τ.Ε. Το δάνειο συμφώνησε να εξοφληθεί με ίσες ετήσιες ληξιπρόθεσμες δόσεις των 40.000 δρχ. με ετήσιο επιτόκιο 6%. Μετά από πόσα χρόνια θα εξοφληθεί το δάνειο; Αν βρεθεί κλασματικός όρος να γίνει η τακτοποίησή του.

(Απ. *$n = 28{,}497$)*

31. Καταθέτει κάποιος με ανατοκισμό 10.000 δρχ. επί 20 έτη. Ένα έτος μετά τη λήξη του ανατοκισμού αρχίζει να αποσύρει, στο τέλος κάθε έτους, 2000 δρχ. Επί πόσα έτη θα συνεχισθούν οι αναλήψεις; Επιτόκιο υπολογισμού 0,045. Αν βρεθεί κλασματικός όρος να γίνει η τακτοποίησή του.

(Απ. *$n = 17{,}78$)*

32. Η αρχική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας, ετήσιου όρου 4000 δρχ. και επιτοκίου 3% είναι 34.000 δρχ. Ζητείται το πλήθος των όρων της ράντας και αν βρεθει κλασματικός όρος να γίνει η τακτοποίησή του.

(Απ. *$n = 9{,}96$)*

33. Σε πόσα έτη θα εξοφληθεί χρέος 500.000 δρχ., αν πληρώνομε στο τέλος κάθε έτους 40.000 δρχ. και το επιτόκιο είναι 5%; Αν βρεθεί κλασματικός όρος να γίνει η τακτοποίησή του.

(Απ. *$n = 20{,}103$)*

34. Στο τέλος κάθε έτους καταθέτομε στην Τράπεζα Τ 10.000 δρχ. Επί πόσο χρόνο πρέπει να συνεχισθούν οι καταθέσεις, για να σχηματισθεί κεφάλαιο 100.000 δρχ; Ετήσιο επιτόκιο 4%. Αν βρεθεί κλασματικός όρος να γίνει η τακτοποίησή του.

(Απ. *$n = 8{,}579$)*

35. Καταθέτει κάποιος επί 20 έτη και στην αρχή κάθε έτους 1000 δρχ. προς ετήσιο επιτόκιο 6%. Κατόπιν αρχίζει να αποσύρει 2000 στο τέλος κάθε εξαμήνου· τις πρώτες 2000 δρχ. απέσυρε 6 μήνες μετά τη λήξη των 20 ετών. Εξαμηνιαίο επιτόκιο 3%. Επί πόσα εξάμηνα θα αποσύρει τις 2000 δρχ.;

(Απ. *$n = 29{,}75$ εξάμ.)*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ

ΔΑΝΕΙΑ

9.1 Βασικές έννοιες και διάκριση δανείων.

Οι διάφοροι οικονομικοί οργανισμοί, για να καλύψουν τις έκτακτες (ή και τακτικές) δαπάνες τους, όταν τα έσοδά τους δεν επαρκούν, συνάπτουν **δάνεια.**

Ο χρόνος που μεσολαβεί από την ημέρα που συνάπτεται το δάνειο ως την ημέρα που εξοφλείται λέγεται **διάρκεια του δανείου.**

Τα δάνεια, ανάλογα με τη διάρκειά τους, διακρίνονται σε βραχυπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα.

Βραχυπρόθεσμα λέγονται τα δάνεια που διαρκούν τρεις μήνες ή το πολύ ένα έτος. Τα βραχυπρόθεσμα δάνεια συνάπτονται μεταξύ ιδιωτών και επιχειρήσεων ή μεταξύ επιχειρήσεων και γίνονται με συναλλαγματικές (και σπάνια με γραμμάτια).

Στα βραχυπρόθεσμα δάνεια εφαρμόζεται ο απλός τόκος.

Μακροπρόθεσμα λέγονται τα δάνεια που διαρκούν πολλά έτη. Τα μακροπρόθεσμα δάνεια συνάπτονται από μεγάλους οικονομικούς οργανισμούς (Κράτη, Δήμοι, Κοινότητες, Δ.Ε.Η., Ο.Τ.Ε., Ε.Τ.Β.Α. ή μεγάλες Ανώνυμες Εταιρείες) για να καλύψουν συνήθως έκτακτες δαπάνες: κατασκευή δημοσίων έργων, προμήθεια πολεμικού υλικού, επέκταση εγκαταστάσεων στις δημόσιες και ιδιωτικές επιχειρήσεις. Στα μακροπρόθεσμα δάνεια εφαρμόζεται ο ανατοκισμός. Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσομε τα μακροπρόθεσμα δάνεια.

Εξόφληση ενός δανείου είναι η επιστροφή του δανεισμένου κεφαλαίου και η πληρωμή των τόκων που έχουν παραχθεί κατά τη διάρκεια του δανείου. Το σύνολο των μαθηματικών πράξεων που γίνονται για την εξόφληση ενός δανείου, ονομάζεται **απόσβεση του δανείου.** [Δεν πρέπει να γίνεται σύγχυση του λογιστικού όρου **απόσβεση** (depreciation) των στοιχείων του παγίου ενεργητικού, με τον όρο **απόσβεση δανείου,** ο οποίος σημαίνει την εξόφληση ενός δανείου με περιοδικές δόσεις. Πιο σωστοί όροι είναι οι λέξεις: **Χρεωλυσία** (amortization) και **χρεωλύσιο,** για το οποίο θα μιλήσομε στα επόμενα].

Τα δάνεια, ανάλογα με το πλήθος των δανειστών, διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

Ι. Δάνεια ενιαία, όταν ο δανειστής είναι ένα και μόνο (φυσικό ή νομικό) πρόσωπο.

ΙΙ. Ομολογιακά δάνεια, όταν οι δανειστές είναι πολλά πρόσωπα. Τα ομολογιακά δάνεια εκδίδονται από το Κράτος και τους μεγάλους οικονομικούς οργανισμούς (Δ.Ε.Η., Ο.Τ.Ε., κλπ.). Επειδή τα ομολογιακά δάνεια αντιπροσωπεύουν πολύ μεγάλα κεφάλαια, τα οποία δεν μπορούν να διατεθούν από ένα και μόνο πρόσωπο, γι' αυτό το λόγο, το δάνειο (κεφάλαιο) διαιρείται σε τμήματα μικρών ποσών, τα οποία αντιπροσωπεύουν πιστωτικούς τίτλους που ονομάζονται ***ομολογίες.*** Η διάθεση των ομολογιών στο κοινό γίνεται μέσω των Τραπεζών και του Ταχ/κού Ταμιευτηρίου.

Τα ενιαία δάνεια, ανάλογα με τον τρόπο που εξοφλούνται, διακρίνονται σε πάγια και εξοφλητέα.

Α'. Πάγια λέγονται τα δάνεια εκείνα, στα οποία δεν υπάρχει χρόνος εξοφλήσεως, αλλά ο οφειλέτης έχει το δικαίωμα να εξοφλήσει οποτεδήποτε το δάνειο, είναι όμως υποχρεωμένος να πληρώνει τους τόκους στο τέλος κάθε περιόδου (έτος, εξάμηνο, κλπ.). Πάγια δάνεια συνάπτουν συνήθως: οι Κοινότητες, οι Δήμοι, οι οργανισμοί κοινής ωφελείας, κ.ά.

Β'. Εξοφλητέα λέγονται τα δάνεια εκείνα, στα οποία ο οφειλέτης είναι υποχρεωμένος να εξοφλήσει σε προκαθορισμένο χρόνο (π.χ. σε 25 έτη).

Τα εξοφλητέα δάνεια, ανάλογα με τον τρόπο που εξοφλούνται, διακρίνονται σε:

α) Εξοφλητέα εφάπαξ, όταν ολόκληρο το δάνειο εξοφλείται με μια πληρωμή.

β) Εξοφλητέα τοκοχρεωλυτικώς, όταν η εξόφληση του δανείου γίνεται με δόσεις.

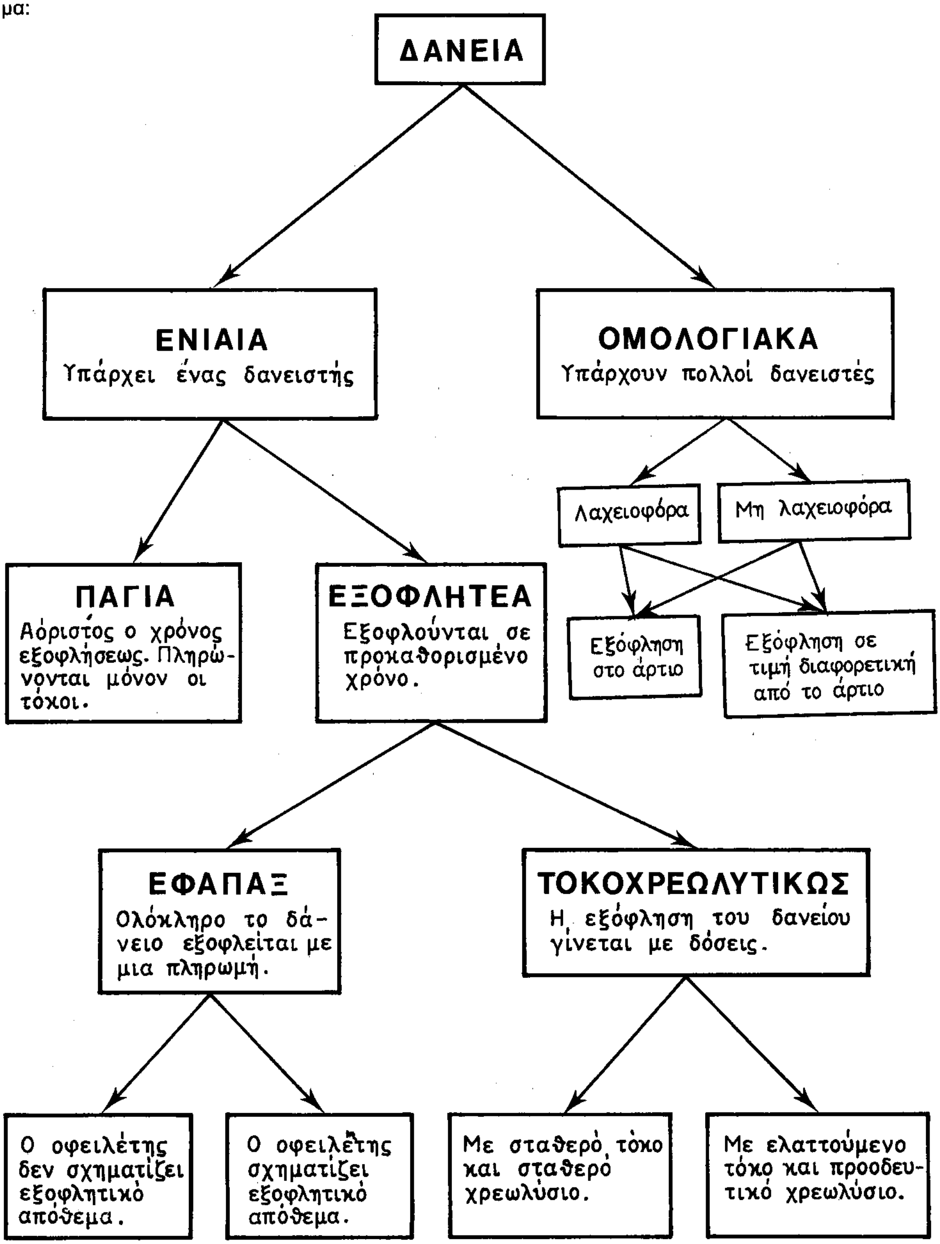
Στα εξοφλητέα εφάπαξ δάνεια μπορούν να συμβούν τα εξής:

1) Ο οφειλέτης, κατά τη διάρκεια του δανείου, να πληρώνει τους τόκους και κατά τη λήξη του δανείου να επιστρέψει το κεφάλαιο, που δανείσθηκε.

2) Ο οφειλέτης, κατά τη λήξη του δανείου, να πληρώσει και τους τόκους και το κεφάλαιο που δανείσθηκε.

3) Ο οφειλέτης — επειδή είναι δύσκολο να εξοικονομήσει ολόκληρο το οφειλόμενο ποσό κατά τη λήξη του δανείου — καταθέτει σε μια τράπεζα (σε ορισμένα χρονικά διαστήματα) χρηματικά ποσά με ανατοκισμό, ώστε τα ποσά αυτά μαζί με τους τόκους τους να ανασυστήσουν (σχηματίσουν) το οφειλόμενο ποσό κατά τη λήξη του δανείου. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο οφειλέτης σχηματίζει **εξοφλητικό απόθεμα.**

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η διάκριση των δανείων, παραθέτομε το παρακάτω διάγραμμα:



ΔΑΝΕΙΑ ΕΝΙΑΙΑ

9.2 Δάνεια ενιαία εξοφλητέα εφάπαξ.

Αν παραστήσομε με το **K** το ποσό του δανείου, με το **n** τις χρονικές περιόδους (έτη, εξάμηνα, κλπ.) που διαρκεί το δάνειο και με το **i** το επιτόκιο υπολογισμού των τόκων του δανείου, τότε η απόσβεση (εξόφληση) ενός ενιαίου δανείου, το οποίο εξοφλείται εφάπαξ, γίνεται με τους εξής τρόπους:

I. Όταν ο οφειλέτης δεν σχηματίζει εξοφλητικό απόθεμα. Διακρίνομε δύο περιπτώσεις:

α) Όταν οι τόκοι πληρώνονται. Εφόσον οι τόκοι πληρώνονται στο τέλος κάθε έτους, έπεται ότι ο οφειλέτης θα πληρώνει στο δανειστή, στο τέλος κάθε έτους, **K.i** δραχμές για τόκους και όταν λήξει το δάνειο θα επιστρέψει και το οφειλόμενο ποσό K.

Το ποσό **K.i**, αφού καταβάλλεται στο τέλος κάθε έτους, αποτελεί ληξιπρόθεσμη ράντα, της οποίας η παρούσα αξία ισούται με $K \cdot i \cdot a_{\overline{n}|i}$, κατά τη χρονική στιγμή που συνάπτεται το δάνειο. Η παρούσα αξία του ποσού που πρέπει να πληρωθεί κατά τη λήξη του δανείου ισούται με $K \cdot U^n$. Δηλαδή, το ποσό του δανείου (=K) ισούται με την παρούσα αξία των τόκων συν την παρούσα αξία του δανεισμένου κεφαλαίου. Επομένως, σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση, πρέπει να ισχύει η επόμενη ισότητα:

$$K = K \cdot i\, a_{\overline{n}|i} + K \cdot U^n \qquad (67)$$

β) Όταν οι τόκοι δεν πληρώνονται, τότε η εξόφληση του δανείου θα γίνει με μια πληρωμή στο τέλος των **n** χρονικών περιόδων, δηλαδή στο τέλος των n ετών ο οφειλέτης θα πληρώσει ποσό, το οποίο ισούται με την τελική αξία (με ανατοκισμό) του δανείου. Άρα, στο τέλος των n ετών θα πληρώσει ο οφειλέτης ποσό: $K(1 + i)^n$. Η περίπτωση αυτή σπανίως εφαρμόζεται στην πράξη.

II. Όταν ο οφειλέτης σχηματίζει εξοφλητικό απόθεμα.

α) Αν οι τόκοι (= K . i) πληρώνονται στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου και ο οφειλέτης καταθέτει (στο τέλος κάθε περίοδου) ένα σταθερό ποσό R με επιτόκιο t ($t \neq i$), πρέπει στο τέλος των περιόδων να έχει σχηματισθεί το ποσό του δανείου (=K). Επομένως, ο σχηματισμός του εξοφλητικού αποθέματος γίνεται με ληξιπρόθεσμη ράντα· η τελική αξία της ράντας πρέπει να είναι ίση με το ποσό K του δανείου. Δηλαδή, πρέπει να ισχύει η ισότητα:

$$R \cdot S_{\overline{n}|t} = K \qquad (68)$$

Το t είναι το επιτόκιο με το οποίο ανατοκίζονται τα ποσά R που καταθέτει ο οφειλέτης, για την ανασύσταση (σχηματισμό) του εξοφλητικού αποθέματος και ονομάζεται **επιτόκιο ανασυστάσεως** του δανεισμένου κεφαλαίου. Το επιτόκιο ανασυστάσεως (= t) είναι συνήθως μικρότερο του επιτοκίου του δανείου (= i).

Αν λύσομε ως προς R την εξίσωση (68), παίρνομε τη σχέση:

$$R = \frac{K}{S_{\overline{n}|t}} = K \cdot \frac{1}{S_{\overline{n}|t}}$$

Αν τώρα θέσομε όπου $\dfrac{1}{S_{\overline{n}|t}} = P_{\overline{n}|t}$ τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται ως εξής:

$$R = K \cdot P_{\overline{n}|t} \qquad (69)$$

Αν $K = 1$, τότε θα είναι και $R = P_{\overline{n}|t}$. Το ποσό $P_{\overline{n}|t}$ πρέπει να καταθέτει ο οφειλέτης, στο τέλος κάθε περιόδου προς επιτόκιο t, για να σχηματισθεί ποσό 1 νομισματικής μονάδας μετά από n χρονικές περιόδους. Το $P_{\overline{n}|t}$ ονομάζεται **χρεωλύσιο** 1 νομισματικής μονάδας.

Ώστε: **Χρεωλύσιο είναι το ποσό που πρέπει να καταθέτει ο οφειλέτης, στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου (επί n περιόδους), για να εξοφληθεί δάνειο μιας νομισματικής μονάδας.**

Τις τιμές του $P_{\overline{n}|t}$ τις βρίσκομε στον Πίνακα VI (βλ. Πίνακες: Ανατοκισμού - Ραντών - Χρεωλυσίων) με ορισμένα επιτόκια και χρονικές περιόδους. Π.χ. με $t = i = 0{,}04$ και $n = 20$ στον Πίνακα VI βρίσκομε: $P_{\overline{20}|0,04} = 0{,}03358175$. Ο Πίνακας VI παρέχει απευθείας τις τιμές του $P_{\overline{n}|t}$, για $i = 0{,}0025$ έως και $i = 0{,}08$. Αν τώρα θέλομε να βρούμε την τιμή του.

$$P_{\overline{n}|i} = \frac{1}{S_{\overline{n}|i}} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

για $i = 0{,}09$ έως $i = 0{,}20$, τότε χρησιμοποιούμε τον Πίνακα I.

Έστω π.χ. ότι θέλομε να βρούμε το

$$P_{\overline{20}|0,12} = \frac{0{,}12}{(1{,}12)^{20} - 1} \qquad (\alpha)$$

Στον Πίνακα I βρίσκομε: $(1{,}12)^{20} = 9{,}6462926$.

Αντικαθιστώντας τώρα στη σχέση (α) έχομε:

$$P_{\overline{20}|0,12} = \frac{0{,}12}{9{,}6462926 - 1} = \frac{0{,}12}{8{,}6462926} = 0{,}0138787$$

β) Αν οι τόκοι (= K . i) δεν πληρώνονται στο τέλος κάθε περιόδου, πρέπει ο οφειλέτης να καταθέτει στο τέλος κάθε περιόδου ένα ποσό **R′** τέτοιο, ώστε κατά τη λήξη του δανείου να έχει σχηματισθεί οφειλόμενο ποσό $\mathbf{K(1+i)^n}$. Δηλαδή η τελική αξία του εξοφλητικού αποθέματος (= $R' S_{\overline{n}|t}$) πρέπει να είναι ίση με το οφειλόμενο ποσό [$= K(1+i)^n$] κατά τη λήξη του δανείου. Εξισώνομε τις τελικές αξίες και έχομε: $R' S_{\overline{n}|t} = K(1+i)^n$. Λύνομε ως προς R′ και βρίσκομε:

$$R' = \frac{K(1+i)^n}{S_{\overline{n}|t}} = K(1+i)^n \cdot \frac{1}{S_{\overline{n}|t}}$$

Αλλά $\dfrac{1}{S_{\overline{n}|t}} = P_{\overline{n}|t}$ άρα: $\mathbf{R' = K(1+i)^n \cdot P_{\overline{n}|t}}$ **(70)**

Με τους τύπους (69) και (70) υπολογίζεται το χρεωλύσιο (= ποσό εξοφλητικού αποθέματος), δηλαδή το ποσό που πρέπει να καταθέτει ο οφειλέτης, στο τέλος κάθε περιόδου, ώστε μετά από n χρονικές περιόδους να εξοφλήσει το δάνειο.

Παράδειγμα. Ο βιομήχανος Β, για την επέκταση των εγκαταστάσεων της βιομηχανίας του, δανείσθηκε 1.000.000 δρχ. με ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο 6%. Το δάνειο πρέπει να εξοφληθεί σε 20 έτη. Να υπολογισθεί το χρεωλύσιο (ποσό εξοφλητικού αποθέματος): 1) Αν οι τόκοι πληρώνονται στο τέλος κάθε έτους και 2) αν έχει συμφωνηθεί, οι τόκοι και το κεφάλαιο να πληρωθούν στο τέλος του 20ου έτους. Επιτόκιο ανασυστάσεως του δανεισμένου κεφαλαίου 4%.

Λύση. $K = 1.000.000$, $n = 20$, $i = 0{,}06$, $t = 0{,}04$

1) Εφόσον οι τόκοι πληρώνονται κάθε έτος, συνάγεται ότι ο Β θα πληρώνει στο τέλος κάθε έτους ποσό $K \cdot i = 1.000.000 \times 0{,}06 = 60.000$ δρχ. για τόκους. Το χρεωλύσιο (δηλαδή το ποσό που πρέπει να καταθέτει ο Β στο τέλος κάθε έτους) θα υπολογισθεί βάσει του τύπου:

$$R = K\,P_{\overline{n}|t} = 1.000.000\,P_{\overline{20}|0,04} \qquad (\alpha)$$

Στον Πίνακα VI, με επιτόκιο 4% και n = 20, βρίσκομε: $P_{\overline{20}|0,04} = 0,03358175$.

Αντικαθιστώντας τώρα το $P_{\overline{20}|0,04}$ στη σχέση (α) με το ίσο του βρίσκομε:

$$R = 1.000.000 \times 0,03358175 = 33.581,75$$

Επομένως, ο Β θα πρέπει να πληρώνει (στο τέλος κάθε έτους) ποσό 93.581,75 (= 60.000 + 33.581,75) επί 20 έτη για να εξοφλήσει το δάνειο.

2) Αν τώρα ο Β δεν πληρώνει τους τόκους, έπεται ότι οι τόκοι και το κεφάλαιο θα πληρωθούν κατά τη λήξη του δανείου. Στην περίπτωση αυτή το ποσό του εξοφλητικού αποθέματος θα υπολογισθεί βάσει του τύπου:

$$R' = K\,(1 + i)^n\,P_{\overline{n}|t}$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και έχομε:

$$R' = 1.000.000(1,06)^{20}\,P_{\overline{20}|0,04} \qquad (\beta)$$

Από τον Πίνακα I βρίσκομε: $(1,06)^{20} = 3,2071355$ και από τον Πίνακα VI:

$P_{\overline{20}|0,04} = 0,0335\ 8175$.

Αντικαθιστώντας τώρα στη (β) βρίσκομε:

$R' + 1.000.000 \times 3,2071355 \times 0,0335\ 8175 = 107.700$

Άρα, ο β πρέπει να καταθέσει κάθε έτος 107.700 δρχ. για να εξοφλήσει το δάνειο.

9.3 Δάνεια ενιαία εξοφλητέα τοκοχρεωλυτικώς.

Οι τρόποι εξοφλήσεως ενός δανείου, που εξετάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, σπανίως εφαρμόζονται στην πράξη. Η απόσβεση των ενιαίων δανείων γίνεται πάντοτε **τοκοχρεωλυτικώς** (με δόσεις).

Ο τρόπος εξοφλήσεως ενός δανείου με δόσεις, παρέχει στον οφειλέτη το πλεονέκτημα να εξοφλεί το δάνειο με περιοδικές πληρωμές, τις οποίες κάνει με ευκολία. Για το δανειστή όμως, ο τρόπος αυτός παρουσιάζει το μειονέκτημα, ότι πρέπει να διαχειρίζεται τα ποσά που εισπράττει κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να παίρνει τους τόκους από το κεφάλαιο που δάνεισε, αλλά και το κεφάλαιο να ανασυστήσει κατά τη λήξη του δανείου.

Η τοκοχρεωλυτική απόσβεση των χορηγουμένων δανείων εφαρμόζεται πάρα πολύ στην πράξη. Το ποσό (δόση) που πληρώνει ο οφειλέτης, στο τέλος κάθε περιόδου, αποτελείται από δύο τμήματα: το ένα τμήμα είναι ο τόκος του κεφαλαίου που δανείσθηκε και το άλλο τμήμα είναι το χρεωλύσιο ανασυστάσεως του δανεισμένου κεφαλαίου.

Το συνολικό ποσό που πληρώνει ο οφειλέτης, στο τέλος κάθε περιόδου, για να εξοφλήσει ένα μέρος από το κεφάλαιο που δανείσθηκε, ονομάζεται **Τοκοχρεωλύσιο** (= τόκος + χρεωλύσιο).

Αν παραστήσομε με το **R** το τοκοχρεωλύσιο, με το **K** το ποσό του δανείου, με το **i** το επιτόκιο του δανείου, με το **t** το επιτόκιο ανασυστάσεως του κεφαλαίου που δανείσθηκε και με το $\mathbf{P_{\overline{n}|t}}$ το χρεωλύσιο, τότε το τοκοχρεωλύσιο που πρέπει να πληρώνει ο οφειλέτης, στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου, υπολογίζεται βάσει του τύπου:

$$\mathbf{R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n}|t}} \qquad \mathbf{(71)}$$

όπου $K \cdot i$ = τόκος και $K \cdot P_{\overline{n}|t}$ = χρεωλύσιο.

Το επιτόκιο του δανείου (=i) και το επιτόκιο ανασυστάσεως (=t) του δανεισμένου κεφαλαίου, μπορεί να είναι: $i = t$ ή $t < i$. Αν $i = t$, τότε ο τύπος (71) έχει τη μορφή:

$$R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n}|i} \qquad (72)$$

Από τον τύπο (72) συνάγεται ότι: και ο τόκος και το χρεωλύσιο υπολογίζονται βάσει του επιτοκίου του δανείου.

Σημείωση. Για τον υπολογισμό του τοκοχρεωλυσίου μπορεί να εφαρμοσθεί και ο τύπος:

$$R = K \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} \qquad (73)$$

Το $1/a_{\overline{n}|i}$ είναι το τοκοχρεωλύσιο μιας νομισματικής μονάδας και είναι το αντίστροφο του $a_{\overline{n}|i}$. Στις εφαρμογές, για τον υπολογισμό του τοκοχρεωλυσίου, πρέπει να χρησιμοποιούνται οι τύποι (71) και (72), διότι παρέχουν μεγάλη ευκολία στους υπολογισμούς και δίνουν αμέσως τις συνιστώσες του τοκοχρεωλυσίου (= τόκος + χρεωλύσιο), που χρειάζονται για την κατασκευή του πίνακα αποσβέσεως του δανείου, όπως θα δούμε αμέσως πιο κάτω.

Η απόσβεση των ενιαίων δανείων τοκοχρεωλυτικώς γίνεται με διάφορες μεθόδους: 1) Μέθοδος του σταθερού χρεωλυσίου, 2) μέθοδος του προοδευτικού χρεωλυσίου, 3) αμερικανική μέθοδος, κ.ά.

9.4 Απόσβεση ενιαίων δανείων με τη μέθοδο του σταθερού χρεωλυσίου.

Κατά τη μέθοδο του σταθερού χρεωλυσίου, το **τοκοχρεωλύσιο** αναλύεται σε **τόκο** (ο οποίος υπολογίζεται πάντοτε με βάση το αρχικό ποσό του δανείου και είναι σταθερός για όλες τις περιόδους) και σε **χρεωλύσιο** με το οποίο ο δανειστής θα συγκεντρώσει σιγά - σιγά το ποσό που δάνεισε. Τόσο ο τόκος όσο και το χρεωλύσιο παραμένουν σταθερά σε όλη τη διάρκεια του δανείου.

Το πιο κάτω παράδειγμα επεξηγεί πλήρως τον τρόπο αποσβέσεως ενός δανείου με τη μέθοδο του σταθερού χρεωλυσίου.

Παράδειγμα. Χορηγήθηκε δάνειο 100.000 δρχ. και πρέπει να εξοφληθεί σε 5 έτη, με ίσες ετήσιες τοκοχρεωλυτικές δόσεις και με ετήσιο επιτόκιο 5%. Να υπολογισθεί το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο και να καταρτισθεί ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου.

Λύση. $K = 100.000$, $n = 5$, $i = 0{,}05$, $R =;$
Το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο υπολογίζεται βάσει του τύπου: $R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n}|i}$.
Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και έχομε:

$$R = 100.000 \times 0{,}05 + 100.000\ P_{\overline{5}|0{,}05} \qquad (\alpha)$$

Στον Πίνακα VI, με $i = 0{,}05$ και $n = 5$ βρίσκομε:

$$P_{\overline{5}|0{,}05} = 0{,}18097480 \approx 0{,}180975$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην (α) έχομε:

$$\begin{aligned} R &= 100.000 \times 0{,}05 + 100.000 \times 0{,}180975 \\ &= \mathbf{5.000} + \mathbf{18.097{,}50} = \mathbf{23.097{,}50} \end{aligned}$$

Δηλαδή: Τόκος + Χρεωλύσιο = Τοκοχρεωλύσιο

Ώστε: Ο οφειλέτης πρέπει να πληρώνει κάθε έτος 23.097,50 δρχ. (5.000 δρχ. για τόκο και 18.097,50 δρχ. για χρεωλύσιο) για να εξοφλήσει το ποσό του δανείου στο τέλος του 5ου έτους.

Για τη συστηματική παρακολούθηση των υποχρεώσεων του οφειλέτη, κατασκευάζεται **πίνακας αποσβέσεως του δανείου,** στον οποίο παρακολουθούνται: 1) Οι ετήσιες, εξαμηνιαίες, κλπ. πληρωμές, 2) το εξοφλημένο ποσό του δανείου, 3) το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό του δανείου, στο τέλος κάθε έτους, εξαμήνου, κλπ. Ο Πίνακας αποσβέσεως του δανείου είναι πολύ χρήσιμος στον οργανισμό που χορηγεί το δάνειο, γιατί με τον πίνακα αυτό τηρείται και η λογιστική του δανείου στο Λογιστήριο του οργανισμού.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΣΒΕΣΕΩΣ
δανείου 100.000 δρχ. σε 5 έτη προς 5% με τη μέθοδο του Σταθερού Χρεωλυσίου

Τέλος έτους (1)	Τοκοχρεω-λύσιο (2)	Τόκος (3)	Χρεωλύσιο (4)	Εξοφλημένο ποσό δανείου (5)	Υπόλοιπο ανεξόφλητο (6)
1ου	23.097,50	5000	18.097,50	18.097,50	81.902,50
2ου	23.097,50	5000	18.097,50	37.099,88	62.900,12
3ου	23.097,50	5000	18.097,50	57.052,37	42.947,63
4ου	23.097,50	5000	18.097,50	78.002,49	21.997,51
5ου	23.097,50	5000	18.097,50	100.000,00	Ø

Παρατηρήσεις.

1) Οι στήλες (2), (3) και (4) παραμένουν αμετάβλητες κατά τη διάρκεια του δανείου.

2) Η στήλη (5) σχηματίζεται ως εξής: Στο τέλος του πρώτου έτους το εξοφλημένο ποσό του δανείου ισούται με το χρεωλύσιο (= 18.097,50). Το εξοφλημένο ποσό του κάθε έτους βρίσκεται αν πολλαπλασιάζομε το εξοφλημένο ποσό του προηγούμενου έτους επί το (1 + i) και προσθέσομε το χρεωλύσιο. Επομένως, θα έχομε:

Εξοφλ. ποσό 2ου έτους: 18.097,5 × 1,05 + 18.097,5 = 37.099,88
Εξοφλ. ποσό 3ου έτους: 37.099,88 × 1,05 + 18.097,5 = 57.052,37
Εξοφλ. ποσό 4ου έτους: 57.052,37 × 1,05 + 18.097,5 = 78.002,49
Εξοφλ. ποσό 5ου έτους: 78.002,49 × 1,05 + 18.097,5 = 100.000,00

3) Το «υπόλοιπο ανεξόφλητο» (στήλη 6) προκύπτει ως διαφορά: συνολικό ποσό δανείου μείον εξοφλημένο ποσό. Π.χ. το ανεξόφλητο ποσό του δανείου στο τέλος του τετάρτου έτους είναι: 100.000 − 78.002,49 = 21.997,51.

9.5 Απόσβεση ενιαίων δανείων με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεωλυσίου.

Στην πράξη, η απόσβεση ενός δανείου γίνεται συνήθως με τη **μέθοδο του προοδευτικού χρεωλυσίου,** η οποία λέγεται και **γαλλική μέθοδος.**

Κατά τη μέθοδο του προοδευτικού χρεωλυσίου, ο λήπτης (οφειλέτης) του δανείου καταβάλλει (στο τέλος κάθε περιόδου) πάντοτε το ίδιο τοκοχρεωλύσιο. Δηλαδή το τοκοχρεωλύσιο παραμένει σταθερό όσο διαρκεί το δάνειο και αναλύεται σε δύο τμήματα:

Τοκοχρεωλύσιο = Τόκος + Χρεωλύσιο

Στη μέθοδο του προοδευτικού χρεωλυσίου, επειδή ο τόκος κάθε περιόδου υπολογίζεται κάθε φορά με βάση το ανεξόφλητο ποσό του δανείου, έπεται ότι ο τόκος κάθε περιόδου θα ελαττώνεται κάθε φορά κατά τον τόκο του χρεωλυσίου της προηγούμενης περιόδου. Το χρεωλύσιο κάθε περιόδου είναι η διαφορά: Τοκοχρεωλύσιο μείον τόκος. Επειδή ο τόκος ελαττώνεται κάθε περίοδο, έπεται ότι το χρεωλύσιο θα αυξάνεται **προοδευτικά** κάθε περίοδο, γι' αυτό και τη μέθοδο αυτή τη λέμε **μέθοδο του προοδευτικού χρεωλυσίου.**

Για να κατασκευάσομε τον πίνακα αποσβέσεως του δανείου πρέπει να υπολογίζομε για κάθε περίοδο τα εξής: 1) Τον τόκο, 2) το χρεωλύσιο, 3) το τοκοχρεωλύσιο, 4) το εξοφλημένο ποσό του δανείου και 5) το ανεξόφλητο ποσό του δανείου.

Ο υπολογισμός των πιο πάνω στοιχείων γίνεται ως εξής:

Το τοκοχρεωλύσιο υπολογίζεται βάσει του γνωστού τύπου: $R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n}|i}$.

Το τοκοχρεωλύσιο αναλύεται σε τόκο (= K . i) και σε χρεωλύσιο ($= K \cdot P_{\overline{n}|}) = \mathbf{P_1}$ = χρεωλύσιο 1ης περιόδου, το οποίο αποτελεί και το εξοφλημένο ποσό του δανείου στο τέλος της πρώτης περιόδου· άρα το ανεξόφλητο ποσό του δανείου, στο τέλος της 1ης περιόδου, θα είναι: $K - K \cdot P_{\overline{n}|} = \mathbf{K - P_1}$.

Στο τέλος της 2ης περιόδου, το **τοκοχρεωλύσιο** αναλύεται σε **τόκο** [ο οποίος υπολογίζεται με βάση το ανεξόφλητο υπόλοιπο, δηλ. $(K - K \cdot P_{\overline{n}|}) \cdot i = (K - P_1) \cdot i$] και σε **χρεωλύσιο,** το οποίο βρίσκεται αν από το τοκοχρεωλύσιο αφαιρέσομε τον τόκο. Δηλαδή:

$(K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n}|}) - (K - K \cdot P_{\overline{n}|}) \cdot i = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n}|} - K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n}|} \cdot i = K \cdot P_{\overline{n}|}(1 + i) = \mathbf{P_1 (1 + i) = P_2}$

= χρεωλύσιο 2ης περιόδου. Το εξοφλημένο ποσό του δανείου στο τέλος της 2ης περιόδου, θά είναι $P_1 + P_2$ άρα το ανεξόφλητο υπόλοιπο θα είναι: $\mathbf{K - (P_1 + P_2)}$.

Στο τέλος της 3ης περιόδου, το τοκοχρεωλύσιο αναλύεται σε **τόκο:**

$[K - (P_1 + P_2)] \cdot i$ και σε **χρεωλύσιο:**

$[K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n}|}] - [K - (P_1 + P_2)] \cdot i = K \cdot i + P_1 - K \cdot i + P_1 \cdot i + P_2 \cdot i = P_1(1 + i) + P_2 \cdot i - P_2 + P_2 \cdot i$

$P_2 (1 + i) = P_1 (1 + i)(1 + i) = \mathbf{P_1 (1 + i)^2 = P_3}$ = χρεωλύσιο 3ης περιόδου.

Εξοφλημένο ποσό: $P_1 + P_2 + P_3$. Υπόλοιπο ανεξόφλητο: $\mathbf{K - (P_1 + P_2 + P_3)}$.

Στο τέλος της 4ης περιόδου, θα είναι:

Τόκος $= [K - (P_1 + P_2 + P_3)] \cdot i$

Χρεωλύσιο $= (K \cdot i + P_1) - [K - (P_1 + P_2 + P_3)] \cdot i$

$= K \cdot i + P_1 - K \cdot i + P_1 \cdot i + P_2 \cdot i + P_3 \cdot i = P_1(1 + i) + P_2 \cdot i + P_3 \cdot i$

$= P_2 + P_2 \cdot i + P_3 \cdot i = P_2 (1 + i) + P_3 \cdot i =$

$= P_2 (1 + i) + P_2 (1 + i) \cdot i = P_2 (1 + i)(1 + i) =$

$= P_1 (1 + i)(1 + i)(1 + i) = \mathbf{P_1 (1 + i)^3 = P_4}$ = χεωλύσιο 4ης περιόδου.

Εξοφλημένο ποσό: $P_1 + P_2 + P_3 + P_4$.

Υπόλοιπο ανεξόφλητο: $\mathbf{K - (P_1 + P_2 + P_3 + P_4)}$

Επομένως; το χρεωλύσιο της μιοστής περιόδου υπολογίζεται βάσει του τύπου:

$$\mathbf{P_\mu = P_1 (1 + i)^{\mu-1}} \qquad \textbf{(74)}$$

Από τον τύπο (74) συμπεραίνομε ότι: Για να βρούμε το χρεωλύσιο της μιοστής περιόδου, αρκεί να ανατοκίσομε το χρεωλύσιο της πρώτης περιόδου επί $(\mu - 1)$ περιόδους. **Πρακτικώς,** το χρεωλύσιο κάθε περιόδου προκύπτει από το γινόμενο του χρεωλυσίου της προηγούμενης περιόδου επί το συντελεστή $(1 + i)$.

Το εξοφλημένο ποσό $(= E_\mu)$ του δανείου, στο τέλος της μιοστής περιόδου, ισούται με το άθροισμα των χρεωλυσίων 1ης, 2ης, 3ης, ..., μης περιόδου. Δηλαδή:

$$E_\mu = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_\mu = P_1 + P_1(1 + i) + P_1(1 + i)^2 + \ldots + P_1(1 + i)^{\mu-1} =$$

$$= P_1 [1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \ldots + (1 + i)^{\mu-1}] = P_1 \cdot S_{\overline{\mu}|i} = K \cdot P_{\overline{n}|i} \cdot S_{\overline{\mu}|i}$$

Ώστε:

$$\mathbf{E_\mu = K \cdot P_{\overline{n}|i} \cdot S_{\overline{\mu}|i}} \qquad \textbf{(75)}$$

Με τον τύπο (75) υπολογίζομε το εξοφλημένο ποσό του δανείου στο τέλος της περιόδου μ, διότι το άθροισμα των χρεωλυσίων αποτελεί αύξουσα γεωμετρική πρόοδο και στην ουσία είναι η τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας.

Το ανεξόφλητο υπόλοιπο, στο τέλος της μιοστής περιόδου, υπολογίζεται βάσει του τύπου:

$$\mathbf{Y_\mu = K - K \cdot P_{\overline{n}|i} \cdot S_{\overline{\mu}|i}} \qquad \textbf{(76)}$$

Ο τόκος της μιοστής περιόδου προκύπτει με πολλαπλασιασμό του ανεξοφλήτου υπολοίπου της $(\mu - 1)$ περιόδου επί το επιτόκιο του δανείου· δηλαδή υπολογίζεται βάσει του τύπου:

$$\mathbf{I_\mu = Y_{\mu-1} \cdot i = [K - K \cdot P_{\overline{n}|i}\ S_{\overline{\mu-1}|i}] \cdot i} \qquad \textbf{(77)}$$

Οι συνολικοί τόκοι βρίσκονται, αν από το σύνολο των τοκοχρεωλυσίων $(= n \times R)$ αφαιρέσομε το ποσό του δανείου $(= K)$, δηλαδή:

$$\textbf{Σύνολο τόκων} = \mathbf{n \cdot R - K} \qquad \textbf{(78)}$$

Παράδειγμα 1ο. Δάνειο 100.000 δρχ. πρέπει να εξοφληθεί σε 5 έτη με ίσες ετήσιες δόσεις και με ετήσιο επιτόκιο 5%. Να υπολογισθεί το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο (δόση) και να κατασκευασθεί ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου.

Λύση. $K = 100.000, \quad n = 5, \quad i = 0{,}05, \quad R = ;$

Το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο θα υπολογισθεί βάσει του γνωστού τύπου:

$$
\begin{aligned}
R &= K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}i} \\
R &= 100.000 \times 0{,}05 + 100.000\, P_{\overline{5|}0{,}05} \\
&= 5.000 + 100.000 \times 0{,}180975 \\
&= 5.000 + 18.097{,}50 = 23.097{,}50
\end{aligned}
$$

Ώστε: Το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο είναι 23.097,50 δρχ.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΣΒΕΣΕΩΣ
δανείου 100.000 δρχ. σε 5 έτη προς 5% με τη μέθοδο του Προοδευτικού Χρεωλυσίου

Τέλος έτους (1)	Τοκοχρεω-λύσιο (2)	Τόκος (3)	Χρεωλύσιο (4)	Εξοφλημένο ποσό δανείου (5)	Υπόλοιπο ανεξόφλητο (6)
1ου	23.097,50	5.000,00	18.097,50	18.097,50	81.902,50
2ου	23.097,50	4.095,13	19.002,37	37.099,87	62.900,13
3ου	23.097,50	3.145,00	19.952,50	57.052,37	42.947,63
4ου	23.097,50	2.147,40	20.950,10	78.002,50	21.997,50
5ου	23.097,50	1.100,00	21.997,50	100.000,00	∅

Παρατηρήσεις.

1) Στο τέλος του 1ου έτους: α) Το τοκοχρεωλύσιο (= 23.097,50) αναλύεται σε τόκο (= 5000) και σε χρεωλύσιο (= 18.097,50). β) Το εξοφλημένο ποσό του δανείου ισούται με το χρεωλύσιο. γ) Το ανεξόφλητο υπόλοιπο είναι η διαφορά: Ποσό δανείου μείον χρεωλύσιο (= 100.000 – 18.098,50 = 81.902,50).

2) Ο τόκος κάθε έτους προκύπτει με πολλαπλασιασμό του ανεξόφλητου ποσού του δανείου επί το επιτόκιο.

3) Επειδή Τοκοχρεωλύσιο = Τόκος + Χρεωλύσιο, έπεται ότι: Χρεωλύσιο = Τοκοχρεωλυσιο μείον Τόκος.

4) Το εξοφλημένο ποσό του δανείου, στο τέλος κάθε έτους, αποτελείται από το άθροισμα των χρεωλυσίων που έχουν υπολογισθεί.

5) Το ανεξόφλητο υπόλοιπο προκύπτει ως διαφορά: Ποσό δανείου μείον υπολογισμένα τοκοχρεωλύσια. Επομένως, για τη συμπλήρωση των στηλών (3), (4), (5) και (6) εργαζόμαστε ως εξής:

Στο τέλος του 2ου έτους, θα είναι:

Τόκος	= 81.902,50	×	0,05	=	4.095,13
Χρεωλύσιο	= 23.097,50	–	4.095,13	=	19.002,37
Εξοφλημένο ποσό	= 18.097,50	+	19.002,37	=	37.099,87
Υπόλοιπο ανεξόφλητο	= 100.000	–	37.099,87	=	62.900,13

Στο τέλος του 3ου έτους θα είναι:

Τόκος	=	62.900,13	x	0,05 =	3145
Χρεωλύσιο	=	23.097,50	−	3145 =	19.952,50
Εξοφλημένο ποσό	=	37.099,87	+	19.952,50 =	57.052,37
Υπόλοιπο ανεξόφλητο	=	100.000	−	57.052,37 =	42.947,63

Για τον υπολογισμό των στοιχείων του πίνακα των υπολοίπων ετών, εργαζόμαστε κατά τον ίδιο τρόπο. Αν δεν έχομε κάνει κανένα λάθος, τότε στο τέλος του τελευταίου έτους το «εξοφλημένο ποσό» πρέπει να ισούται με το ποσό του δανείου, ενώ το «υπόλοιπο ανεξόφλητο» πρέπει να είναι μηδέν.

Παράδειγμα 2ο. Χορηγήθηκε δάνειο 1.000.000 δρχ. και πρέπει να εξοφληθεί σε 20 έτη με ίσες ετήσιες δόσεις με ετήσιο επιτόκιο 6%. Ζητούνται: 1) Το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο. 2) Ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου, για τα τέσσερα έτη, με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεωλυσίου. 3) Το χρεωλύσιο του 8ου έτους. 4) Το εξοφλημένο ποσό και το ανεξόφλητο υπόλοιπο στο τέλος του 5ου έτους. 5) Το σύνολο των τόκων που θα πληρώσει ο οφειλέτης.

Λύση. $K = 1.000.000$, $n = 20$, $i = 0{,}06$

1) Το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο υπολογίζεται βάσει του τύπου: $R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n}|i}$.
Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και έχομε:

$$\begin{aligned} R &= 1.000.000 \times 0{,}06 + 1.000.000\ P_{\overline{20}|0{,}06} \\ &= 60.000 + 1.000.000 \times 0{,}02718456 \end{aligned}$$

ή $$\mathbf{R = 60.000 + 27.184,56 = 87.184,56}$$

Ώστε: η ετήσια δόση είναι 87.184,56 δρχ.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΣΒΕΣΕΩΣ
δανείου 1.000.000 δρχ. σε 20 έτη προς 6% με τη μέθοδο του Προοδευτικού Χρεωλυσίου

Τέλος έτους	Τοκοχρεωλύσιο	Τόκος	Χρεωλύσιο	Εξοφλημένο ποσό	Υπόλοιπο ανεξόφλητο
1ου	87.184,56	60.000,00	27.184,56	27.184,56	972.815,50
2ου	87.184,56	58.368,93	28.815,63	56.000,19	943.999,90
3ου	87.184,56	56.639,99	30.544,57	86.544,76	913.455,30
4ου	87.184,56	54.807,32	32.377,24	118.922,00	881.078,00
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20ου	87.184,56	4.935,00	82.249,56	1.000.000	Ø

2) Το χρεωλύσιο του 8ου έτους θα βρεθεί βάσει του τύπου (74). Πράγματι, αν στον τύπο $P_\mu = P_1 (1 + i)^{\mu-1}$ θέσομε: $\mu = 8$, $P_1 = 27.184{,}56$ και $i = 0{,}06$, θα έχομε:

$$P_8 = 27.184{,}56\ (1{,}06)^7 = 27.184{,}56 \times 1{,}50363 = \mathbf{40.875,52}$$

3) Το εξοφλημένο ποσό, στο τέλος του 5ου έτους, θα υπολογισθεί βάσει του τύπου: $E_\mu = K \cdot P_{\overline{n}|i} \cdot S_{\overline{\mu}|i}$.

$$\begin{aligned} E_5 &= 1.000.000\ P_{\overline{20}|0{,}06}\ S_{\overline{5}|0{,}06} \\ &= 1.000.000 \times 0{,}02718456 \times 5{,}637093 = \mathbf{153.241,50} \end{aligned}$$

Επομένως το ανεξόφλητο ποσό του δανείου, στο τέλος του 5ου έτους, θα υπολογισθεί με τον τύπο:

$Y_\mu = K - K \,.\, P_{\overline{n}|i}\, S_{\overline{\mu}|i}$. Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και βρίσκομε:

$$Y_5 = 1.000.000 - 1.000.000\ P_{\overline{20}|0,06}\ S_{\overline{5}|0,06}$$
$$= 1.000.000 - 153.241,50 = \mathbf{846.758,50}$$

4) Οι συνολικοί τόκοι, τους οποίους θα πληρώσει λήπτης του δανείου, βρίσκονται αν από το σύνολο των τοκοχρεωλυσίων (δόσεων) αφαιρέσομε το ποσό του δανείου. Επομένως, θα έχομε:

Σύνολο δόσεων = n . R = 20 × 87.184,56 = 1.743.691
μείον ποσόν δανείου: 1.000.000
Σύνολο τόκων: 743.691

— ***Πληρωμή ετήσιου τοκοχρεωλυσίου σε ρ ίσες δόσεις.***

Στην πράξη, η πληρωμή του τοκοχρεωλυσίου γίνεται με ρ ίσες δόσεις (δηλαδή κάθε εξάμηνο, κάθε τρίμηνο και συνήθως κάθε μήνα) κατά τους ακόλουθους τρόπους:

I. Αν π.χ. K = 1.000.000 δρχ. η = 20, i = 0,06 και ρ = 12, δηλαδή η πληρωμή του τοκοχρεωλυσίου γίνεται κάθε μήνα, τότε εργαζόμαστε ως εξής: Βρίσκομε πρώτα το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο και κατόπιν το διαιρούμε με το 12 και έτσι βρίσκομε μηνιαίο τοκοχρεωλύσιο. Επομένως, θα έχομε:

$$R_{\text{ετήσιο}} = 1.000.000 \times 0,06 + 1.000.000\ P_{\overline{20}|0,06}$$
$$= 60.000 + 1.000.000 \times 0,027185 = 87.185$$

και $R_{\text{μηνιαίο}}$ 87.185 : 12 = 7265.

Ο τρόπος αυτός συνηθίζεται πολύ στην πράξη.

II. Αν π.χ. Κ. = 1.000.000, n = 10, i = 0,06 και ρ = 2, δηλαδή η πληρωμή του τοκοχρεωλυσίου γίνεται κάθε εξάμηνο, τότε εργαζόμαστε ως εξής: Διαιρούμε το ετήσιο επιτόκιο με το 2 και πολλαπλασιάζομε τα έτη επί 2. Επομένως, θα έχομε:

$$R_{\text{εξαμ.}} = 1.000.000 \times 0,03 + 1.000.000\ P_{\overline{20}|0,03}$$
$$= 30.000 + 1.000.000 \times 0,037216 = 67.216$$

Σημείωση. Υποθέτομε ότι το ετήσιο επιτόκιο είναι ονομαστικό ετήσιο. Κατά κανόνα, το επιτόκιο των χορηγουμένων δανείων είναι ονομαστικό.

III. Αν το επιτόκιο είναι πραγματικό ετήσιο, τότε εργαζόμαστε με το ισοδύναμο εξαμηνιαίο, τριμηνιαίο ή μηνιαίο και πολλαπλασιάζομε τα έτη επί 2, 3 ή 12.

Αν π.χ. K = 100.000, n = 10, i = 0,0625 και θέλομε να βρούμε το εξαμηνιαίο τοκοχρεωλύσιο (ρ = 2), τότε εργαζόμαστε με το ισοδύναμο εξαμηνιαίο επιτόκιο και διπλασιάζομε τα έτη.

Το ισοδύναμο εξαμηνιαίο επιτόκιο θα υπολογισθεί με το γνωστό τύπο:

$$i_p = (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1$$

Άρα:

$$i_2 = (1,0625)^{\frac{1}{2}} - 1 = (1,0625)^{\frac{6}{12}} - 1 = 0,030776 \approx 0,03$$

Το εξαμηνιαίο τοκοχρεωλύσιο θα υπολογισθεί πλέον με τον τύπο:

$$R_{εξαμ.} = K \cdot i_2 + K \cdot P_{\overline{2n}|\,i_2}$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και βρίσκομε:

$$\begin{aligned} R_{εξαμ.} &= 100.000 \times 0{,}03 + 100.000\, P_{\overline{20}|\,0{,}03} \\ &= 3.000 + 100.000 \times 0{,}03722 \\ &= 3.000 + 3.722 = 6.722 \end{aligned}$$

9.6 Απόσβεση ενιαίων δανείων με δύο επιτόκια (μέθοδος Sinking Fund).

Η μέθοδος αποσβέσεως ενός δανείου με δύο επιτόκια ονομάζεται **Αμερικανική μέθοδος** ή **μέθοδος του Sinking Fund,** διότι ο λήπτης (οφειλέτης) του δανείου, για να μη δυσκολευθεί να εξοικονομήσει το ποσό που δανείσθηκε κατά τη λήξη του δανείου, σχηματίζει (με περιοδικές καταθέσεις) ***εξοφλητικό απόθεμα*** (Sinking Fund).

Η απόσβεση ενός δανείου με τη μέθοδο του Sinking Fund γίνεται ως εξής:

Αν το ποσό του δανείου είναι **K** νομισματικές μονάδες, η διάρκεια του δανείου **n** έτη, εξάμηνα, κλπ., το επιτόκιο του δανείου **i** και το επιτόκιο (τοποθετήσεως) ανασυστάσεως του δανεισμένου κεφαλαίου **t** (συνήθως: $t < i$), τότε ο λήπτης του δανείου είναι υποχρεωμένος να πληρώνει, στο τέλος κάθε έτους, εξαμήνου, κλπ., τους τόκους ολόκληρου του ποσού του δανείου (= **K . i**)· είναι επίσης υποχρεωμένος να καταθέτει με ανατοκισμό, στο τέλος κάθε περιόδου, ένα σταθερό ποσό (προς επιτόκιο **t**) τέτοιο, ώστε μετά **n** έτη, εξάμηνα, κλπ., να έχει συγκεντρωθεί το ποσό που δανείσθηκε.

Το ποσό που πρέπει να καταθέτει ο οφειλέτης, στο τέλος κάθε περιόδου, αποτελεί το χρεωλύσιο. Επομένως, το τοκοχρεωλύσιο που πρέπει να πληρώνει ο οφειλέτης θα υπολογισθεί βάσει του τύπου (71), δηλαδή βάσει του τύπου:

$$\mathbf{R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n}|\,t}}$$

Ο τρόπος αποσβέσεως ενός δανείου με τη μέθοδο του Sinking Fund χρησιμοποιείται σε πολλές περιπτώσεις. Π.χ., μια βιομηχανία που θέλει να αγοράσει σύγχρονο μηχανικό εξοπλισμό παίρνει ένα δάνειο από την Ε.Τ.Β.Α και το εξοφλεί με την αμερικανική μέθοδο.

Παράδειγμα 1ο. Στην Α.Ε. «ΕΥΡΗΚΑ», χορηγήθηκε δάνειο 100.000 δρχ. που πρέπει να εξοφληθεί σε 6 χρόνια με ετήσιο επιτόκιο **6%**. Η απόσβεση του δανείου γίνεται με τη μέθοδο του Sinking Fund με επιτόκιο τοποθετήσεως **4%**. Να υπολογισθούν οι ετήσιες δόσεις που πρέπει να πληρώσει η Α.Ε. για να εξοφληθεί το δάνειο και να κατασκευασθεί ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου.

Λύση. $K = 100.000$, $n = 6$, $i = 0{,}06$, $t = 0{,}04$

Το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο θα υπολογισθεί με το γνωστό τύπο: $R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n}|\,t}$.

$$\begin{aligned} R &= 100.000 \times 0{,}06 + 100.000\, P_{\overline{6}|\,0{,}04} \\ &= 6.000 + 100.000 \times 0{,}1507619 \end{aligned}$$

και $\mathbf{R = 6.000 + 15.076{,}19 = 21.076{,}19.}$

Ώστε: η Α.Ε. θα πληρώνει κάθε χρόνο 21.076,19 δραχμές. Οι 6.000 δρχ. αποτελούν τον ετήσιο τόκο του δανεισμένου κεφαλαίου, ενώ το υπόλοιπο (= 15.076,19 δρχ.) θα το καταθέτει κάθε χρόνο η Α.Ε. σε μια τράπεζα με ανατοκισμό προς **4%**, ώστε στο τέλος του 6ου έτους να έχει συγκεντρώσει η Α.Ε. το ποσό που δανείσθηκε για να εξοφλήσει το δάνειο (= 100.000 δρχ.).

Παρατηρήσεις Πίνακα Αποσβέσεως Δανείου

1) Στο τέλος του πρώτου έτους πληρώνονται οι τόκοι (= 6.000) και γίνεται η πρώτη κατάθεση (= 15.076,19), η οποία είναι και το πρώτο εξοφλητικό απόθεμα.

2) Το καταθεμένο ποσό (= 15.076,19) τοκίζεται για ένα έτος και παράγει τόκο 603,05 (= 15.076,19 × 0,04). Επομένως, το εξοφλητικό απόθεμα στο τέλος του 2ου έτους θα σχηματισθεί από τα χρεωλύσια του 1ου και 2ου έτους και από τον τόκο του 1ου έτους. Δηλαδή: 15.076,19 + 603,05 + 15.076,19 = 30.755,43.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΣΒΕΣΕΩΣ
δανείου 100.000 σε 6 έτη με επιτόκια: δανείου 6% και ανασυστάσεως 4%, με τη μέθοδο του Sinking Fund

Τέλος έτους	Τοκοχρεωλύσιο	Τόκοι με 6%	Χρεωλύσιο (Καταθέσεις) (σε τράπεζα)	Παραγμένοι τόκοι με 4%	Εξοφλητικό απόθεμα (Sinking Fund)
1ου	21.076,19	6000	15.076,19	∅	15.076,19
2ου	21.076,19	6000	15.076,19	603,05	30.755,43
3ου	21.076,19	6000	15.076,19	1.230,22	47.061,84
4ου	21.076,19	6000	15.076,19	1.882,47	64.020,50
5ου	21.076,19	6000	15.076,19	2.560,82	81.657,51
6ου	21.076,19	6000	15.076,19	3.266,30	100.000.–
			90.457,14	9.542,86	

3) Το ποσό των 30.775,43 δρχ. τοκίζεται για ένα έτος και παράγει τόκο 1.230,22 (= 30.755,43 × 0,04). Επομένως, το εξοφλητικό απόθεμα στο τέλος του 3ου έτους θα είναι: 30.755,43 + 1.230,22 + 15.076,19 = 47.061,84. Δηλαδή, αν στο κάθε εξοφλητικό απόθεμα προσθέσομε τον ετήσιο τόκο του και το χρεωλύσιο, τότε βρίσκομε το εξοφλητικό απόθεμα του επομένου έτους. Συνεχίζοντας κατά τον ίδιο τρόπο, παρατηρούμε ότι στο τέλος του 6ου έτους το εξοφλητικό απόθεμα ισούται με το ποσό του δανείου.

Παράδειγμα 2ο. Ο βιομήχανος Β πήρε δάνειο 200.000 δρχ., το οποίο πρέπει να εξοφλήσει σε 3 χρόνια με ίσες εξαμηνιαίες δόσεις με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 5% και ανασυστάσεως του δανεισμένου κεφαλαίου 3%. Να βρεθεί η εξαμηνιαία δόση και να κατασκευασθεί ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου.

Λύση. Εφόσον ζητείται το εξαμηνιαίο τοκοχρεωλύσιο θα διαιρέσομε τα δοσμένα επιτόκια με το 2 και θα διπλασιάσομε τα χρόνια· άρα θα έχομε:

$$K = 200.000, \quad i = 0{,}025, \quad n = 3 \times 2 = 6 \text{ εξάμηνα}, \quad t = 0{,}015$$

$$\begin{aligned} R &= 200.000 \times 0{,}025 + 200.000\ P_{\overline{6|}\,0{,}015} \\ &= 5.000 \quad + 200.000 \times 0{,}160525 \\ &= 5.000 \quad + \ 32.105 = 37.105. \end{aligned}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΣΒΕΣΕΩΣ
δανείου 200.000 δρχ. σε 6 εξάμηνα προς επιτόκιο δανείου $2^1/_2$% και ανασυστάσεως $1^1/_2$% με τη μέθοδο Sinking Fund

Τέλος εξαμ.	Τοκοχρεωλύσιο	Τόκοι μέ $2^1/_2$%	Χρεωλύσια (καταθέσεις σε τράπεζα)	Παραγμένοι τόκοι με $1^1/_2$%	Εξοφλητικό απόθεμα (Sinking Fund)
1	37.105	5000	32.105	∅	32.105,00
2	37.105	5000	32.105	481,58	64.691,58
3	37.105	5000	32.105	970,37	97.766,95
4	37.105	5000	32.105	1.466,50	131.338,45
5	37.105	5000	32.105	1.970,08	165.413,53
6	37.105	5000	32.105,27*	2.481,20	200.000
			192.630,27		

* Την τελευταία κατάθεση αυξήσαμε κατά 0,87 δρχ. για να βρούμε το ποσό των 200.000 δρχ.

Ώστε: Ο Β θα πληρώνει κάθε εξάμηνο 5000 δρχ. για τόκους και συγχρόνως θα καταθέτει 32.105 δρχ. σε μια τράπεζα προς $1^1/_2$% το εξάμηνο, ώστε στο τέλος του 6ου εξαμήνου να έχει συσσωρευθεί το ποσό που δανείσθηκε.

9.7 Δάνεια κτηματικής πίστεως.

Τα διάφορα πιστωτικά ιδρύματα (Κτηματική Τράπεζα, Ταμείο Παρακαταθηκών και Δανείων, Ταχυδρομικό ταμιευτήριο κλπ.) χορηγούν μακροπρόθεσμα στεγαστικά δάνεια. Τα δάνεια της Κτηματικής Τράπεζας πρέπει να εξοφληθούν σε 10 χρόνια, ενώ του ταμείου Παρακαταθηκών και Δανείων και του Ταχυδρομικού Ταμιευτηρίου πρέπει να εξοφληθούν σε 25 χρόνια.

Τα επιτόκια των στεγαστικών δανείων είναι συνήθως μεγάλα. Η Κτηματική Τράπεζα χορηγεί στεγαστικά δάνεια με επιτόκιο 10%, ενώ το Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο και το Τ.Π.Δ. χορηγούν δάνεια με $8^1/_2$%.

Η εξόφληση των δανείων κτηματικής πίστεως, γίνεται τοκοχρεωλυτικώς με ίσες ετήσιες ή εξαμηνιαίες δόσεις. Ειδικότερα, τα στεγαστικά δάνεια που χορηγούνται στους Δημοσίους Υπαλλήλους από το Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο και το Ταμείο Παρακαταθηκών και Δανείων εξοφλούνται με μηνιαίες τοκοχρεωλητικές δόσεις, οι οποίες παρακρατούνται από τις μηνιαίες αποδοχές των υπαλλήλων.

Αν η απόσβεση του δανείου γίνεται με ίσες εξαμηνιαίες δόσεις, τότε το εξαμηνιαίο τοκοχρεωλύσιο υπολογίζεται βάσει του τύπου:

$$R = K \cdot \frac{i}{2} + KP_{\overline{2n}|\frac{i}{2}} \tag{79}$$

Όπου i = ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο και n = έτη.

Σημείωση. Σχετικώς με το επιτόκιο υπολογισμού των τοκοχρεωλυσίων, πρέπει να χρησιμοποιείται το ισοδύναμο εξαμηνιαίο ή μηνιαίο επιτόκιο. Στην πράξη όμως, οι περισσότεροι πιστωτικοί οργανισμοί χρησιμοποιούν το ανάλογο επιτόκιο, διότι το επιτόκιο των δανείων είναι συνήθως ονομαστικό.

Αν μετά από μ εξάμηνα (μ < 2n), ζητηθεί η εξόφληση του δανείου τότε το οφειλόμενο ποσό του δανείου θα υπολογισθεί με τον τύπο:

$$Y_\mu = K - K \cdot P_{\overline{2n}|\frac{i}{2}} S_{\overline{\mu}|\frac{i}{2}} \tag{80}$$

Παράδειγμα. Ο υπάλληλος Υ πήρε από την Κτηματική Τράπεζα δάνειο 400.000 δρχ. με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 10%. Το δάνειο πρέπει να εξοφληθεί σε 10 χρόνια με ίσες εξαμηνιαίες τοκοχρεωλυτικές δόσεις. Ζητούνται: 1) Να υπολογισθεί το εξαμηνιαίο τοκοχρεωλύσιο. 2) Να κατασκευασθεί ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου για τα 4 πρώτα εξάμηνα με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεωλυσίου. 3) Ποιο το ανεξόφλητο υπόλοιπο μετά από 5 έτη και 6 μήνες;

Λύση. K = 400.000, n = 10, i = 0,10

$$\begin{aligned} R = K \cdot \frac{i}{2} + KP_{\overline{2n}|\frac{i}{2}} &= 400.000 \times 0{,}05 + 400.000\, P_{\overline{20}|0{,}05} \\ &= 20.000 + 400.000 \times 0{,}03024 \\ &= 20.000 + 12.096 = 32.096 \end{aligned}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΣΒΕΣΕΩΣ ΔΑΝΕΙΟΥ

Τέλος εξαμ.	Τοκοχρεωλύσιο	Τόκος	Χρεωλύσιο	Υπόλοιπο ανεξόφλητο
1ου	32.096	20.000,00	12.096,00	387.904,00
2ου	32.096	19.395,20	12,700,80	375.203,20
3ου	32.096	18.760,16	13.335,84	361.867,36
4ου	32.096	18.093,37	14.002,63	347.864,73

Το ανεξόφλητο υπόλοιπο μετά από 5 έτη και 6 μήνες είναι:

$$Y = 400.000 - 400.000\ P_{\overline{20|}\,0{,}05}\ S_{\overline{11|}\,0{,}05}$$
$$= 400.000 - 400.000 \times 0{,}03024 \times 14{,}20679 = 228.155.$$

ΟΜΟΛΟΓΙΑΚΑ ΔΑΝΕΙΑ

9.8 Βασικοί ορισμοί και σύμβολα ομολογιακών δανείων.

Στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου είπαμε, ότι τα δάνεια, ανάλογα με το πλήθος των δανειστών, διακρίνονται σε δυο μεγάλες κατηγορίες:

α) ***Τα ενιαία δάνεια,*** δηλαδή δάνεια στα οποία υπάρχει ένας δανειστής και πολλοί οφειλέτες και β) ***τα ομολογιακά δάνεια,*** δηλαδή δάνεια στα οποία υπάρχουν πολλοί δανειστές.

Τα ομολογιακά δάνεια εκδίδονται από το Κράτος και τους μεγάλους οικονομικούς οργανισμούς (Δ.Ε.Η., Ο.Τ.Ε., Ε.Τ.Β.Α. ή και μεγάλες Ανώνυμες Εταιρείες) για να καλύψουν τακτικές και κυρίως έκτακτες δαπάνες, π.χ. κατασκευή δημοσίων έργων, προμήθεια πολεμικού υλικού, επέκταση έργων υποδομής, αγορά σύγχρονου μηχανικού εξοπλισμού, κ.ά. Επειδή τα ομολογιακά δάνεια αντιπροσωπεύουν πολύ μεγάλα κεφάλαια, τα οποία δεν μπορούν να διατεθούν από ένα και μόνο πρόσωπο, γι' αυτό το λόγο, το κεφάλαιο (= δάνειο) διαιρείται σε τμήματα μικρών ποσών, τα οποία αντιπροσωπεύουν πιστωτικούς τίτλους οι οποίοι ονομάζονται ***ομολογίες.***

Η ***ομολογία*** (Bond) είναι έγγραφος τίτλος, ο οποίος αντιπροσωπεύει ένα ορισμένο χρηματικό ποσό που χορηγήθηκε ως δάνειο. Στο σώμα της ομολογίας αναγράφονται: α) Το ποσό του δανείου που αντιπροσωπεύει η ομολογία, β) το επιτόκιο με το οποίο υπολογίζονται οι τόκοι, γ) ο χρόνος και ο τρόπος πληρωμής των τόκων, δ) η τιμή εξοφλήσεως των ομολογιών, ε) οι φορολογικές απαλλαγές και τα άλλα πλεονεκτήματα που παρέχονται στους ***ομολογιούχους*** (κατόχους ομολογιών), στ) οι εγγυήσεις του δανείου, ζ) το δικαίωμα μετατροπής των ομολογιών σε άλλους πιστωτικούς τίτλους (π.χ. σε μετοχές), κ.ά. Η διάθεση των ομολογιών στο κοινό γίνεται μέσω των Τραπεζών και του Ταχυδρομικού Ταμιευτηρίου.

Το ποσό του δανείου που αντιπροσωπεύει κάθε ομολογία και που είναι γραμμένο στο σώμα της καλείται **ονομαστική αξία** της ομολογίας. Η ονομαστική αξία μιας ομολογίας μπορεί να είναι 100 ή 500 ή και 1000 δρχ. Αν η ονομαστική αξία ισούται με το μικρότερο ποσό που διαιρέθηκε το δάνειο, τότε η ομολογία λέγεται **απλή.** Για να μην υπάρχει μεγάλος αριθμός απλών ομολογιών και για να τοποθετούνται μεγάλα κεφάλαια, γίνεται έκδοση **πολλαπλών** ομολογιών, δηλαδή τίτλοι των 2,5,10,20,50, κλπ. ομολογιών. Αν π.χ. έχομε ομολογίες των 1000, 5.000, 10.000 και 50.000 δρχ. τότε οι ομολογίες των 1000 δρχ. λέγονται **απλές,** ενώ οι υπόλοιπες λέγονται **πολλαπλές.**

Η τιμή στην οποία πωλούνται οι ομολογίες κατά τη χρονική στιγμή που συνάπτεται το ομολογιακό δάνειο, ονομάζεται **τιμή εκδόσεως** της ομολογίας. Αν η τιμή εκδόσεως είναι ίση με την ονομαστική αξία μιας ομολογίας, τότε λέμε ότι το ομολογιακό δάνειο εκδόθηκε **στο άρτιο.** Αν όμως η τιμή εκδόσεως είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη από την ονομαστική αξία της ομολογίας, τότε λέμε ότι το δάνειο εκδόθηκε **κάτω από το άρτιο** ή **πάνω από το άρτιο.**

Η τιμή στην οποία θα εξοφληθεί κάθε ομολογία καλείται **τιμή εξοφλήσεως.** Η εξόφληση μιας ομολογίας γίνεται συνήθως στο άρτιο· μπορεί όμως να γίνει και σε τιμή διαφορετική από το άρτιο (πάνω ή κάτω από το άρτιο). **Ο τόκος υπολογίζεται πάντοτε με βάση την ονομαστική αξία της ομολογίας** και με το επιτόκιο που είναι γραμμένο στο σώμα της ομολογίας και το οποίο λέγεται **ονομαστικό επιτόκιο.**

Κάθε ομολογία αποτελείται από το **κύριο σώμα** και από τα **τοκομερίδια** (Coupons), δηλαδή μικρές αποδείξεις σε σχήμα ορθογώνιο, με βάση τις οποίες εισπράττονται οι τόκοι στο τέλος κάθε περιόδου (συνήθως εξάμηνη). Τα τοκομερίδια είναι προσαρτημένα στις ομολογίες και στο σώμα τους είναι γραμμένα: Το ποσό του τόκου, ο χρόνος πληρωμής και ο αριθμός της ομολογίας. Σε κάθε ομολογία υπάρχουν τόσα τοκομερίδια, όσες είναι και οι περίοδοι πληρωμής των τόκων. Στο τέλος κάθε εξαμήνου, ο ομολογιούχος αποκόπτει το αντίστοιχο τοκομερίδιο και εισπράττει τον τόκο. [Για να σχηματίσει ο μαθητής σαφή εικόνα της ομολογίας, παραθέτομε πιοκάτω μια απλή ομολογία του Λαχειοφόρου Δανείου Οικονομικής Αναπτύξεως του έτους 1970].

Οι ομολογίες, ανάλογα με τον τρόπο που εκδίδονται, μπορούν να είναι: α) ***ονομαστικές***, β) **στον κομιστή** και γ) **μικτές**. Στις ονομαστικές ομολογίες αναγράφεται το όνομα του ομολογιούχου και δεν υπάρχουν τοκομερίδια, αλλά στο σώμα τους είναι γραμμένα το ποσό των τόκων και ο χρόνος πληρωμής τους. Οι ομολογίες στον κομιστή είναι ανώνυμες και έχουν τοκομερίδια (συνηθίζονται πολύ στην πράξη). Οι μικτές ομολογίες έχουν στο σώμα τους και το όνομα του ομολογιούχου και τοκομερίδια.

Η εξόφληση (απόσβεση) των ομολογιακών δανείων γίνεται στην πράξη ως εξής:

Οι τόκοι εξοφλούνται με τα τοκομερίδια· δηλαδή στο τέλος κάθε εξαμήνου, οι ομολογιούχοι αποκόπτουν από τις ομολογίες τους τα αντίστοιχα τοκομερίδια και εισπράττουν τους τόκους.

Το δανεισμένο κεφάλαιο εξοφλείται με τις ομολογίες· δηλαδή σε προκαθορισμένες ημερομηνίες κληρώνεται ορισμένος αριθμός ομολογιών (ανάλογος με το χρεωλύσιο του δανείου) και προσκαλούνται οι ομολογιούχοι να προσκομίσουν τις ομολογίες που κληρώθηκαν για να εισπράξουν τα χρήματα που αντιπροσωπεύουν οι ομολογίες τους.

Σύμβολα ομολογιακών δανείων.

K = Ονομαστικό ποσό ομολογιακού δανείου.
C = Ονομαστική αξία κάθε ομολογίας.
K : C = N = Αριθμός ομολογιών κατά τη σύναψη του δανείου.
T = Τιμή εκδόσεως κάθε ομολογίας.
N . T = Πραγματικό ποσό δανείου, το οποίο εισπράττει ο οφειλέτης κατά τη σύναψη του δανείου και το οποίο πληρώνουν οι ομολογιούχοι.
C′ = Τιμή εξοφλήσεως κάθε ομολογίας σε τιμή διαφορετική από το άρτιο.
N . C = K = Το οφειλόμενο ποσό του δανείου, όταν η εξόφληση γίνεται στο άρτιο.
N . C′ = Το οφειλόμενο ποσό του δανείου, όταν η εξόφληση γίνεται σε τιμή διαφορετική από το άρτιο. Δηλαδή ο οφειλέτης εισπράττει N.T και θα πληρώσει N . C ή N . C′.
$\mathbf{N_{\mu+1}}$ = Αριθμός ομολογιών που βρίσκονται στη ζωή στην αρχή της μ + 1 περιόδου (τέλος της μ περιόδου).
$\mathbf{E_\mu}$ = Αριθμός ομολογιών οι οποίες εξοφλούνται (κληρώνονται) στο τέλος της μ περιόδου.
R = Τοκοχρεωλύσιο.
n = Διάρκεια δανείου.
i = Επιτόκιο δανείου.

9.9 Ομολογιακά δάνεια εξοφλητέα τοκοχρεωλυτικώς στο άρτιο.

Στην προηγούμενη παράγραφο είπαμε ότι: Αν η τιμή εκδόσεως των ομολογιών είναι ίση με την ονομαστική τους αξία, τότε το ομολογιακό δάνειο έχει εκδοθεί **στο άρτιο.**

Η απόσβεση (εξόφληση) των ομολογιακών δανείων γίνεται τοκοχρεωλυτικώς με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεωλυσίου.

Για την κατασκευή του πίνακα αποσβέσεως ενός ομολογιακού δανείου απαιτείται ο υπολογισμός των εξής στοιχείων:

1) **Υπολογισμός του αριθμού των ομολογιών** κατά τη σύναψη του δανείου. Ο συνολικός αριθμός των ομολογιών προκύπτει με διαίρεση του ονομαστικού ποσού του δανείου (= K) διά της ονομαστικής αξίας (= C) κάθε ομολογίας.

Δηλαδή: K:C = N = ζώσες ομολογίες κατά την έκδοση του δανείου.

2) **Υπολογισμός τοκοχρεωλυσίου.** Αν στο γνωστό τύπο $R = K(i + P_{\overline{n}|i})$ αντικαταστήσομε το K με το ίσο του N.C, τότε προκύπτει ο τύπος υπολογισμού του τοκοχρεωλυσίου των ομολογιακών δανείων, ήτοι:

$$\text{Τοκοχρεωλύσιο} = R = N \cdot C\, [i + P_{\overline{n}|i}] \tag{81}$$

Όπου: $N \cdot C \cdot i$ = Τόκος και $N \cdot C \cdot P_{\overline{n}|i}$ = Χρεωλύσιο πρώτης περιόδου.

3) **Υπολογισμός χρεωλυσίου μ περιόδου.** Το χρεωλύσιο της μιοστής περιόδου υπολογίζεται βάσει του τύπου:

$$P_\mu = N \cdot C \cdot P_{\overline{n}|i}(1 + i)^{\mu-1} \tag{82}$$

4) **Υπολογισμός εξοφλημένων τίτλων μ περιόδου.** Ο αριθμός των εξοφλημένων τίτλων (ομολογιών) στο τέλος της μ περιόδου βρίσκεται αν διαιρέσομε το χρεωλύσιο της μιοστής περιόδου ($=P_\mu$) με την ονομαστική αξία (=C) κάθε ομολογίας, δηλαδή:

$$E_\mu = \frac{N \cdot C \cdot P_{\overline{n}|i}(1 + i)^{\mu-1}}{C} = N \cdot P_{\overline{n}|i}(1 + i)^{\mu-1} \tag{83}$$

5) **Υπολογισμός ζώντων τίτλων (ομολογιών) στην αρχή της μ + 1 περιόδου.** Οι ζώσες ομολογίες στην αρχή της μ + 1 περιόδου (τέλος της μ περιόδου) βρίσκονται αν διαιρέσομε το ανεξόφλητο ποσό του δανείου με την ονομαστική αξία κάθε ομολογίας, δηλαδή:

$$N_{\mu+1} = \frac{N.C - N.C.P_{\overline{n}|i}\, S_{\overline{\mu}|i}}{C} = N - N.P_{\overline{n}|i}\, S_{\overline{\mu}|i} \qquad (84)$$

6) **Ο περιεχόμενος τόκος** στο τοκοχρεωλύσιο της μ + 1 περιόδου, υπολογίζεται με βάση τον τύπο:

$$I_{\mu+1} = N_{\mu+1} . C . i \qquad (85)$$

7) **Οι ομολογίες που έχουν εξοφληθεί** μέχρι και την περίοδο μ υπολογίζονται με βάση τον τύπο:

$$M_{\mu} = \frac{N.C.P_{\overline{n}|i} . S_{\overline{\mu}|i}}{C} = N.P_{\overline{n}|i}\, S_{\overline{n}|i} \qquad (86)$$

Για την πλήρη κατανόηση και εμπέδωση της αποσβέσεως ενός ομολογιακού δανείου, το οποίο εκδίδεται και εξοφλείται στο άρτιο, παραθέτομε τα επόμενα παραδείγματα:

Παράδειγμα 1ο.

Η Α.Ε. «ΕΡΜΗΣ» σύναψε ομολογιακό δάνειο 5.000.000 δρχ. Το δάνειο αποτελείται από 10.000 ομολογίες, ονομαστικής αξίας κάθε ομολογίας 500 δρχ. Το δάνειο θα εξοφληθεί στο άρτιο με επιτόκιο 3% σε 6 χρόνια με ετήσιες κληρώσεις. Να υπολογισθεί το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο και να κατασκευασθεί ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου.

Λύση:

$N = 10.000, \quad C = 500, \quad n = 6, \quad i = 0{,}03.$

Το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο θα υπολογισθεί με βάση τον τύπο:

$$R = N.C\,[i + P_{\overline{n}|i}] = N.C.i + N.C.P_{\overline{n}|i}$$

όπου: $N.C.I$ = τόκος και $N.C.P_{\overline{n}|i}$ = χρεωλύσιο. Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και έχομε:

$$\begin{aligned} R &= 10.000 \times 500 \times 0{,}03 + 10.000 \times 500\, P_{\overline{6}|0,03} \\ &= 150.000 + 5.000.000 \times 0{,}1546 \\ &= 150.000 + 773.000 = 923.000. \end{aligned}$$

Στο τέλος του πρώτου έτους, η Α.Ε. θα πληρώσει 923.000 δρχ. (150.000 δρχ. για τόκους και 773.000 δρχ. για χρεωλύσιο).

Θα εξοφληθούν 773.000:500 = 1.546 ομολογίες. Η απόσβεση του ομολογιακού δανείου παρακολουθείται σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΣΒΕΣΕΩΣ
ομολογιακού δανείου 5.000.000 δρχ. με 3% σε 6 χρόνια. N = 10.000, C = 500.

Τέλος έτους	Ζώντες τίτλοι στην αρχή του έτους	Τοκο-χρεωλύσιο	Τόκοι ζώντων τίτλων	Χρεωλύσιο	Εξοφλημένοι τίτλοι	Υπόλοιπο
1	10.000	923.000	150.000	773.000	1.546	Ø
2	8.454	923.000	126.810	796.190	1.592	190
3	6.862	923.196	102.930	820.266	1.640	266
4	5.222	923.274	78.330	844.944	1.689	444
5	3.533	923.457	52.995	870.462	1.740	462
6	1.793	923.476	26.895	896.581	1.793	81
Σύνολο		5.539.403	537.960	5.001.443	10.000	

Παρατηρήσεις:

1) Στο τέλος του πρώτου έτους το τοκοχρεωλύσιο είναι 923.000 δραχμές· απ' αυτές, οι 150.000 δρχ. καταβάλλονται για τόκους (εξοφλούνται με τα τοκομερίδια) και 773.000 για χρεωλύσιο, το οποίο θα εξοφλήσει ορισμένο αριθμό ομολογιών. Ο αριθμός των ομολογιών που θα εξοφληθούν βρίσκεται αν διαιρέσομε το χρεωλύσιο του πρώτου έτους με την ονομαστική αξία κάθε ομολογίας, δηλαδή: 773.000:500 = 1.546 ομολογίες θα κληρωθούν για να εξοφληθούν στο τέλος του πρώτου έτους. Επομένως, οι ζώσες ομολογίες στην αρχή του δευτέρου έτους θα είναι: 10.000 — 1.546 = 8.454.

2) Στο τέλος του δευτέρου έτους θα έχομε:
α) Τόκοι ζώντων τίτλων: 8.454 x 500 x 0,03 = 126.810
β) Χρεωλύσιο: 923.000 — 126.810 = 796.190
γ) Εξοφλημένες ομολογίες: 796.190:500 = 1.592 ομολογίες και υπόλοιπο 190 δρχ. Το υπόλοιπο των 190 δρχ., επειδή δεν εξοφλεί ολόκληρη ομολογία, το κρατά ο οφειλέτης (το ανατοκίζει για ένα έτος) και το προσθέτει στο τοκοχρεωλύσιο του τρίτου έτους. Στην αρχή τώρα του τρίτου έτους, οι ζώσες ομολογίες θα είναι: 8.454 — 1.592 = 6.862.

3) Στο τέλος του τρίτου έτους θα έχομε:
α) Τοκοχρεωλύσιο: 923.000 + 190 x 1,03 = 923.196
β) Τόκοι ζώντων τίτλων: 6.862 x 500 x 0,03 = 102.930
γ) Χρεωλύσιο: 923.196 — 102.930 = 820.266
δ) Εξοφλημένες ομολογίες: 820.266:500 = 1.640,532, δηλαδή 1.640 ομολογίες και 0,532 x 500 = 266 δρχ. υπόλοιπο, το οποίο θα ανατοκισθεί για ένα έτος και θα προστεθεί στο χρεωλύσιο του τετάρτου έτους. Οι ζώσες ομολογίες στην αρχή του τετάρτου έτους θα είναι: 6.862 — 1.640 = 5.222.

4) Στο τέλος του τετάρτου έτους θα έχομε:
α) Τοκοχρεωλύσιο: 923.000 + 266 x 1.03 = 923.274
β) Τόκοι ζώντων τίτλων: 5.222 x 500 x 0,03 = 78.330
γ) Χρεωλύσιο: 923.274 — 78.330 = 844.944
δ) Εξοφλημένοι τίτλοι: 844.944:500 = 1.689 ομολογίες και υπόλοιπο 444 δραχμές (= 0,888 x 500).

Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο και για τα υπόλοιπα έτη μέχρι να εξοφληθεί το δάνειο.

Παράδειγμα 2ο.

Ομολογιακό δάνειο 1.000.000 δρχ. σε ομολογίες ονομαστικής αξίας 100 δρχ. πρέπει να εξοφληθεί σε 20 χρόνια με ίσες εξαμηνιαίες δόσεις και με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 8%. Ζητούνται: 1) Το εξαμηνιαίο τοκοχρεωλύσιο. 2) Ο Πίνακας αποσβέσεως του δανείου για τα 5 πρώτα εξάμηνα. 3) Οι εξοφλημένες ομολογίες στο 18ο εξάμηνο. 4) Οι ζώσες ομολογίες στην αρχή του 16ου εξαμήνου. 5) Οι ομολογίες που έχουν εξοφληθεί μέχρι και το 7ο έτος.

Λύση:

K = 1.000.000, C = 100, N = 10.000, n = 20, i = 0,08.

Επειδή το επιτόκιο έχει δοθεί ως ονομαστικό ετήσιο και ζητείται το εξαμηνιαίο τοκοχρεωλύσιο, θα εργασθούμε με το ανάλογο εξαμηνιαίο επιτόκιο 4% και θα πολλαπλασιάσομε τα έτη επί 2 για να γίνουν εξάμηνα. Επομένως, θα έχομε:

1) Το τοκοχρεωλύσιο θα υπολογισθεί με βάση τον τύπο:

$$\left[R = N \, . \, C \, \frac{i}{2} + P_{\overline{2n}\rceil \frac{i}{2}} \right] =$$

$= 10.000 \times 100\,(0{,}04 \quad + P_{\overline{40}|\,0{,}04})$
$= 10.000 \times 100 \times 0{,}04 + 10.000 \times 100 \times 0{,}01052$
$= 40.000 \qquad\qquad + 10.520 = 50.520$

Επομένως, στο τέλος του πρώτου εξαμήνου πρέπει να πληρωθούν 50.520 δρχ. (40.000 δρχ. για τόκους και 10.520 δρχ. για χρεωλύσιο). Θα εξοφληθούν 10.520:100 = 105 ομολογίες.

2) Η απόσβεση του ομολογιακού δανείου παρακολουθείται με τον ακόλουθο πίνακα.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΣΒΕΣΕΩΣ
ομολογιακού δανείου 1.000.000 δρχ. με 4% σε 40 εξάμηνα. C = 100, N = 10.000.

Τέλος εξάμ.	Ζώντες τίτλοι στην αρχή του εξαμ.	Τοκοχρεωλύσιο	Τόκοι ζώντων τίτλων	Χρεωλύσιο	Εξοφλημένοι τίτλοι	Υπόλοιπο
1	10.000	50.520,00	40.000	10.520,00	105	20,00
2	9.895	50.540,80	39.580	10.960,80	109	60,80
3	9.786	50.583,20	39.144	11.439,20	114	39,20
4	9.672	50.560,77	38.688	11.872,77	118	72,68
5	9.554	50.595,68	38.216	12.379,68	123	79,68

Σημείωση:

Τα διάφορα στοιχεία του πίνακα υπολογίζονται όπως ακριβώς και στο προηγούμενο παράδειγμα. Π.χ. στο τέλος του β΄ εξαμήνου έχομε:

α) Ζώντες τίτλοι: 10.000 − 105 = 9.895

β) Τοκοχρεωλύσιο: 50.520 + 20 × 104 = 50.540,80

γ) Τόκοι ζώντων τίτλων: 9.895 × 100 × 0,04 = 39.580

δ) Χρεωλύσιο: 50.540,80 − 39.580 = 10.960,80

ε) Εξοφλημένες ομολογίες: 10.960,80:100 = 109 ομολογίες και 60,80 δρχ. υπόλοιπο. Το υπόλοιπο, αφού ανατοκισθεί για ένα εξάμηνο, θα προστεθεί στο τοκοχρεωλύσιο του τρίτου εξαμήνου.

3) Οι εξοφλημένες ομολογίες στην αρχή του 18ου εξαμήνου (τέλος 17ου εξαμήνου) θα υπολογισθούν με βάση τον τύπο:

$$E_\mu = N \,.\, P_{\overline{n}|\,i}\,(1 + i)^{\mu - 1}$$

Θέτομε μ = 18, N = 10.000, n = 40, i = 0,04 και έχομε:

$E_{18} = 10.000\; P_{\overline{40}|\,0{,}04}\,(1{,}04)^{17} = 10.000 \times 0{,}01052 \times 1{,}9479 \approx 205$

4) Οι ζώσες ομολογίες στην αρχή του 16ου (τέλος 15ου εξαμήνου) θα υπολογισθούν με τον τύπο:

$$N_{\mu + 1} = N - N \,.\, P_{\overline{n}|\,i}\; S_{\overline{\mu}|\,i}$$

Θέτομε μ = 15, N = 10.000, n = 40, i = 0,04 και έχομε:

$N_{16} = 10.000 - 10.000\; P_{\overline{40}|\,0{,}04}\,.\, S_{\overline{15}|\,0{,}04} =$
$10.000 - 10.000 \times 0{,}01052 \times 20.02358 = 7.894.$

5) Οι ομολογίες που έχουν εξοφληθεί μέχρι το τέλος του 7ου έτους (τέλος 14ου εξαμήνου) θα υπολογισθούν με τον τύπο:

$$M_\mu = N \,.\, P_{\overline{n}|\,i} \cdot S_{\overline{\mu}|\,i}$$

Θέτομε $\mu = 14$, $N = 10.000$, $n = 40$, $i = 0{,}04$ και έχομε:

$M_{14} = 10.000\ P_{\overline{40}|0{,}04}\ S_{\overline{14}|0{,}04} = 10.000 \times 0{,}01052 \times 18{,}2919 = 1.924.$

9.10 Ομολογιακά δάνεια εξοφλητέα τοκοχρεωλυτικώς σε τιμή διαφορετική από το άρτιο.

Τα ομολογιακά δάνεια που εξοφλούνται σε τιμή διαφορετική από το άρτιο διακρίνονται σε εκείνα που οι ομολογίες τους εξοφλούνται **πάνω από το άρτιο** και σε εκείνα που οι ομολογίες τους εξοφλούνται **κάτω από το άρτιο.** Η εξόφληση ενός ομολογιακού δανείου πάνω από την τιμή του αρτίου έχει πλεονεκτήματα και επιδρά ψυχολογικώς στο κοινό, ώστε να γίνεται εύκολα η κάλυψη του δανείου.

Η τιμή εξοφλήσεως κάθε ομολογίας, σε τιμή διαφορετική από το άρτιο, συμβολίζεται με το C΄ και επειδή ο οφειλέτης θα πληρώσει για κάθε ομολογία τόκο $C \cdot i$, το επιτόκιο που αντιστοιχεί στην τιμή εξοφλήσεως μιας ομολογίας θα είναι διαφορετικό από το επιτόκιο i και συμβολίζεται με το i΄. Το επιτόκιο i΄ πρέπει να είναι τέτοιο, ώστε να ισχύει η ισότητα: $C' \cdot i' = C \cdot i$. Λύνοντας την τελευταία σχέση ως προς i΄ βρίσκομε τον τύπο υπολογισμού του επιτοκίου της τιμής εξοφλήσεως μιας ομολογίας, δηλαδή:

$$i' = \frac{C \cdot i}{C'} \qquad (87)$$

Στα ομολογιακά δάνεια που εξοφλούνται σε τιμή διαφορετική από το άρτιο εφαρμόζονται οι τύποι των ομολογιακών δανείων που εξοφλούνται στο άρτιο, αν αντικαταστήσομε τα C και i με τα C΄ και i΄. Επομένως, τα διάφορα στοιχεία του πίνακα αποσβέσεως του δανείου θα υπολογίζονται με τους τύπους:

$$\text{Τοκοχρεωλύσιο: } R = N \cdot C'[i' + P_{\overline{n}|i'}]$$

$$\text{Χρεωλύσιο μ περιόδου: } P_\mu = N \cdot C'\ P_{\overline{n}|i'}(1 + i')^{\mu-1}$$

$$\text{Εξοφλημένοι τίτλοι: } E_\mu = N \cdot P_{\overline{n}|i'}(1 + i')^{\mu-1}$$

Ζώντες τίτλοι στην αρχή της μ + 1 περιόδου:

$$N_{\mu+1} = N - N \cdot P_{\overline{n}|i'}\ S_{\overline{\mu}|i'}$$

Παρατηρήσεις:

1) Όταν αναφέρεται ότι οι ομολογίες που κληρώνονται δεν παίρνουν τον τόκο του έτους κληρώσεως, τότε για να βρούμε την πραγματική τιμή εξοφλήσεως πρέπει να αφαιρέσομε τον τόκο $C \cdot i$ από την τιμή εξοφλήσεως.

2) Όταν αναφέρεται ότι οι ομολογίες που κληρώνονται παίρνουν και τον τόκο του έτους κληρώσεως, τότε η τιμή που δίνεται είναι η πραγματική τιμή εξοφλήσεως.

Παράδειγμα.

Ομολογιακό δάνειο 1.000.000 δρχ. σε ομολογίες των 100 δρχ. ονομαστικής αξίας, πρέπει να εξοφληθεί σε 20 χρόνια με ίσες ετήσιες τοκοχρεωλυτικές δόσεις με επιτόκιο 5%. Οι ομολογίες που κληρώνονται κάθε χρόνο εξοφλούνται στην τιμή 130 και δεν παίρνουν τον τόκο του έτους κληρώσεως. Ζητούνται:

1) Το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο, 2) ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου για τα 5 πρώτα χρόνια, 3) οι ομολογίες που θα εξοφληθούν στο τελευταίο έτος και 4) οι ζώσες ομολογίες αρχή του 13ου έτους.

Λύση:

K = 1.000.000, C = 100, N = 10.000, C' = 130, i = 0,05

Η πραγματική τιμή εξοφλήσεως είναι: C' = 130 – 100 x 0,05 = 125, άρα, το πραγματικό επιτόκιο που αντιστοιχεί στην τιμή εξοφλήσεως θα είναι:

$$i' = \frac{C \cdot i}{C'} = \frac{100 \times 0{,}05}{125} = 0{,}04$$

1) Τοκοχρεωλύσιο = $R = N \cdot C' \, [i' + P_{\overline{n}|\, i'}]$
Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και έχομε:

$$R = 10.000 \times 125 \; [0{,}04 + P_{\overline{20}|\, 0{,}04}]$$
$$= 1.250.000 \; (0{,}04 + 0{,}0336)$$
$$= 50.000 + 42.000 = 92.000$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΣΒΕΣΕΩΣ
ομολογιακού δανείου 1.000.000 δρχ. σε 20 έτη με 5%. N = 10.000 C = 100 C' = 125 i' = 0,04

Τέλος έτους	Ζώντες τίτλοι	Τοκοχρεωλύσιο	Τόκοι ζώντων τίτλων	Χρεωλύσιο	Εξοφλημένοι τίτλοι	Υπόλοιπο
1	10.000	92.000,00	50.000	42.000,00	336	Ø
2	9.664	92.000,00	48.320	43.680,00	349	55
3	9.315	92.057,20	46.575	45.482,20	363	107
4	8.952	92.111,28	44.760	47.351,28	378	101
5	8.574	92.105,04	42.870	49.235,04	393	110

Σημείωση:

Τα διάφορα στοιχεία του πίνακα υπολογίζονται ακριβώς όπως και στα ομολογιακά δάνεια που εξοφλούνται στο άρτιο. Ο υπολογισμός των τόκων γίνεται με πολλαπλασιασμό των ζώντων τίτλων με τον τόκο C . i ή C' . i' κάθε ομολογίας.

Για παράδειγμα οι τόκοι των ζώντων τίτλων του δευτέρου έτους είναι:
9.664 x 100 x 0,05 = 48.320 ή 9.664 x 125 x 0,04 = 48.320.

Είναι όμως προτιμότερο να χρησιμοποιούμε τα C' και i'.

Τα στοιχεία του πίνακα στο τρίτο έτος είναι:

α) Ζώντες τίτλοι: 9.664 – 349 = 9.315

β) Τόκοι ζώντων τίτλων: 9.315 x 125 x 0,04 = 46.575

γ) Τοκοχρεωλύσιο: 92.000 + 55 x 1,04 = 92.057,20

δ) Χρεωλύσιο: 92.057,20 – 46.575 = 45.482,20

ε) Εξοφλημένες ομολογίες: 45.482,20:125 = 363 ομολογίες και υπόλοιπο 0,8576 x 125 = 107 δρχ. το οποίο (αφού ανατοκισθεί για ένα έτος) θα προστεθεί στο τοκοχρεωλύσιο του τετάρτου έτους.

3) Οι ομολογίες που θα εξοφληθούν στο τέλος του 20ου έτους, θα είναι:

$$E_{20} = 10.000 \; P_{\overline{20}|\, 0{,}04} (1{,}04)^{19}$$

= 10.000 x 0,0336 x 2,1068 = 707.

4) Οι ζώσες ομολογίες στην αρχή του 13ου έτους (τέλος του 12ου έτους), θα είναι:

$$N_{13} = 10.000 - 10.000 \; P_{\overline{20}|\, 0{,}04} \quad S_{\overline{12}|\, 0{,}04}$$

= 10.000 – 10.000 x 0,0336 x 15,0258 = 4.951.

9.11 Λαχειοφόρα ομολογιακά δάνεια.

Μια πολύ συνηθισμένη στην πράξη μορφή δανείων είναι και τα ***λαχειοφόρα ομολογιακά δάνεια.*** Σε κάθε περίοδο κληρώσεώς τους ορισμένος αριθμός ομολογιών συνοδεύεται με ένα ποσό ως λαχείο. Το λαχείο είναι σημαντικό κίνητρο για το κοινό και γι' αυτό το λόγο τα λαχειοφόρα ομολογιακά δάνεια καλύπτονται εύκολα.

Διακρίνομε τρεις μορφές λαχειοφόρων ομολογιακών δανείων:

1) Εκείνα στα οποία οι ομολογίες που ευνοούνται στην κλήρωση παίρνουν μόνο το ποσό του λαχείου, ενώ οι υπόλοιπες δεν παίρνουν τόκο, ούτε το κεφάλαιο που αντιπροσωπεύουν.

2) Εκείνα στα οποία οι ομολογίες που κληρώνονται παίρνουν το ποσό του λαχείου, ενώ οι υπόλοιπες παίρνουν την τιμή του αρτίου.

3) Εκείνα στα οποία όλες οι ομολογίες παίρνουν τόκο στη διάρκεια του δανείου και σε κάθε κλήρωση: οι ομολογίες που κληρώνονται με λαχείο παίρνουν το ποσό του λαχείου, ενώ αυτές που κληρώνονται στο άρτιο παίρνουν την τιμή εξοφλήσεως. Στην πράξη εφαρμόζεται μόνο η τρίτη μορφή.

Στα λαχειοφόρα ομολογιακά δάνεια διακρίνομε τις εξής περιπτώσεις:

I. Όταν οι ομολογίες εξοφλούνται στο άρτιο και το δάνειο είναι λαχειοφόρο. Αν παραστήσομε με το L το ποσό που χορηγείται για λαχείο, τότε το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο θα είναι:

Τοκοχρεωλύσιο = Τόκος + Χρεωλύσιο + Λαχείο

και με σύμβολα:

$$R = N \cdot C\,[i + P_{\overline{n|}i}] + L \tag{88}$$

Η εύρεση του αριθμού των εξοφλημένων και ζώντων τίτλων γίνεται όπως ακριβώς και στα μη λαχειοφόρα ομολογιακά δάνεια, γιατί το ποσό του χρεωλυσίου δεν επηρεάζεται από το ποσό του λαχείου.

II. Όταν οι ομολογίες εξοφλούνται σε τιμή διαφορετική από το άρτιο και το δάνειο είναι λαχειοφόρο, τότε το τοκοχρεωλύσιο υπολογίζεται με βάση τον τύπο:

$$R = N \cdot C'\,[i' + P_{\overline{n|}i'}] + L \tag{89}$$

Σημείωση:

Στους τύπους (88) και (89) με το L παριστάνομε το πραγματικό ποσό του λαχείου. Επομένως, αν οι ομολογίες, που κληρώνονται με λαχείο είναι **ω** και δεν παίρνουν την τιμή εξοφλήσεώς τους, τότε το πραγματικό ποσό του λαχείου είναι:

$$L = \Lambda - C \cdot \omega \tag{90}$$

όπου: Λ = Ονομαστικό ποσό λαχείου.
C = Τιμή εξοφλήσεως ομολογιών στο άρτιο.
ω = Αριθμός ομολογιών που κληρώνονται με λαχείο.

Για την καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των λαχειοφόρων ομολογιακών δανείων, παραθέτομε τα ακόλουθα παραδείγματα:

Παράδειγμα 1ο.

Ομολογιακό δάνειο 10.000.000 δρχ. σε ομολογίες ονομαστικής αξίας 100 δρχ. πρέπει να εξοφληθεί σε 20 χρόνια με ίσα ετήσια τοκοχρεωλύσια και με επιτόκιο 5%. Οι ομολογίες που κληρωνονται εξοφλούνται στην τιμή 130 και δεν παίρνουν τον τόκο του έτους κληρώσεως. Στις 50 πρώτες ομολογίες που κληρώνονται κάθε φορά χορηγείται και λαχείο 100.000 δρχ. Οι ομολογίες που κληρωνονται με λαχείο δεν παίρνουν τον τόκο του έτους κληρώσεως. Ζητούνται: 1) Το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο, 2) ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου για τα τρία πρώτα έτη, 3) οι εξοφλημένοι τίτλοι στο τελευταίο έτος και 4) οι ζώντες τίτλοι στην αρχή του 13ου έτους.

Λύση:

K = 10.000.000, C = 100, N = 100.000, n = 20, i = 0,05, C′ = 130, ω = 50, Λ = 100.000
Η πραγματική τιμή εξοφλήσεως των ομολογιών είναι:

$$C' = C' - C \, . \, i = 130 - 100 \times 0{,}05 = 125$$

Άρα, το επιτόκιο που αντιστοιχεί στην τιμή εξοφλήσεως θα είναι:

$$i' = \frac{C \, . \, i}{C'} = \frac{100 \times 0{,}05}{125} = 0{,}04$$

Οι 100.000 δραχμές που χορηγούνται κάθε φορά για λαχείο αποτελούν το ονομαστικό ποσό του λαχείου (=Λ) και πρέπει να βρούμε το πραγματικό ποσό του λαχείου (=L). Αφού αναφέρεται ότι οι ομολογίες – αντί να θεωρηθούν ότι εξοφλούνται στην τιμή 130 και να μην πάρουν τον τόκο του έτους κληρώσεως – θεωρούνται ότι εξοφλούνται στην τιμή 125 και ότι παίρνουν και τον τόκο του έτους κληρώσεως. Συνεπώς, το πραγματικό ποσό του λαχείου θα είναι:
$L = \Lambda - (C' \, . \, \omega + C \, . \, i \, . \, \omega) = 100.000 - (125 \times 50 + 100 \times 0{,}05 \times 50)$ ή $L = 100.000 - 6.500 = 93.500$.

1) Το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο αα υπολογισθεί με βάση τον τύπο:

$$R = N \, . \, C' \, [i' + P_{\overline{n}|i'}] + L$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και έχομε:
$R = 100.000 \times 125 \, [0{,}04 + P_{\overline{20}|0{,}04}] + 93.500 = 12.500.000 \times 0{,}04 + 12.500.000 \times 0{,}033582 + 93500 = 500.000 + 419.775 + 93.500 = 1.013.275.$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΣΒΕΣΕΩΣ

ομολογιακού δανείου 10.000.000 δρχ. με 5% σε 20 έτη. C = 100, C′= 125, i′= 0,04, L = 93.500

Τέλος έτους	Ζώντες τίτλοι στην αρχή του έτους	Τοκοχρεωλύσιο	Τόκοι ζώντων τίτλων	Λαχείο (L)	Χρεωλύσιο	Εξοφλ. τίτλοι σε τιμή 125	Υπόλοιπο
1	100.000	1.013.275	500.000	93.500	419.775	3.358	25
2	96.642	1.013.301	483.310	93.500	436.591	3.492	91
3	93.150	1.013.370	465.750	93.500	454.120	3.632	120
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.

2) $E_{20} = 100.000 \, P_{\overline{20}|0{,}04} \, (1{,}04)^{19} = 100.000 \times 0{,}033582 \times 2{,}1068 = 7.075$

3) $N_{13} = 100.000 - 100.000 \, P_{\overline{20}|0{,}04} \, S_{\overline{12}|0{,}04} = 100.000 - 100.000 \times 0{,}0336 \times 15{,}0258 = 49.513.$

Παράδειγμα 2ο.

Ομολογιακό δάνειο 1.000.000 δρχ. σε ομολογίες ονομαστικής αξίας 100 δρχ. πρέπει να εξοφληθεί σε 20 χρόνια με ίσα εξαμηνιαία τοκοχρεωλύσια με επιτόκιο 5%. Οι ομολογίες που κληρώνονται εξοφλούνται στην τιμή 127,50 δρχ. και δεν παίρνουν τον τόκο της περιόδου εξοφλήσεως. Κάθε εξάμηνο χορηγείται λαχείο 10.000 δρχ. το οποίο κατανέμεται στις 10 πρώτες ομολογίες της κληρώσεως. Οι ομολογίες που κληρώνονται με λαχείο δεν παίρνουν την τιμή εξοφλήσεως, ούτε τον τόκο της περιόδου κληρώσεως. Ζητούνται: 1) το εξαμηνιαίο τοκοχρεωλύσιο, 2) ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου για τα πέντε πρώτα εξάμηνα, 3) οι ομολογίες που θα εξοφληθούν στο 8ο εξάμηνο και 4) οι ζώσες ομολογίες στην αρχή του 12ου εξαμήνου.

Λύση:

$K = 1.000.000$, $C = 100$, $N = 10.000$, $i = 0{,}05$, $n = 20 \times 2 = 40$ εξάμ. $C' = 127{,}50$, $\Lambda = 10.000$, $\omega = 10$.

Η πραγματική τιμή εξοφλήσεως των ομολογιών ειναι:

$$C' = 127{,}50 - 100 \times 0{,}025 = 125$$

Το πραγματικό επιτόκιο που αντιστοιχεί στην τιμή εξοφλήσεως των ομολογιών που κληρώνονται κάθε εξάμηνο είναι:

$$i' = \frac{C \,.\, i}{C'} = \frac{100 \times 0{,}025}{125} = 0{,}02$$

Το πραγματικό ποσό που καταβάλλεται για λαχείο είναι:

$$L = \Lambda - (C' \,.\, \omega + C' \,.\, i' \,.\, \omega)$$

Δηλαδή:

$$L = 10.000 - (125 \times 10 + 125 \times 0{,}02 \times 10) = 8.725.$$

1) Το εξαμηνιαίο τοκοχρεωλύσιο θα υπολογισθεί με βάση τον τύπο:

$$R = N \,.\, C\,[i' + P_{\overline{n}|i'}] + L$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και έχομε:
$R = 10.000 \times 125\,[0{,}02 + P_{\overline{40}|0{,}02}] + 8.725 = 1.250.000 \times 0{,}02 + 1.250.000 \times 0{,}0166 + 8.725$
$= 25.000 + 20.750 + 8.725 = 54.475.$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΣΒΕΣΕΩΣ

ομολογιακού δανείου 1.000.000 δρχ. σε 20 έτη με 5%. C = 100, N = 10.000, C' = 125, L = 8.725

Τέλος εξαμ.	Ζώντες τίτλοι στην αρχή του εξαμ.	Τοκοχρεωλύσιο	Τόκοι ζώντων τίτλων	Λαχείο (L)	Χρεωλύσιο	Εξοφλ. τίτλοι	Υπόλοιπο
1	10.000	54.475,00	25.000,0	8.725	20.750,00	166	Ø
2	9.834	54.475,00	24.585,0	8.725	21.165,00	169	40,00
3	9.665	54.515,80	24.162,5	8.725	21.628,30	173	3,30
4	9.492	54.519,17	23.730,0	8.725	22.064,17	176	54,17
5	9.316	54.584,62	23.290,0	8.725	22.569,62	180	69,62

2) Οι ομολογίες που θα εξοφληθούν στο όγδοο εξάμηνο είναι:

$$E_8 = 10.000\ P_{\overline{40}|0{,}02}\ (1{,}02)^7 = 10.000 \times 0{,}0166 \times 1{,}1487 = 190$$

3) Οι ζώσες ομολογίες στο τέλος του 11ου εξαμήνου (αρχή 12ου εξαμήνου) είναι:
$N_{12} = 10.000 - 10.000\ P_{\overline{40}|0{,}02}\ S_{\overline{11}|0{,}02} = 10.000 - 10.000 \times 0{,}0116 \times 12{,}1687 = 7.980.$

9.12 Προβλήματα δανείων.

1. Δάνειο 400.000 δρχ. πρέπει να εξοφληθεί σε 15 χρόνια με 6%. Να βρεθει το ποσό του εξοφλητικού αποθέματος, όταν το επιτόκιο ανασυστάσεως είναι 4,5% και όταν οι τόκοι πληρώνονται ή όχι κάθε χρόνο.
(Απ. 19.244 - 46.120)

2. Δανείσθηκε κάποιος 100.000 δρχ. με 4,5% και για να τις εξοφλήσει καταθέτει κάθε χρόνο 8000 δρχ. με ανατοκισμό προς 4%. Σε πόσα χρόνια θα σχηματισθεί το ποσό που δανείσθηκε, αν οι τόκοι πληρώνονται κάθε χρόνο;
(Απ. $n = 10{,}33$)

3. Δάνειο 50.000 δρχ. πρέπει να εξοφληθεί σε 10 έτη με ετήσιο επιτόκιο 6%. Ποιο είναι το χρεωλύσιο: α) Αν οι τόκοι πληρώνονται κάθε χρόνο και β) αν και οι τόκοι και το κεφάλαιο πληρωθούν κατά τη λήξη του δανείου; Επιτόκιο ανασυστάσεως 4%.
(Απ. 4165 - 7.458,70)

4. Δάνειο 1.000.000 δρχ. πρέπει να εξοφληθεί σε 20 χρόνια με ίσες ετήσιες τοκοχρεωλυτικές δόσεις προς 5%. Ζητούνται: 1) Το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο. 2) Ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου για τα 4 πρώτα έτη με τη μέθοδο: α) Του σταθερού χρεωλυσίου και β) του προοδευτικού χρεωλυσίου.
(Απ. 80.242)

5. Δάνειο 100.000 δρχ. πρέπει να εξοφληθεί σε 10 χρόνια με ίσες εξαμηνιαίες δόσεις με ετήσιο επιτόκιο 10%. Ζητούνται: 1) Το εξαμηνιαίο τοκοχρεωλύσιο. 2) Ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου για τα 3 πρώτα εξάμηνα με τη μέθοδο: α) Του σταθερού χρεωλυσίου και β) του προοδευτικού χρεωλυσίου. 3) Το χρεωλύσιο του 15ου εξαμήνου. 4) Το εξοφλημένο ποσό στο τέλος του 6ου έτους. 5) Το ανεξόφλητο υπόλοιπο στο τέλος του 4ου έτους. 6) Το σύνολο των τόκων που θά πληρώσει ὁ ὀφειλέτης.
(Απ. 8.024 - 5.987 - 48.133 - 71.123,5 - 60.480)

6. Η βιομηχανία «ΒΗΤΑ» θα χρειασθεί 5.000.000 δρχ. την 1η Ιουνίου 1985 για να αντικαταστήσει τμήμα του μηχανικού εξοπλισμού της. Για να συγκεντρώσει το πιο πάνω ποσό την 1.6.1985, η βιομηχανία πρέπει να καταθέτει κάθε χρόνο σε μια τράπεζα ορισμένα χρηματικά ποσά προς 4%. Αν η πρώτη κατάθεση γίνει την 1η Ιουνίου 1980 και η τελευταία την 1η Ιουνίου 1985, ποιό πρέπει να είναι το μέγεθος κάθε καταθέσεως;
(Απ. 753.809,50)

7. Δάνειο 100.000 δρχ. πρέπει να εξοφληθεί σε 20 ίσες ετήσιες δόσεις· κάθε δόση είναι 8.718,45 δρχ. Με ποιό επιτόκιο υπολογίσθηκαν οι δόσεις;
(Απ. 6%)

8. Ο Α, για να αγοράσει μηχανήματα, δανείσθηκε 180.000 δρχ. Το δάνειο πρέπει να εξοφληθεί με 10 ετήσιες δόσεις· κάθε δόση είναι 21.643,46 δρχ. Με ποιό επιτόκιο υπολογίσθηκε κάθε δόση;
(Απ. 0,035)

9. Δάνειο 600.000 δρχ. πρέπει να εξοφληθεί σε 10 χρόνια με ίσες εξαμηνιαίες δόσεις με εξαμηνιαίο επιτόκιο 8%. Ζητούνται: 1) Το εξαμηνιαίο τοκοχρεωλύσιο, 2) τα χρεωλύσια του 3ου και 5ου εξαμήνου και 3) ο τόκος του 5ου εξαμήνου.
(Απ. 61.110 - 15.291,5 - 17.836 - 43.274)

10. Δάνειο 5.000.000 δρχ. πρέπει να εξοφληθεί σε 8 χρόνια με ίσες εξαμηνιαίες τοκοχρεωλυτικές δόσεις με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 14%. Ζητούνται: 1) Το εξαμηνιαίο τοκοχρεωλύσιο. 2) Ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου για τα 5 πρώτα εξάμηνα με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεωλυσίου. 3) Τα χρεωλύσια του 8ου και 12ου εξαμήνου. 4) Ο τόκος του 8ου εξαμήνου. 5) Το σύνολο των τόκων που θα πληρώσει ο λήπτης του δανείου.
(Απ. 529.300 - 287.916 - 377.399,6 - 241.384 - 3.468.800)

11. Δήμος συνάπτει δάνειο 50.000.000 δρχ., το οποίο πρέπει να εξοφληθεί σε 12χρόνια με ίσες ετήσιες δόσεις με ετήσιο επιτόκιο 8%. Ζητούνται: 1) Το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο, 2) ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου για τα 5 πρώτα έτη με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεωλυσίου, 3) το ανεξόφλητο υπόλοιπο στο τέλος του 8ου έτους και 4) το σύνολο των τόκων.
(Απ. 6.634.750 - 21.975.219 - 29.617.000)

12. Δάνειο 3.000.000 δρχ. πρέπει να εξοφληθεί σε 10 χρόνια με ίσες εξαμηνιαίες τοκοχρεωλυτικές δόσεις προς ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 12%. Ζητούνται: 1) Το εξαμηνιαίο τοκοχρεωλύσιο, 2) ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου για τα 4 πρώτα εξάμηνα με τη γαλλική μέθοδο, 3) ο τόκος του 6ου εξαμήνου, 4) το χρεωλύσιο του 13ου εξαμήνου, 5) το εξοφλημένο ποσό και το ανεξόφλητο υπόλοιπο στο τέλος του13ου εξαμήνου.
(Απ. 261.540 - 152.421 - 164.075 - 1.539.649,5 - 1.460.350,5)

13. Η απόσβεση δανείου 200.000 δρχ. προς 5% σε 10 έτη γίνεται με τη γαλλική μέθοδο. Ποια είναι η ετήσια δόση και ποιό το υπόλοιπο του χρέους μετά την πληρωμή και της 8ης δόσεως;
(Απ. 25.900 - 48.169)

14. Να βρεθεί το ποσό του δανείου, το οποίο πρέπει να εξοφληθεί σε 10 χρόνια, με τη γαλλική μέθοδο, προς 8%, αν ο τόκος του ογδόου τοκοχρεωλυσίου είναι 30.725 δρχ.
(Απ. 1.000.000)

15. Δάνειο 350.000 δρχ. πρόκειται να εξοφληθεί σε 8 χρόνια με ίσες εξαμηνιαίες δόσεις, με ετήσιο επιτόκιο 7%. Ζητούνται: 1) Η εξαμηνιαία δόση, 2) το υπόλοιπο του δανείου στο τέλος του 5ου έτους και 3) ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου για τα 4 πρώτα εξάμηνα με τη γαλλική μέθοδο.
(Απ. 28.940 - 154.206)

16. Η Α.Ε. «ΑΠΟΛΛΩΝ» πήρε δάνειο 1.000.000 δρχ., το οποίο πρέπει να εξοφλήσει σε 5 χρόνια, με επιτόκιο 7%. Η απόσβεση του δανείου γίνεται με την αμερικανική μέθοδο με επιτόκιο τοποθετήσεως 3%. Να υπολογισθούν οι ετήσιες υποχρεώσεις της εταιρείας και να κατασκευασθεί ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου.
(Απ. 258.354,57)

17. Η Α.Ε. «ΩΜΕΓΑ» πήρε δάνειο 2.000.000 δρχ. το οποίο πρέπει να εξοφλήσει σε 5 χρόνια με ίσες ετήσιες δόσεις, προς επιτόκιο δανείου 6% και τοποθετήσεως 4%. Η απόσβεση του δανείου γίνεται με τη μέθοδο του Sinking Fund. Να υπολογισθεί η ετήσια δόση και να κατασκευασθεί ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου.
(Απ. 489.254)

18. Η Α.Ε. «ΔΕΛΤΑ» πηρε δάνειο 1.000.000 δρχ. και πρέπει να το εξοφλήσει σε 8 χρόνια με ίσα εξαμηνιαία τοκοχρεωλύσια προς ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 8% και τοποθετήσεως 7%. Να υπολογισθεί το εξαμηνιαίο τοκοχρεωλύσιο και να κατασκευασθεί ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου με τη μέθοδο του Sinking Fund.
(Απ. 87.684,80)

19. Να κατασκευασθεί ο πίνακας αποσβέσεως δανείου 1.500.000 δρχ. με τη μέθοδο Sinking Fund, αν είναι γνωστό ότι: το δάνειο θα εξοφληθεί σε 8 χρόνια, το επιτόκιο του δανείου είναι 4% και το επιτόκιο ανασυστάσεως $2^3/_4$%.
(Απ. 230.187)

20. Στο τοκοχρεωλύσιο δανείου (που εξοφλείται με τη μέθοδο του Sinking Fund) ο τόκος με 6,8% είναι 38.080 δρχ. Να βρεθεί το ποσό του δανείου και το ετήσιο χρεωλύσιο, αν το επιτόκιο ανασυστάσεως είναι 4,5% και η διάρκεια του δανείου 6 χρόνια.
(Απ. 560.000 - 83.372,40)

21. Η Α.Ε.«ΕΡΜΗΣ» πήρε δάνειο 1.000.000 δρχ., το οποίο πρέπει να εξοφλήσει σε 10 χρόνια με επιτόκιο δανείου 7% και ανασυστάσεως κεφαλαίου 5%. Η απόσβεση του δανείου γίνεται με την αμερικανική μέθοδο (Sinking Fund). Να υπολογισθεί η ετήσια δόση που θα πληρώνει η εταιρεία και να κατασκευασθεί ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου.
(Απ. 149.504)

22. Το θεραπευτικό κέντρο «ΑΣΚΛΗΠΙΟΣ», για την αγορά διαγνωστικών και χειρουργικών εργα-

λείων πήρε δάνειο 10.000.000 δρχ. και πρέπει να το εξοφλήσει σε 5 χρόνια, με επιτόκιο δανείου 6,5% και ανασυστάσεως 4,5%. Να κατασκευασθεί ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου: 1) με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεωλυσίου και 2) με τη μέθοδο του Sinking Fund.

23. Ο βιομήχανος Β θέλει να δανεισθεί 2.000.000 δρχ. για 6 χρόνια. Η Τράπεζα Χ δανείζει με $5^1/_2$%, και το δάνειο εξοφλείται με ίσες ετήσιες δόσεις. Η Τράπεζα Ψ δανείζει με 5% αν οι τόκοι πληρώνονται κάθε χρόνο και το δάνειο επιστραφεί στο τέλος του 6ου έτους, αφού ο Β κάνει ίσες ετήσιες καταθέσεις προς 3%. Ποιό σχέδιο δανεισμού είναι φθηνότερο και πόσα χρήματα εξοικονομεί ο Β αν δανεισθεί;

(Απ. $R_x = 400.358$, $R_\psi = 409.195$. Το σχέδιο δανεισμού της Τράπεζας Χ είναι φθηνότερο κατά 8837 δρχ.)

24. Θέλει κάποιος να συγκεντρώσει 305.390 δρχ. για να αρχίσει μια επιχείρηση. Αν καταθέτει, στο τέλος κάθε εξαμήνου, 10.000 δρχ. με εξαμηνιαίο επιτόκιο 5%, πόσος χρόνος θα χρειασθεί για να συγκεντρώσει τις 305.390 δραχμές;

(Απ. 19 εξάμηνα)

25. Σε δάνειο 500.000 δρχ. πληρώνονται κάθε χρόνο οι τόκοι με 6% και σχηματίζεται Sinking fund με 3%. Αν το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο είναι 73.615 δρχ., να βρεθεί η διάρκεια του δανείου.

(Απ. $n = 10$)

26. Η Α.Ε. «ΕΣΤΙΑ» θέλει να δανεισθεί 1.000.000 δραχμές και να τις εξοφλήσει σε 10 χρόνια με ίσες εξαμηνιαίες δόσεις. Στην Α.Ε. προσφέρονται δύο τρόποι δανεισμού: 1) Να δανεισθεί με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 6% και η απόσβεση του δανείου να γίνει με την προοδευτική μέθοδο. 2) Να δανεισθεί με επιτόκιο δανείου 6% και ανασυστάσεως κεφαλαίου 5% και η απόσβεση του δανείου να γίνει με τη μέθοδο του Sinking Fund. Ποιό τρόπο δανεισμού θα προτιμήσει η Α.Ε.;

27. Η Α.Ε. «ΑΠΟΛΛΩΝ» σύναψε ομολογιακό δάνειο 1.000.000 δρχ., το οποίον αποτελείται από 10.000 ομολογίες των 100 δρχ., ονομαστικής αξίας και το οποίο θα εξοφληθεί στο άρτιο με 3% σε 15 χρόνια με ίσα ετήσια τοκοχρεωλύσια. Ζητούνται: 1) Το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο, 2) ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου για τα τέσσερα πρώτα έτη, 3) οι ομολογίες πού θα εξοφληθούν με το όγδοο χρεωλύσιο, 4) οι ομολογίες που θα έχουν εξοφληθεί πέντε χρόνια προτού λήξει το δάνειο και 5) οι ζώσες ομολογίες 5 έτη προτού εξοφληθεί το δάνειο.

(Απ. 83.766 — 661 — 6.164 — 3.836)

28. Ομολογιακό δάνειο 10.000.000 δρχ. διαιρεμένο σε 100.000 ομολογίες των 100 δρχ. ονομαστικής αξίας, πρόκειται να εξοφληθεί σε 20 χρόνια με ίσα εξαμηνιαία τοκοχρεωλύσια με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 5%. Οι ομολογίες εξοφλούνται στην τιμή 125. Ζητούνται: 1) Το εξαμηνιαίο τοκοχρεωλύσιο, 2) ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου για τα τρία πρώτα εξάμηνα, 4) Οι ομολογίες που θα έχουν εξοφληθεί μετά 3 έτη και 6 μήνες από τη σύναψη του δανείου και 4) οι ζώσες ομολογίες μετά 3 έτη και 6 μήνες από τότε που έγινε η σύναψη του δανείου.

(Απ. 456.937 — 1.901 — 87.696)

29. Ομολογιακό δάνειο σε 10.000 ομολογίες των 500 ονομαστικής αξίας, πρόκειται να εξοφληθεί σε 20 χρόνια με ίσα ετήσια τοκοχρεωλύσια με επιτόκιο 5%. Οι ομολογίες θα εξοφληθούν στην τιμή 650 και δεν παίρνουν τον τόκο του έτους κληρώσεως. Να υπολογισθούν: 1) Το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο, 2) ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου για τα τρία πρώτα έτη και 3) οι ζώσες ομολογίες στην αρχή του 13ου έτους.

(Απ. 459.887 — 4.956)

30. Ομολογιακό δάνειο 1.000.000 δρχ. σε ομολογίες των 100 δρχ., πρόκειται να εξοφληθεί σε 20 χρόνια με ισα ετήσια τοκοχρεωλύσια προς επιτόκιο 5%. Οι ομολογίες που κληρώνονται εξοφλούνται στην τιμή 130 και δεν παίρνουν τον τόκο του έτους κληρώσεως. Κάθε χρόνο χορηγούνται 30.000 δραχμές για λαχείο, οι οποίες κατανέμονται στις 10 πρώτες ομολογίες της κληρώσεως. Οι ομολογίες που κληρώνονται με λαχείο δεν παίρνουν την τιμή εξοφλήσεως, ούτε τον τόκο του έτους κληρώσεως. Ζητούνται: 1) Το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο, 2) ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου για τα τρία πρώτα χρόνια, 3) οι εξοφλούμενες ομολογίες κατά το 5ο έτος, 4) οι ομο-

λογίες που θα έχουν εξοφληθεί μετά από 3 χρόνια και 5) οι ζώσες ομολογίες στην αρχή του 5ου έτους.

(Απ. 120.676 – 392 – 1.048 – 8.574)

31. Η Α.Ε. «ΠΕΛΟΨ» συνάπτει ομολογιακό δάνειο 15.000.000 δρχ. διαιρεμένο σε 50.000 ομολογίες των 300 δρχ. ονομαστικής αξίας, με ετήσιο επιτόκιο 7% και πρόκειται να το εξοφλήσει σε 15 χρόνια με ετήσιες κληρώσεις. Ζητούνται: 1) Το χρεωλύσιο του 6ου έτους, 2) οι εξοφλημένοι τίτλοι του 6ου έτους και 3) οι ζώντες τίτλοι στην αρχή του 10ου έτους.

(Απ. 837.112 – 2.790 – 26.170)

32. Η Δ.Ε.Η σύναψε ομολογιακό δάνειο 20.000.000 δρχ., διαιρεμένο σε 100.000 ομολογίες των 200 δρχ. ονομαστικής αξίας. Το δάνειο πρόκειται να εξοφληθεί σε 5 χρόνια με επιτόκιο 7% και τα τοκομερίδια θα εξοφλούνται στο τέλος κάθε έτους. Να κατασκευασθεί ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου.

33. Ο Ο.Τ.Ε σύναψε ομολογιακό δάνειο 80.000.000 δρχ., σε ομολογίες ονομαστικής αξίας 800 δρχ. Το δάνειο θά εξοφληθεί σε 15 χρόνια με ίσες ετήσιες κληρώσεις με ετήσιο επιτόκιο 5%. Οι ομολογίες θα εξοφληθούν στην τιμή των 1000 δρχ. Ζητούνται: 1) Το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο, 2) ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου για τα 5 πρώτα έτη, 3) οι εξοφλημένες ομολογίες στο τέλος του 10ου έτους και 4) οι ζώσες ομολογίες στην αρχή του 11ου έτους.

(Απ. 8.994.110 – 7.108 – 40.040)

34. Ομολογιακό δάνειο 10.000.000 δρχ. σε ομολογίες ονομαστικής αξίας 100 δρχ. τιμής εκδόσεως 90 δρχ. και τιμής εξοφλήσεως 125 δρχ., πρόκειται να εξοφληθεί σε 30 χρόνια με επιτόκιο 3% και με ετήσιο λαχείο 100.000 δρχ. Ζητούνται: 1) Το ετήσιο τοκοχρεωλύσιο και 2) ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου για τα 5 πρώτα χρόνια.

(Απ. 652.228)

35. Η Α.Ε. «ΕΡΜΗΣ» σύναψε ομολογιακό δάνειο 40.000.000 δρχ. διαιρεμένο σε 200.000 ομολογίες των 200 δρχ. ονομαστικής αξίας. Το δάνειο θα εξοφληθεί σε 15 χρόνια με εξαμηνιαίες κληρώσεις και με εξαμηνιαίο επιτόκιο 6%. Ζητούνται: 1) Ο τόκος του 5ου εξαμήνου, 2) το χρεωλύσιο του 12ου εξαμήνου, 3) οι εξοφλημένες ομολογίες του 12ου εξαμήνου και 4) οι ζώσες ομολογίες στην αρχή του 15ου εξαμήνου.

(Απ. 2.267.184 – 960.540 – 4.802 – 146.832)

ΠΙΝΑΚΕΣ

ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ-ΡΑΝΤΩΝ-ΧΡΕΩΛΥΣΙΩΝ

Οι πίνακες αυτοί έχουν ληφθεί από το βιβλίο: «CRC Standard Mathematical Tables» 18th Edition του W.H. Beyer (CRC Press, Inc. 18901 Cranwood Parkway, Cleveland, Ohio, U.S.A.) με την άδεια του εκδότη.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ
ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΔΗΓΙΕΣ

Ο Πίνακας Ι παρέχει την τελική αξία κεφαλαίου μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί n ακέραιες χρονικές περιόδους. Δηλαδή ο Πίνακας Ι δίνει τα εξαγόμενα του διωνύμου $(1+i)^n$ για τα εξής i και n:

$i = 0{,}0025$ έως $i = 0{,}03$ και $n = 1$ έως $n = 100$
$i = 0{,}035$ έως $i = 0{,}20$ και $n = 1$ έως $n = 50$

Ο Πίνακας ΙΙ παρέχει την τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί μ/12 κάθε περιόδου. Δηλαδή ο Πίνακας ΙΙ δίνει τα εξαγόμενα του διωνύμου $(1+i)^{\mu/12}$ για $\mu = 1$ έως $\mu = 11$ και για $i = 0{,}0025$ έως $i = 0{,}12$.

Ο Πίνακας ΙΙΙ δίνει την παρούσα (αρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά n χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα. Δηλαδή ο Πίνακας ΙΙΙ παρέχει τα εξαγόμενα της παραστάσεως:

$$U^n = (1+i)^{-n} = \frac{1}{(1+i)^n}$$

για τα εξής i και n:

$i = 0{,}0025$ έως $i = 0{,}03$ καί $n = 1$ έως $n = 100$
$i = 0{,}035$ έως $i = 0{,}20$ καί $n = 1$ έως $n = 50$

Ο Πίνακας IV παρέχει την αρχική (παρούσα) αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων μιας νομισματικής μονάδας. Δηλαδή ο Πίνακας IV δίνει τα εξαγόμενα της παραστάσεως:

$$\alpha_{\overline{n}|i} = \frac{1-U^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

για τα ακόλουθα i και n:

$i = 0{,}0025$ έως $i = 0{,}03$ και $n = 1$ έως $n = 100$
$i = 0{,}035$ έως $i = 0{,}08$ και $n = 1$ έως $n = 50$

Αν τώρα θέλομε να βρούμε την τιμή της $\alpha_{n\,i}$, για $i = 0{,}09$, $0{,}10$, ..., $0{,}20$, τότε χρησιμοποιούμε τον Πίνακα ΙΙΙ. Αν π.χ. θέλομε να βρούμε την τιμή της παραστάσεως:

$$\alpha_{\overline{20}|0,12} = \frac{1-U^{20}}{0{,}12} \qquad (1)$$

τότε εργαζόμαστε ως εξής: Στον Πίνακα ΙΙΙ, με $i = 0{,}12$ καί $n = 20$, βρίσκομε: $U^{20} = 0{,}10366677$.

Αντικαθιστώντας τώρα στη σχέση (1) βρίσκομε:

$$a_{\overline{20}|0,12} = \frac{1 - 0,10366677}{0,12} = 7,469444$$

ΠΙΝΑΚΑΣ V **221**

Ο Πίνακας V παρέχει την τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων μιας νομισματικής μονάδας. Δηλαδή ο Πίνακας V δίνει τα εξαγόμενα της παραστάσεως:

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

για τα ακόλουθα i και n:

$i = 0,0025$ έως $i = 0,03$ και $n = 1$ έως $n = 100$

$i = 0,035$ έως $i = 0,08$ και $n = 1$ έως $n = 50$

Αν τώρα θέλομε να βρούμε την τιμή της $S_{n\,i}$ για $i = 0,09,\ 0,10,\ \ldots,\ 0,20$, τότε χρησιμοποιούμε τον Πίνακα Ι. Αν π.χ. θέλομε να βρούμε την τιμή της παραστάσεως:

$$s_{\overline{20}|0,12} = \frac{(1,12)^{20} - 1}{0,12} \qquad (2)$$

τότε εργαζόμαστε ως εξής: Στον Πίνακα Ι με $i = 0,12$ και $n = 20$ βρίσκομε: $(1,12)^{20} = 9,6462926$.

Αντικαθιστώντας τώρα στη σχέση (2) βρίσκομε:

$$s_{\overline{20}|0,12} = \frac{9,6462926 - 1}{0,12} = 72,052438$$

ΠΙΝΑΚΑΣ VI **229**

Ο Πίνακας VI παρέχει το χρεωλύσιο μιας νομισματικής μονάδας, δηλαδή το ποσό που πρέπει να καταβάλλεται στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου, για να εξοφλείται δάνειο μιας νομισματικής μονάδας. Ο Πίνακας VI δίνει τα εξαγόμενα της παραστάσεως:

$$P_{\overline{n}|i} = \frac{1}{S_{n\,i}} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

για $i = 0,0025$ έως $i = 0,08$ και $n = 1$ έως $n = 100$.

Αν τώρα θέλομε να βρούμε την τιμή του $P_{n\,i}$ για $i = 0,09,\ 0,10,\ \ldots,\ 0,20$, τότε χρησιμοποιούμε τον Πίνακα Ι. Αν π.χ. θέλομε να βρούμε την τιμή της παραστάσεως:

$$P_{\overline{20}|0,12} = \frac{0,12}{(1,12)^{20} - 1} \qquad (3)$$

τότε εργαζόμαστε ως εξής: Στον Πίνακα Ι με $i = 0,12$ και $n = 20$ βρίσκομε: $(1,12)^{20} = 9,6462926$.

Αντικαθιστούμε πλέον στη σχέση (3) και βρίσκομε:

$$P_{\overline{20}|0,12} = \frac{0,12}{9,6462926} = 0,0138787$$

ΠΙΝΑΚΑΣ VII **237**

Ο Πίνακας VII δίνει (αθροιστικώς) τον αριθμό των ημερών του έτους και χρησιμεύει για τον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών. Για τα δίσεκτα έτη, κάθε αριθμός του πίνακα, από την 1η Μαρτίου και έπειτα, πρέπει να αυξάνεται κατά μία μονάδα.

ΠΙΝΑΚΑΣ I. $(1+i)^n$

Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί n χρονικές περιόδους.

n	.0025 ($\frac{1}{4}$%)	.004167 ($\frac{5}{12}$%)	.005 ($\frac{1}{2}$%)	.005833 ($\frac{7}{12}$%)	.0075 ($\frac{3}{4}$%)
1	1.0025 0000	1.0041 6667	1.0050 0000	1.0058 3333	1.0075 0000
2	1.0050 0625	1.0083 5069	1.0100 2500	1.0117 0069	1.0150 5625
3	1.0075 1877	1.0125 5216	1.0150 7513	1.0176 0228	1.0226 6917
4	1.0100 3756	1.0167 7112	1.0201 5050	1.0235 3830	1.0303 3919
5	1.0125 6266	1.0210 0767	1.0252 5125	1.0295 0894	1.0380 6673
6	1.0150 9406	1.0252 6187	1.0303 7751	1.0355 1440	1.0458 5224
7	1.0176 3180	1.0295 3379	1.0355 2940	1.0415 5490	1.0536 9613
8	1.0201 7588	1.0338 2352	1.0407 0704	1.0476 3064	1.0615 9885
9	1.0227 2632	1.0381 3111	1.0459 1058	1.0537 4182	1.0695 6084
10	1.0252 8313	1.0424 5666	1.0511 4013	1.0598 8865	1.0775 8255
11	1.0278 4634	1.0468 0023	1.0563 9583	1.0660 7133	1.0856 6441
12	1.0304 1596	1.0511 6190	1.0616 7781	1.0722 9008	1.0938 0690
13	1.0329 9200	1.0555 4174	1.0669 8620	1.0785 4511	1.1020 1045
14	1.0355 7448	1.0599 3983	1.0723 2113	1.0848 3662	1.1102 7553
15	1.0381 6341	1.0643 5625	1.0776 8274	1.0911 6483	1.1186 0259
16	1.0407 5882	1.0687 9106	1.0830 7115	1.0975 2996	1.1269 9211
17	1.0433 6072	1.0732 4436	1.0884 8651	1.1039 3222	1.1354 4455
18	1.0459 6912	1.0777 1621	1.0939 2894	1.1103 7182	1.1439 6039
19	1.0485 8404	1.0822 0670	1.0993 9858	1.1168 4899	1.1525 4009
20	1.0512 0550	1.0867 1589	1.1048 9558	1.1233 6395	1.1611 8414
21	1.0538 3352	1.0912 4387	1.1104 2006	1.1299 1690	1.1698 9302
22	1.0564 6810	1.0957 9072	1.1159 7216	1.1365 0808	1.1786 6722
23	1.0591 0927	1.1003 5652	1.1215 5202	1.1431 3771	1.1875 0723
24	1.0617 5704	1.1049 4134	1.1271 5978	1.1498 0602	1.1964 1353
25	1.0644 1144	1.1095 4526	1.1327 9558	1.1565 1322	1.2053 8663
26	1.0670 7247	1.1141 6836	1.1384 5955	1.1632 5955	1.2144 2703
27	1.0697 4015	1.1188 1073	1.1441 5185	1.1700 4523	1.2235 3523
28	1.0724 1450	1.1234 7244	1.1498 7261	1.1768 7049	1.2327 1175
29	1.0750 9553	1.1281 5358	1.1556 2197	1.1837 3557	1.2419 5709
30	1.0777 8327	1.1328 5422	1.1614 0008	1.1906 4069	1.2512 7176
31	1.0804 7773	1.1375 7444	1.1672 0708	1.1975 8610	1.2606 5630
32	1.0831 7892	1.1423 1434	1.1730 4312	1.2045 7202	1.2701 1122
33	1.0858 8687	1.1470 7398	1.1789 0833	1.2115 9869	1.2796 3706
34	1.0886 0159	1.1518 5346	1.1848 0288	1.2186 6634	1.2892 3434
35	1.0913 2309	1.1566 5284	1.1907 2689	1.2257 7523	1.2989 0359
36	1.0940 5140	1.1614 7223	1.1966 8052	1.2329 2559	1.3086 4537
37	1.0967 8653	1.1663 1170	1.2026 6393	1.2401 1765	1.3184 6021
38	1.0995 2850	1.1711 7133	1.2086 7725	1.2473 5167	1.3283 4866
39	1.1022 7732	1.1760 5121	1.2147 2063	1.2546 2789	1.3383 1128
40	1.1050 3301	1.1809 5142	1.2207 9424	1.2619 4655	1.3483 4861
41	1.1077 9559	1.1858 7206	1.2268 9821	1.2693 0791	1.3584 6123
42	1.1105 6508	1.1908 1319	1.2330 3270	1.2767 1220	1.3686 4969
43	1.1133 4149	1.1957 7491	1.2391 9786	1.2841 5969	1.3789 1456
44	1.1161 2485	1.2007 5731	1.2453 9385	1.2916 5062	1.3892 5642
45	1.1189 1516	1.2057 6046	1.2516 2082	1.2991 8525	1.3996 7584
46	1.1217 1245	1.2107 8446	1.2578 7892	1.3067 6383	1.4101 7341
47	1.1245 1673	1.2158 2940	1.2641 6832	1.3143 8662	1.4207 4971
48	1.1273 2802	1.2208 9536	1.2704 8916	1.3220 5388	1.4314 0533
49	1.1301 4634	1.2259 8242	1.2768 4161	1.3297 6586	1.4421 4087
50	1.1329 7171	1.2310 9068	1.2832 2581	1.3375 2283	1.4529 5693

ΠΙΝΑΚΑΣ I. $(1+i)^n$

Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί n χρονικές περιόδους.

n	.0025 ($\frac{1}{4}$%)	.004167 ($\frac{5}{12}$%)	.005 ($\frac{1}{2}$%)	.005833 ($\frac{7}{12}$%)	.0075 ($\frac{3}{4}$%)
50	1.1329 7171	1.2310 9068	1.2832 2581	1.3375 2283	1.4529 5693
51	1.1358 0414	1.2362 2022	1.2896 4194	1.3453 2504	1.4638 5411
52	1.1386 4365	1.2413 7114	1.2960 9015	1.3531 7277	1.4748 3301
53	1.1414 9026	1.2465 4352	1.3025 7060	1.3610 6628	1.4858 9426
54	1.1443 4398	1.2517 3745	1.3090 8346	1.3690 0583	1.4970 3847
55	1.1472 0484	1.2569 5302	1.3156 2887	1.3769 9170	1.5082 6626
56	1.1500 7285	1.2621 9033	1.3222 0702	1.3850 2415	1.5195 7825
57	1.1529 4804	1.2674 4946	1.3288 1805	1.3931 0346	1.5309 7509
58	1.1558 3041	1.2727 3050	1.3354 6214	1.4012 2990	1.5424 5740
59	1.1587 1998	1.2780 3354	1.3421 3946	1.4094 0374	1.5540 2583
60	1.1616 1678	1.2833 5868	1.3488 5015	1.4176 2526	1.5656 8103
61	1.1645 2082	1.2887 0601	1.3555 9440	1.4258 9474	1.5774 2363
62	1.1674 3213	1.2940 7561	1.3623 7238	1.4342 1246	1.5892 5431
63	1.1703 5071	1.2994 6760	1.3691 8424	1.4425 7870	1.6011 7372
64	1.1732 7658	1.3048 8204	1.3760 3016	1.4509 9374	1.6131 8252
65	1.1762 0977	1.3103 1905	1.3829 1031	1.4594 5787	1.6252 8139
66	1.1791 5030	1.3157 7872	1.3898 2486	1.4679 7138	1.6374 7100
67	1.1820 9817	1.3212 6113	1.3967 7399	1.4765 3454	1.6497 5203
68	1.1850 5342	1.3267 6638	1.4037 5785	1.4851 4766	1.6621 2517
69	1.1880 1605	1.3322 9458	1.4107 7664	1.4938 1102	1.6745 9111
70	1.1909 8609	1.3378 4580	1.4178 3053	1.5025 2492	1.6871 5055
71	1.1939 6356	1.3434 2016	1.4249 1968	1.5112 8965	1.6998 0418
72	1.1969 4847	1.3490 1774	1.4320 4428	1.5201 0550	1.7125 5271
73	1.1999 4084	1.3546 3865	1.4392 0450	1.5289 7279	1.7253 9685
74	1.2029 4069	1.3602 8298	1.4464 0052	1.5378 9179	1.7383 3733
75	1.2059 4804	1.3659 5082	1.4536 3252	1.5468 6283	1.7513 7486
76	1.2089 6291	1.3716 4229	1.4609 0069	1.5558 8620	1.7645 1017
77	1.2119 8532	1.3773 5746	1.4682 0519	1.5649 6220	1.7777 4400
78	1.2150 1528	1.3830 9645	1.4755 4622	1.5740 9115	1.7910 7708
79	1.2180 5282	1.3888 5935	1.4829 2395	1.5832 7334	1.8045 1015
80	1.2210 9795	1.3946 4627	1.4903 3857	1.5925 0910	1.8180 4398
81	1.2241 5070	1.4004 5729	1.4977 9026	1.6017 9874	1.8316 7931
82	1.2272 1108	1.4062 9253	1.5052 7921	1.6111 4257	1.8454 1691
83	1.2302 7910	1.4121 5209	1.5128 0561	1.6205 4090	1.8592 5753
84	1.2333 5480	1.4180 3605	1.5203 6964	1.6299 9405	1.8732 0196
85	1.2364 3819	1.4239 4454	1.5279 7148	1.6395 0235	1.8872 5098
86	1.2395 2928	1.4298 7764	1.5356 1134	1.6490 6612	1.9014 0536
87	1.2426 2811	1.4358 3546	1.5432 8940	1.6586 8567	1.9156 6590
88	1.2457 3468	1.4418 1811	1.5510 0585	1.6683 6134	1.9300 3339
89	1.2488 4901	1.4478 2568	1.5587 6087	1.6780 9344	1.9445 0865
90	1.2519 7114	1.4538 5829	1.5665 5468	1.6878 8232	1.9590 9246
91	1.2551 0106	1.4599 1603	1.5743 8745	1.6977 2830	1.9737 8565
92	1.2582 3882	1.4659 9902	1.5822 5939	1.7076 3172	1.9885 8905
93	1.2613 8441	1.4721 0735	1.5901 7069	1.7175 9290	2.0035 0346
94	1.2645 3787	1.4782 4113	1.5981 2154	1.7276 1219	2.0185 2974
95	1.2676 9922	1.4844 0047	1.6061 1215	1.7376 8993	2.0336 6871
96	1.2708 6847	1.4905 8547	1.6141 4271	1.7478 2646	2.0489 2123
97	1.2740 4564	1.4967 9624	1.6222 1342	1.7580 2211	2.0642 8814
98	1.2772 3075	1.5030 3289	1.6303 2449	1.7682 7724	2.0797 7030
99	1.2804 2383	1.5092 9553	1.6384 7611	1.7785 9219	2.0953 6858
100	1.2836 2489	1.5155 8426	1.6466 6849	1.7889 6731	2.1110 8384

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι. $(1 + i)^n$

Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί n χρονικές περιόδους.

n	.01 (1%)	.01125 ($1\frac{1}{8}$%)	.0125 ($1\frac{1}{4}$%)	.015 ($1\frac{1}{2}$%)	.0175 ($1\frac{3}{4}$%)
1	1.0100 0000	1.0112 5000	1.0125 0000	1.0150 0000	1.0175 0000
2	1.0201 0000	1.0226 2656	1.0251 5625	1.0302 2500	1.0353 0625
3	1.0303 0100	1.0341 3111	1.0379 7070	1.0456 7838	1.0534 2411
4	1.0406 0401	1.0457 6509	1.0509 4534	1.0613 6355	1.0718 5903
5	1.0510 1005	1.0575 2994	1.0640 8215	1.0772 8400	1.0906 1656
6	1.0615 2015	1.0694 2716	1.0773 8318	1.0934 4326	1.1097 0235
7	1.0721 3535	1.0814 5821	1.0908 5047	1.1098 4491	1.1291 2215
8	1.0828 5671	1.0936 2462	1.1044 8610	1.1264 9259	1.1488 8178
9	1.0936 8527	1.1059 2789	1.1182 9218	1.1433 8998	1.1689 8721
10	1.1046 2213	1.1183 6958	1.1322 7083	1.1605 4083	1.1894 4449
11	1.1156 6835	1.1309 5124	1.1464 2422	1.1779 4894	1.2102 5977
12	1.1268 2503	1.1436 7444	1.1607 5452	1.1956 1817	1.2314 3931
13	1.1380 9328	1.1565 4078	1.1752 6395	1.2135 5244	1.2529 8950
14	1.1494 7421	1.1695 5186	1.1899 5475	1.2317 5573	1.2749 1682
15	1.1609 6896	1.1827 0932	1.2048 2918	1.2502 3207	1.2972 2786
16	1.1725 7864	1.1960 1480	1.2198 8955	1.2689 8555	1.3199 2935
17	1.1843 0443	1.2094 6997	1.2351 3817	1.2880 2033	1.3430 2811
18	1.1961 4748	1.2230 7650	1.2505 7739	1.3073 4064	1.3665 3111
19	1.2081 0895	1.2368 3611	1.2662 0961	1.3269 5075	1.3904 4540
20	1.2201 9004	1.2507 5052	1.2820 3723	1.3468 5501	1.4147 7820
21	1.2323 9194	1.2648 2146	1.2980 6270	1.3670 5783	1.4395 3681
22	1.2447 1586	1.2790 5071	1.3142 8848	1.3875 6370	1.4647 2871
23	1.2571 6302	1.2934 4003	1.3307 1709	1.4083 7715	1.4903 6146
24	1.2697 3465	1.3079 9123	1.3473 5105	1.4295 0281	1.5164 4279
25	1.2824 3200	1.3227 0613	1.3641 9294	1.4509 4535	1.5429 8054
26	1.2952 5631	1.3375 8657	1.3812 4535	1.4727 0953	1.5699 8269
27	1.3082 0888	1.3526 3442	1.3985 1092	1.4948 0018	1.5974 5739
28	1.3212 9097	1.3678 5156	1.4159 9230	1.5172 2218	1.6254 1290
29	1.3345 0388	1.3832 3989	1.4336 9221	1.5399 8051	1.6538 5762
30	1.3478 4892	1.3988 0134	1.4516 1336	1.5630 8022	1.6828 0013
31	1.3613 2740	1.4145 3785	1.4697 5853	1.5865 2642	1.7122 4913
32	1.3749 4068	1.4304 5140	1.4881 3051	1.6103 2432	1.7422 1349
33	1.3886 9009	1.4465 4398	1.5067 3214	1.6344 7918	1.7727 0223
34	1.4025 7699	1.4628 1760	1.5255 6629	1.6589 9637	1.8037 2452
35	1.4166 0276	1.4792 7430	1.5446 3587	1.6838 8132	1.8352 8970
36	1.4307 6878	1.4959 1613	1.5639 4382	1.7091 3954	1.8674 0727
37	1.4450 7647	1.5127 4519	1.5834 9312	1.7347 7663	1.9000 8689
38	1.4595 2724	1.5297 6357	1.6032 8678	1.7607 9828	1.9333 3841
39	1.4741 2251	1.5469 7341	1.6233 2787	1.7872 1025	1.9671 7184
40	1.4888 6373	1.5643 7687	1.6436 1946	1.8140 1841	2.0015 9734
41	1.5037 5237	1.5819 7611	1.6641 6471	1.8412 2868	2.0366 2530
42	1.5187 8989	1.5997 7334	1.6849 6677	1.8688 4712	2.0722 6624
43	1.5339 7779	1.6177 7079	1.7060 2885	1.8968 7982	2.1085 3090
44	1.5493 1757	1.6359 7071	1.7273 5421	1.9253 3302	2.1454 3019
45	1.5648 1075	1.6543 7538	1.7489 4614	1.9542 1301	2.1829 7522
46	1.5804 5885	1.6729 8710	1.7708 0797	1.9835 2621	2.2211 7728
47	1.5962 6344	1.6918 0821	1.7929 4306	2.0132 7910	2.2600 4789
48	1.6122 2608	1.7108 4105	1.8153 5485	2.0434 7829	2.2995 9872
49	1.6283 4834	1.7300 8801	1.8380 4679	2.0741 3046	2.3398 4170
50	1.6446 3182	1.7495 5150	1.8610 2237	2.1052 4242	2.3807 8893

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι. $(1+i)^n$

Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί n χρονικές περιόδους.

n	.01 (1%)	.01125 (1⅛%)	.0125 (1¼%)	.015 (1½%)	.0175 (1¾%)
50	1.6446 3182	1.7495 5150	1.8610 2237	2.1052 4242	2.3807 8893
51	1.6610 7814	1.7692 3395	1.8842 8515	2.1368 2106	2.4224 5274
52	1.6776 8892	1.7891 3784	1.9078 3872	2.1688 7337	2.4648 4566
53	1.6944 6581	1.8092 6564	1.9316 8670	2.2014 0647	2.5079 8046
54	1.7114 1047	1.8296 1988	1.9558 3279	2.2344 2757	2.5518 7012
55	1.7285 2457	1.8502 0310	1.9802 8070	2.2679 4398	2.5965 2785
56	1.7458 0982	1.8710 1788	2.0050 3420	2.3019 6314	2.6419 6708
57	1.7632 6792	1.8920 6684	2.0300 9713	2.3364 9259	2.6882 0151
58	1.7809 0060	1.9133 5259	2.0554 7335	2.3715 3998	2.7352 4503
59	1.7987 0960	1.9348 7780	2.0811 6676	2.4071 1308	2.7831 1182
60	1.8166 9670	1.9566 4518	2.1071 8135	2.4432 1978	2.8318 1628
61	1.8348 6367	1.9786 5744	2.1335 2111	2.4798 6807	2.8813 7306
62	1.8532 1230	2.0009 1733	2.1601 9013	2.5170 6609	2.9317 9709
63	1.8717 4443	2.0234 2765	2.1871 9250	2.5548 2208	2.9831 0354
64	1.8904 6187	2.0461 9121	2.2145 3241	2.5931 4442	3.0353 0785
65	1.9093 6649	2.0692 1087	2.2422 1407	2.6320 4158	3.0884 2574
66	1.9284 6015	2.0924 8949	2.2702 4174	2.6715 2221	3.1424 7319
67	1.9477 4475	2.1160 2999	2.2986 1976	2.7115 9504	3.1974 6647
68	1.9672 2220	2.1398 3533	2.3273 5251	2.7522 6896	3.2534 2213
69	1.9868 9442	2.1639 0848	2.3564 4442	2.7935 5300	3.3103 5702
70	2.0067 6337	2.1882 5245	2.3858 9997	2.8354 5629	3.3682 8827
71	2.0268 3100	2.2128 7029	2.4157 2372	2.8779 8814	3.4272 3331
72	2.0470 9931	2.2377 6508	2.4459 2027	2.9211 5796	3.4872 0990
73	2.0675 7031	2.2629 3994	2.4764 9427	2.9649 7533	3.5482 3607
74	2.0882 4601	2.2883 9801	2.5074 5045	3.0094 4996	3.6103 3020
75	2.1091 2847	2.3141 4249	2.5387 9358	3.0545 9171	3.6735 1098
76	2.1302 1975	2.3401 7659	2.5705 2850	3.1004 1059	3.7377 9742
77	2.1515 2195	2.3665 0358	2.6026 6011	3.1469 1674	3.8032 0888
78	2.1730 3717	2.3931 2675	2.6351 9336	3.1941 2050	3.8697 6503
79	2.1947 6754	2.4200 4942	2.6681 3327	3.2420 3230	3.9374 8592
80	2.2167 1522	2.4472 7498	2.7014 8494	3.2906 6279	4.0063 9192
81	2.2388 8237	2.4748 0682	2.7352 5350	3.3400 2273	4.0765 0378
82	2.2612 7119	2.5026 4840	2.7694 4417	3.3901 2307	4.1478 4260
83	2.2838 8390	2.5308 0319	2.8040 6222	3.4409 7492	4.2204 2984
84	2.3067 2274	2.5592 7473	2.8391 1300	3.4925 8954	4.2942 8737
85	2.3297 8997	2.5880 6657	2.8746 0191	3.5449 7838	4.3694 3740
86	2.3530 8787	2.6171 8232	2.9105 3444	3.5981 5306	4.4459 0255
87	2.3766 1875	2.6466 2562	2.9469 1612	3.6521 2535	4.5237 0584
88	2.4003 8494	2.6764 0016	2.9837 5257	3.7069 0723	4.6028 7070
89	2.4243 8879	2.7065 0966	3.0210 4948	3.7625 1084	4.6834 2093
90	2.4486 3267	2.7369 5789	3.0588 1260	3.8189 4851	4.7653 8080
91	2.4731 1900	2.7677 4867	3.0970 4775	3.8762 3273	4.8487 7496
92	2.4978 5019	2.7988 8584	3.1357 6085	3.9343 7622	4.9336 2853
93	2.5228 2869	2.8303 7331	3.1749 5786	3.9933 9187	5.0199 6703
94	2.5480 5698	2.8622 1501	3.2146 4483	4.0532 9275	5.1078 1645
95	2.5735 3755	2.8944 1492	3.2548 2789	4.1140 9214	5.1972 0324
96	2.5992 7293	2.9269 7709	3.2955 1324	4.1758 0352	5.2881 5429
97	2.6252 6565	2.9599 0559	3.3367 0716	4.2384 4057	5.3806 9699
98	2.6515 1831	2.9932 0452	3.3784 1600	4.3020 1718	5.4748 5919
99	2.6780 3349	3.0268 7807	3.4206 4620	4.3665 4744	5.5706 6923
100	2.7048 1383	3.0609 3045	3.4634 0427	4.4320 4565	5.6681 5594

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι. $(1 + i)^n$

Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί n χρονικές περιόδους.

n	.02 (2%)	.0225 (2¼%)	.025 (2½%)	.0275 (2¾%)	.03 (3%)
1	1.0200 0000	1.0225 0000	1.0250 0000	1.0275 0000	1.0300 0000
2	1.0404 0000	1.0455 0625	1.0506 2500	1.0557 5625	1.0609 0000
3	1.0612 0800	1.0690 3014	1.0768 9063	1.0847 8955	1.0927 2700
4	1.0824 3216	1.0930 8332	1.1038 1289	1.1146 2126	1.1255 0881
5	1.1040 8080	1.1176 7769	1.1314 0821	1.1452 7334	1.1592 7407
6	1.1261 6242	1.1428 2544	1.1596 9342	1.1767 6836	1.1940 5230
7	1.1486 8567	1.1685 3901	1.1886 8575	1.2091 2949	1.2298 7387
8	1.1716 5938	1.1948 3114	1.2184 0290	1.2423 8055	1.2667 7008
9	1.1950 9257	1.2217 1484	1.2488 6297	1.2765 4602	1.3047 7318
10	1.2189 9442	1.2492 0343	1.2800 8454	1.3116 5103	1.3439 1638
11	1.2433 7431	1.2773 1050	1.3120 8666	1.3477 2144	1.3842 3387
12	1.2682 4179	1.3060 4999	1.3448 8882	1.3847 8378	1.4257 6089
13	1.2936 0663	1.3354 3611	1.3785 1104	1.4228 6533	1.4685 3371
14	1.3194 7876	1.3654 8343	1.4129 7382	1.4619 9413	1.5125 8972
15	1.3458 6834	1.3962 0680	1.4482 9817	1.5021 9896	1.5579 6742
16	1.3727 8571	1.4276 2146	1.4845 0562	1.5435 0944	1.6047 0644
17	1.4002 4142	1.4597 4294	1.5216 1826	1.5859 5595	1.6528 4763
18	1.4282 4625	1.4925 8716	1.5596 5872	1.6295 6973	1.7024 3306
19	1.4568 1117	1.5261 7037	1.5986 5019	1.6743 8290	1.7535 0605
20	1.4859 4740	1.5605 0920	1.6386 1644	1.7204 2843	1.8061 1123
21	1.5156 6634	1.5956 2066	1.6795 8185	1.7677 4021	1.8602 9457
22	1.5459 7967	1.6315 2212	1.7215 7140	1.8163 5307	1.9161 0341
23	1.5768 9926	1.6682 3137	1.7646 1068	1.8663 0278	1.9735 8651
24	1.6084 3725	1.7057 6658	1.8087 2595	1.9176 2610	2.0327 9411
25	1.6406 0599	1.7441 4632	1.8539 4410	1.9703 6082	2.0937 7793
26	1.6734 1811	1.7833 8962	1.9002 9270	2.0245 4575	2.1565 9127
27	1.7068 8648	1.8235 1588	1.9478 0002	2.0802 2075	2.2212 8901
28	1.7410 2421	1.8645 4499	1.9964 9502	2.1374 2682	2.2879 2768
29	1.7758 4469	1.9064 9725	2.0464 0739	2.1962 0606	2.3565 6551
30	1.8113 6158	1.9493 9344	2.0975 6758	2.2566 0173	2.4272 6247
31	1.8475 8882	1.9932 5479	2.1500 0677	2.3186 5828	2.5000 8035
32	1.8845 4059	2.0381 0303	2.2037 5694	2.3824 2138	2.5750 8276
33	1.9222 3140	2.0839 6034	2.2588 5086	2.4479 3797	2.6523 3524
34	1.9606 7603	2.1308 4945	2.3153 2213	2.5152 5626	2.7319 0530
35	1.9998 8955	2.1787 9356	2.3732 0519	2.5844 2581	2.8138 6245
36	2.0398 8734	2.2278 1642	2.4325 3532	2.6554 9752	2.8982 7833
37	2.0806 8509	2.2779 4229	2.4933 4870	2.7285 2370	2.9852 2668
38	2.1222 9879	2.3291 9599	2.5556 8242	2.8035 5810	3.0747 8348
39	2.1647 4477	2.3816 0290	2.6195 7448	2.8806 5595	3.1670 2698
40	2.2080 3966	2.4351 8897	2.6850 6384	2.9598 7399	3.2620 3779
41	2.2522 0046	2.4899 8072	2.7521 9043	3.0412 7052	3.3598 9893
42	2.2972 4447	2.5460 0528	2.8209 9520	3.1249 0546	3.4606 9589
43	2.3431 8936	2.6032 9040	2.8915 2008	3.2108 4036	3.5645 1677
44	2.3900 5314	2.6618 6444	2.9638 0808	3.2991 3847	3.6714 5227
45	2.4378 5421	2.7217 5639	3.0379 0328	3.3898 6478	3.7815 9584
46	2.4866 1129	2.7829 9590	3.1138 5086	3.4830 8606	3.8950 4372
47	2.5363 4352	2.8456 1331	3.1916 9713	3.5788 7093	4.0118 9503
48	2.5870 7039	2.9096 3961	3.2714 8956	3.6772 8988	4.1322 5188
49	2.6388 1179	2.9751 0650	3.3532 7680	3.7784 1535	4.2562 1944
50	2.6915 8803	3.0420 4640	3.4371 0872	3.8823 2177	4.3839 0602

ΠΙΝΑΚΑΣ · Ι. $(1 + i)^n$

Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί n χρονικές περιόδους.

n	.02 (2%)	.0225 (2¼%)	.025 (2½%)	.0275 (2¾%)	.03 (3%)
50	2.6915 8803	3.0420 4640	3.4371 0872	3.8823 2177	4.3839 0602
51	2.7454 1979	3.1104 9244	3.5230 3644	3.9890 8562	4.5154 2320
52	2.8003 2819	3.1804 7852	3.6111 1235	4.0987 8547	4.6508 8590
53	2.8563 3475	3.2520 3929	3.7013 9016	4.2115 0208	4.7904 1247
54	2.9134 6144	3.3252 1017	3.7939 2491	4.3273 1838	4.9341 2485
55	2.9717 3067	3.4000 2740	3.8887 7303	4.4463 1964	5.0821 4859
56	3.0311 6529	3.4765 2802	3.9859 9236	4.5685 9343	5.2346 1305
57	3.0917 8859	3.5547 4990	4.0856 4217	4.6942 2975	5.3916 5144
58	3.1536 2436	3.6347 3177	4.1877 8322	4.8233 2107	5.5534 0098
59	3.2166 9685	3.7165 1324	4.2924 7780	4.9559 6239	5.7200 0301
60	3.2810 3079	3.8001 3479	4.3997 8975	5.0922 5136	5.8916 0310
61	3.3466 5140	3.8856 3782	4.5097 8449	5.2322 8827	6.0683 5120
62	3.4135 8443	3.9730 6467	4.6225 2910	5.3761 7620	6.2504 0173
63	3.4818 5612	4.0624 5862	4.7380 9233	5.5240 2105	6.4379 1379
64	3.5514 9324	4.1538 6394	4.8565 4464	5.6759 3162	6.6310 5120
65	3.6225 2311	4.2473 2588	4.9779 5826	5.8320 1974	6.8299 8273
66	3.6949 7357	4.3428 9071	5.1024 0721	5.9924 0029	7.0348 8222
67	3.7688 7304	4.4406 0576	5.2299 6739	6.1571 9130	7.2459 2868
68	3.8442 5050	4.5405 1939	5.3607 1658	6.3265 1406	7.4633 0654
69	3.9211 3551	4.6426 8107	5.4947 3449	6.5004 9319	7.6872 0574
70	3.9995 5822	4.7471 4140	5.6321 0286	6.6792 5676	7.9178 2191
71	4.0795 4939	4.8539 5208	5.7729 0543	6.8629 3632	8.1553 5657
72	4.1611 4038	4.9631 6600	5.9172 2806	7.0516 6706	8.4000 1727
73	4.2443 6318	5.0748 3723	6.0651 5876	7.2455 8791	8.6520 1778
74	4.3292 5045	5.1890 2107	6.2167 8773	7.4448 4158	8.9115 7832
75	4.4158 3546	5.3057 7405	6.3722 0743	7.6495 7472	9.1789 2567
76	4.5041 5216	5.4251 5396	6.5315 1261	7.8599 3802	9.4542 9344
77	4.5942 3521	5.5472 1993	6.6948 0043	8.0760 8632	9.7379 2224
78	4.6861 1991	5.6720 3237	6.8621 7044	8.2981 7869	10.0300 5991
79	4.7798 4231	5.7996 5310	7.0337 2470	8.5263 7861	10.3309 6171
80	4.8754 3916	5.9301 4530	7.2095 6782	8.7608 5402	10.6408 9056
81	4.9729 4794	6.0635 7357	7.3898 0701	9.0017 7751	10.9601 1727
82	5.0724 0690	6.2000 0397	7.5745 5219	9.2493 2639	11.2889 2079
83	5.1738 5504	6.3395 0406	7.7639 1599	9.5036 8286	11.6275 8842
84	5.2773 3214	6.4821 4290	7.9580 1389	9.7650 3414	11.9764 1607
85	5.3828 7878	6.6279 9112	8.1569 6424	10.0335 7258	12.3357 0855
86	5.4905 3636	6.7771 2092	8.3608 8834	10.3094 9583	12.7057 7981
87	5.6003 4708	6.9296 0614	8.5699 1055	10.5930 0696	13.0869 5320
88	5.7123 5402	7.0855 2228	8.7841 5832	10.8843 1465	13.4795 6180
89	5.8266 0110	7.2449 4653	9.0037 6228	11.1836 3331	13.8839 4865
90	5.9431 3313	7.4079 5782	9.2288 5633	11.4911 8322	14.3004 6711
91	6.0619 9579	7.5746 3688	9.4595 7774	11.8071 9076	14.7294 8112
92	6.1832 3570	7.7450 6621	9.6960 6718	12.1318 8851	15.1713 6556
93	6.3069 0042	7.9193 3020	9.9384 6886	12.4655 1544	15.6265 0652
94	6.4330 3843	8.0975 1512	10.1869 3058	12.8083 1711	16.0953 0172
95	6.5616 9920	8.2797 0921	10.4416 0385	13.1605 4584	16.5781 6077
96	6.6929 3318	8.4660 0267	10.7026 4395	13.5224 6085	17.0755 0559
97	6.8267 9184	8.6564 8773	10.9702 1004	13.8943 2852	17.5877 7076
98	6.9633 2768	8.8512 5871	11.2444 6530	14.2764 2255	18.1154 0388
99	7.1025 9423	9.0504 1203	11.5255 7693	14.6690 2417	18.6588 6600
100	7.2446 4612	9.2540 4630	11.8137 1635	15.0724 2234	19.2186 3198

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι. $(1+i)^n$

Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί n χρονικές περιόδους.

n	.035 (3½%)	.04 (4%)	.045 (4½%)	.05 (5%)	.055 (5½%)
1	1.0350 0000	1.0400 0000	1.0450 0000	1.0500 0000	1.0550 0000
2	1.0712 2500	1.0816 0000	1.0920 2500	1.1025 0000	1.1130 2500
3	1.1087 1788	1.1248 6400	1.1411 6613	1.1576 2500	1.1742 4138
4	1.1475 2300	1.1698 5856	1.1925 1860	1.2155 0625	1 2388 2465
5	1.1876 8631	1.2166 5290	1.2461 8194	1.2762 8156	1.3069 6001
6	1.2292 5533	1.2653 1902	1.3022 6012	1.3400 9564	1.3788 4281
7	1.2722 7926	1.3159 3178	1.3608 6183	1.4071 0042	1.4546 7916
8	1.3168 0904	1.3685 6905	1.4221 0061	1.4774 5544	1.5346 8651
9	1.3628 9735	1.4233 1181	1.4860 9514	1.5513 2822	1.6190 9427
10	1.4105 9876	1.4802 4428	1.5529 6942	1.6288 9463	1.7081 4446
11	1.4599 6972	1.5394 5406	1.6228 5305	1.7103 3936	1.8020 9240
12	1.5110 6866	1.6010 3222	1 6958 8143	1.7958 5633	1.9012 0749
13	1.5639 5606	1 6650 7351	1.7721 9610	1.8856 4914	2.0057 7390
14	1.6186 9452	1.7316 7645	1.8519 4492	1.9799 3160	2.1160 9146
15	1.6753 4883	1.8009 4351	1.9352 8244	2.0789 2818	2.2324 7649
16	1.7339 8604	1.8729 8125	2.0223 7015	2.1828 7459	2.3552 6270
17	1.7946 7555	1.9479 0050	2.1133 7681	2.2920 1832	2.4848 0215
18	1.8574 8920	2.0258 1652	2 2084 7877	2.4066 1923	2.6214 6627
19	1.9225 0132	2.1068 4918	2.3078 6031	2.5269 5020	2.7656 4691
20	1.9897 8886	2.1911 2314	2.4117 1402	2.6532 9771	2.9177 5749
21	2.0594 3147	2.2787 6807	2.5202 4116	2.7859 6259	3.0782 3415
22	2.1315 1158	2.3699 1879	2.6336 5201	2.9252 6072	3.2475 3703
23	2.2061 1448	2.4647 1554	2.7521 6635	3.0715 2376	3.4261 5157
24	2.2833 2849	2.5633 0416	2.8760 1383	3.2250 9994	3.6145 8990
25	2.3632 4498	2.6658 3633	3.0054 3446	3.3863 5494	3.8133 9235
26	2.4459 5856	2.7724 6978	3.1406 7901	3.5556 7269	4.0231 2893
27	2.5315 6711	2.8833 6858	3.2820 0956	3.7334 5632	4.2444 0102
28	2.6201 7196	2.9987 0332	3.4296 9999	3.9201 2914	4.4778 4307
29	2.7118 7798	3.1186 5145	3.5840 3649	4.1161 3560	4.7241 2444
30	2.8067 9370	3.2433 9751	3.7453 1813	4.3219 4238	4.9839 5129
31	2.9050 3148	3.3731 3341	3.9138 5745	4.5380 3949	5.2580 6861
32	3.0067 0759	3.5080 5875	4.0899 8104	4.7649 4147	5.5472 6238
33	3.1119 4235	3.6483 8110	4.2740 3018	5.0031 8854	5.8523 6181
34	3.2208 6033	3.7943 1634	4.4663 6154	5.2533 4797	6.1742 4171
35	3.3335 9045	3.9460 8899	4.6673 4781	5.5160 1537	6.5138 2501
36	3.4502 6611	4.1039 3255	4 8773 7846	5.7918 1614	6.8720 8538
37	3.5710 2543	4.2680 8986	5.0968 6049	6.0814 0694	7.2500 5008
38	3.6960 1132	4.4388 1345	5.3262 1921	6.3854 7729	7.6488 0283
39	3.8253 7171	4.6163 6599	5.5658 9908	6.7047 5115	8.0694 8699
40	3.9592 5972	4.8010 2063	5.8163 6454	7.0399 8871	8.5133 0877
41	4.0978 3381	4.9930 6145	6.0781 0094	7.3919 8815	8.9815 4076
42	4.2412 5799	5.1927 8391	6.3516 1548	7.7615 8756	9.4755 2550
43	4.3897 0202	5.4004 9527	6 6374 3818	8.1496 6693	9.9966 7940
44	4.5433 4160	5.6165 1508	6.9361 2290	8.5571 5028	10.5464 9677
45	4.7023 5855	5.8411 7568	7.2482 4843	8.9850 0779	11.1265 5409
46	4.8669 4110	6.0748 2271	7.5744 1961	9 4342 5818	11.7385 1456
47	5.0372 8404	6.3178 1562	7.9152 6849	9.9059 7109	12.3841 3287
48	5.2135 8898	6.5705 2824	8.2714 5557	10.4012 6965	13.0652 6017
49	5.3960 6459	6.8333 4937	8.6436 7107	10.9213 3313	13.7838 4948
50	5.5849 2686	7.1066 8335	9.0326 3627	11.4673 9979	14.5419 6120

ΠΙΝΑΚΑΣ I. $(1+i)^n$

Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί n χρονικές περιόδους.

n	.06 (6%)	.065 (6½%)	.07 (7%)	.075 (7½%)	.08 (8%)
1	1.0600 0000	1.0650 0000	1.0700 0000	1.0750 0000	1.0800 0000
2	1.1236 0000	1.1342 2500	1.1449 0000	1.1556 2500	1.1664 0000
3	1.1910 1600	1.2079 4963	1.2250 4300	1.2422 9688	1.2597 1200
4	1.2624 7696	1.2864 6635	1.3107 9601	1.3354 6914	1 3604 8896
5	1.3382 2558	1.3700 8666	1.4025 5173	1.4356 2933	1.4693 2808
6	1.4185 1911	1.4591 4230	1.5007 3035	1.5433 0153	1.5868 7432
7	1.5036 3026	1.5539 8655	1.6057 8148	1.6590 4914	1.7138 2427
8	1.5938 4807	1.6549 9567	1.7181 8618	1.7834 7783	1.8509 3021
9	1.6894 7896	1.7625 7039	1.8384 5921	1.9172 3866	1.9990 0463
10	1.7908 4770	1.8771 3747	1.9671 5136	2.0610 3156	2.1589 2500
11	1.8982 9856	1.9991 5140	2.1048 5195	2.2156 0893	2.3316 3900
12	2.0121 9647	2.1290 9624	2.2521 9159	2.3817 7960	2.5181 7012
13	2.1329 2826	2.2674 8750	2.4098 4500	2.5604 1307	2.7196 2373
14	2.2609 0396	2.4148 7418	2.5785 3415	2.7524 4405	2.9371 9362
15	2.3965 5819	2.5718 4101	2.7590 3154	2.9588 7735	3.1721 6911
16	2.5403 5168	2.7390 1067	2.9521 6375	3.1807 9315	3.4259 4264
17	2.6927 7279	2.9170 4637	3.1588 1521	3.4193 5264	3.7000 1805
18	2.8543 3915	3.1066 5438	3.3799 3228	3.6758 0409	3.9960 1950
19	3.0255 9950	3.3085 8691	3.6165 2754	3.9514 8940	4.3157 0106
20	3.2071 3547	3.5236 4506	3.8696 8446	4.2478 5110	4.6609 5714
21	3.3995 6360	3.7526 8199	4.1405 6237	4.5664 3993	5.0338 3372
22	3.6035 3742	3.9966 0632	4.4304 0174	4.9089 2293	5.4365 4041
23	3.8197 4966	4.2563 8573	4.7405 2986	5.2770 9215	5.8714 6365
24	4.0489 3464	4 5330 5081	5.0723 6695	5.6728 7406	6.3411 8074
25	4.2918 7072	4.8276 9911	5.4274 3264	6.0983 3961	6.8484 7520
26	4.5493 8296	5.1414 9955	5.8073 5292	6.5557 1508	7.3963 5321
27	4.8223 4594	5.4756 9702	6.2138 6763	7.0473 9371	7.9880 6147
28	5.1116 8670	5.8316 1733	6.6488 3836	7.5759 4824	8.6271 0639
29	5.4183 8790	6.2106 7245	7.1142 5705	8.1441 4436	9.3172 7490
30	5.7434 9117	6.6143 6616	7.6122 5504	8.7549 5519	10.0626 5689
31	6.0881 0064	7.0442 9996	8.1451 1290	9.4115 7683	10.8676 6944
32	6.4533 8668	7.5021 7946	8.7152 7080	10.1174 4509	11.7370 8300
33	6.8405 8988	7.9898 2113	9.3253 3975	10.8762 5347	12.6760 4964
34	7.2510 2528	8.5091 5950	9.9781 1354	11.6919 7248	13.6901 3361
35	7.6860 8679	9.0622 5487	10.6765 8148	12.5688 7042	14.7853 4429
36	8.1472 5200	9.6513 0143	11.4239 4219	13.5115 3570	15.9681 7184
37	8.6360 8712	10.2786 3603	12.2236 1814	14.5249 0088	17.2456 2558
38	9.1542 5235	10.9467 4737	13.0792 7141	15.6142 6844	18.6252 7563
39	9.7035 0749	11.6582 8595	13.9948 2041	16.7853 3858	20.1152 9768
40	10.2857 1794	12.4160 7453	14.9744 5784	18.0442 3897	21.7245 2150
41	10.9028 6101	13.2231 1938	16.0226 6989	19.3975 5689	23.4624 8322
42	11.5570 3267	14.0826 2214	17.1442 5678	20.8523 7366	25.3394 8187
43	12.2504 5463	14.9979 9258	18.3443 5475	22.4163 0168	27.3666 4042
44	12.9854 8191	15.9728 6209	19.6284 5959	24.0975 2431	29.5559 7166
45	13.7646 1083	17.0110 9813	21.0024 5176	25.9048 3863	31.9204 4939
46	14.5904 8748	18.1168 1951	22.4726 2338	27.8477 0153	34.4740 8534
47	15.4659 1673	19.2944 1278	24.0457 0702	29.9362 7915	37.2320 1217
48	16.3938 7173	20.5485 4961	25.7289 0651	32.1815 0008	40.2105 7314
49	17.3775 0403	21.8842 0533	27.5299 2997	34.5951 1259	43.4274 1899
50	18.4201 5427	23.3066 7868	29.4570 2506	37.1897 4603	46.9016 1251

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι. $(1 + i)^n$

Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί n χρονικές περιόδους.

n	8%	8,5%	9%	9,5%	10%	10,5%
	0.0800	0.0850	0.0900	0.0950	0.1000	0.1050
1	1.0800000	1.0850000	1.0900000	1.0950000	1.1000000	1.1050000
2	1.1664000	1.1772250	1.1881000	1.1990250	1.2100000	1.2210250
3	1.2597120	1.2772891	1.2950290	1.3129324	1.3310000	1.3492326
4	1.3604890	1.3858587	1.4115816	1.4376609	1.4641000	1.4909020
5	1.4693281	1.5036567	1.5386239	1.5742387	1.6105100	1.6474467
6	1.5868743	1.6314675	1.6771001	1.7237914	1.7715610	1.8204287
7	1.7138242	1.7701422	1.8280391	1.8875516	1.9487171	2.0115737
8	1.8509302	1.9206043	1.9925626	2.0668690	2.1435888	2.2227889
9	1.9990046	2.0838557	2.1718932	2.2632215	2.3579476	2.4561817
10	2.1589250	2.2609834	2.3673636	2.4782276	2.5937424	2.7140808
11	2.3316390	2.4531670	2.5804264	2.7136592	2.8531166	2.9990593
12	2.5181701	2.6616862	2.8126647	2.9714568	3.1384283	3.3139605
13	2.7196237	2.8879295	3.0658045	3.2537452	3.4522711	3.6619263
14	2.9371936	3.1334035	3.3417269	3.5628510	3.7974982	4.0464286
15	3.1721690	3.3997428	3.6424824	3.9013218	4.1772480	4.4713036
16	3.4259426	3.6887209	3.9703058	4.2719474	4.5949728	4.9407904
17	3.7000180	4.0022622	4.3276333	4.6777824	5.0544701	5.4595734
18	3.9960194	4.3424545	4.7171203	5.1221717	5.5599171	6.0328286
19	4.3157009	4.7115631	5.1416611	5.6087780	6.1159088	6.6662756
20	4.6609570	5.1120459	5.6044106	6.1416119	6.7274997	7.3662345
21	5.0338335	5.5465698	6.1088075	6.7250650	7.4002496	8.1396891
22	5.4365402	6.0180283	6.6586002	7.3639461	8.1402746	8.9943565
23	5.8714634	6.5295607	7.2578742	8.0635210	8.9543020	9.9387639
24	6.3411805	7.0845733	7.9110828	8.8295555	9.8497322	10.982334
25	6.8484749	7.6867620	8.6230803	9.6683632	10.834705	12.135479
26	7.3963529	8.3401368	9.3991575	10.586858	11.918176	13.409704
27	7.9880611	9.0490484	10.245082	11.592609	13.109993	14.817723
28	8.6271060	9.8182175	11.167139	12.693907	14.420993	16.373584
29	9.3172744	10.652766	12.172181	13.899828	15.863092	18.092811
30	10.062656	11.558251	13.267678	15.220312	17.449401	19.992556
31	10.867669	12.540702	14.461769	16.666241	19.194341	22.091774
32	11.737082	13.606662	15.763328	18.249534	21.113775	24.411410
33	12.676049	14.763228	17.182027	19.983240	23.225153	26.974608
34	13.690133	16.018103	18.728410	21.881648	25.547668	29.806942
35	14.785343	17.379641	20.413967	23.960404	28.102435	32.936671
36	15.968171	18.856911	22.251224	26.236643	30.912678	36.395021
37	17.245625	20.459748	24.253834	28.729124	34.003946	40.216498
38	18.625274	22.198827	26.436679	31.458390	37.404341	44.439230
39	20.115296	24.085727	28.815980	34.446937	41.144775	49.105350
40	21.724520	26.133014	31.409418	37.719396	45.259252	54.261411
41	23.462482	28.354320	34.236265	41.302739	49.785177	59.958859
42	25.339480	30.764437	37.317529	45.226499	54.763695	66.254539
43	27.366638	33.379414	40.676107	49.523016	60.240064	73.211266
44	29.555970	36.216664	44.336956	54.227703	66.264070	80.898448
45	31.920447	39.295081	48.327282	59.379334	72.890477	89.392785
46	34.474083	42.635162	52.676737	65.020371	80.179525	98.779028
47	37.232009	46.259151	57.417644	71.197306	88.197477	109.15083
48	40.210570	50.191179	62.585231	77.961050	97.017224	120.61166
49	43.427415	54.457429	68.217902	85.367350	106.71895	133.27589
50	46.901609	59.086310	74.357513	93.477248	117.39084	147.26985

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι. $(1+i)^n$

Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί n χρονικές περιόδους.

n	11%	11,5%	12%	12,5%	13%	13,5%
	0.1100	0.1150	0.1200	0.1250	0.1300	0.1350
1	1.1100000	1.1150000	1.1200000	1.1250000	1.1300000	1.1350000
2	1.2321000	1.2432250	1.2544000	1.2656250	1.2769000	1.2882250
3	1.3676310	1.3861959	1.4049280	1.4238281	1.4428970	1.4621354
4	1.5180704	1.5456084	1.5735193	1.6018066	1.6304736	1.6595236
5	1.6850581	1.7233533	1.7623417	1.8020324	1.8424352	1.8835593
6	1.8704145	1.9215390	1.9738227	2.0272865	2.0819517	2.1378398
7	2.0761601	2.1425160	2.2106814	2.2806973	2.3526054	2.4264482
8	2.3045377	2.3889053	2.4759631	2.5657845	2.6584441	2.7540187
9	2.5580369	2.6636294	2.7730787	2.8865075	3.0040419	3.1258112
10	2.8394209	2.9699468	3.1058481	3.2473209	3.3945673	3.5477957
11	3.1517572	3.3114906	3.4785499	3.6532361	3.8358610	4.0267481
12	3.4984505	3.6923120	3.8959759	4.1098906	4.3345230	4.5703591
13	3.8832801	4.1169279	4.3634930	4.6236269	4.8980109	5.1873576
14	4.3104408	4.5903746	4.8871121	5.2015802	5.5347523	5.8876508
15	4.7845893	5.1182677	5.4735656	5.8517777	6.2542701	6.6824837
16	5.3108941	5.7068685	6.1303934	6.5832499	7.0673252	7.5846189
17	5.8950925	6.3631583	6.8660406	7.4061561	7.9860775	8.6085425
18	6.5435526	7.0949215	7.6899655	8.3319256	9.0242675	9.7706957
19	7.2633434	7.9108375	8.6127613	9.3734163	10.197422	11.089740
20	8.0623112	8.8205837	9.6462926	10.545093	11.523087	12.586854
21	8.9491654	9.8349509	10.803848	11.863230	13.021088	14.286080
22	9.9335736	10.965970	12.100309	13.346134	14.713830	16.214700
23	11.026267	12.227057	13.552347	15.014400	16.626628	18.403685
24	12.239156	13.633168	15.178628	16.891200	18.788089	20.888182
25	13.585463	15.200983	17.000063	19.002600	21.230541	23.708087
26	15.079864	16.949095	19.040071	21.377925	23.990511	26.908678
27	16.738649	18.898241	21.324879	24.050166	27.109278	30.541350
28	18.579900	21.071539	23.883865	27.056437	30.633484	34.664432
29	20.623689	23.494766	26.749929	30.438491	34.615836	39.344130
30	22.892295	26.196664	29.959920	34.243302	39.115895	44.655588
31	25.410447	29.209280	33.555110	38.523715	44.200961	50.684092
32	28.205597	32.568348	37.581723	43.339179	49.947086	57.526444
33	31.308212	36.313707	42.091530	48.756577	56.440207	65.292514
34	34.752115	40.489784	47.142514	54.851149	63.777434	74.107003
35	38.574848	45.146109	52.799615	61.707542	72.068500	84.111449
36	42.818081	50.337911	59.135569	69.420985	81.437405	95.466494
37	47.528070	56.126771	66.231837	78.098608	92.024267	108.35447
38	52.756158	62.581349	74.179657	87.860933	103.98742	122.98232
39	58.559335	69.778204	83.081216	98.843550	117.50579	139.58494
40	65.000862	77.802698	93.050962	111.19899	132.78154	158.42890
41	72.150956	86.750008	104.21708	125.09887	150.04314	179.81680
42	80.087561	96.726258	116.72313	140.73622	169.54874	204.09207
43	88.897193	107.84978	130.72990	158.32825	191.59008	231.64450
44	98.675884	120.25250	146.41749	178.11928	216.49679	262.91651
45	109.53023	134.08154	163.98759	200.38419	244.64137	298.41024
46	121.57856	149.50092	183.66610	225.43222	276.44475	338.69562
47	134.95220	166.69352	205.70603	253.61124	312.38257	384.41952
48	149.79694	185.86328	230.39075	285.31265	352.99230	436.31616
49	166.27460	207.23755	258.03764	320.97673	398.88130	495.21884
50	184.56481	231.06987	289.00216	361.09882	450.73587	562.07338

n	14%	14,5%	15%	15,5%	16%	16,5%
	0.1400	0.1450	0.1500	0.1550	0.1600	0.1650
1	1.1400000	1.1450000	1.1500000	1.1550000	1.1600000	1.1650000
2	1.2996000	1.3110250	1.3225000	1.3340250	1.3456000	1.3572250
3	1.4815440	1.5011236	1.5208750	1.5407989	1.5608960	1.5811671
4	1.6889601	1.7187865	1.7490062	1.7796227	1.8106393	1.8420597
5	1.9254146	1.9680106	2.0113572	2.0554642	2.1003416	2.1459995
6	2.1949726	2.2533721	2.3130607	2.3740611	2.4363963	2.5000894
7	2.5022687	2.5801110	2.6600198	2.7420406	2.8262197	2.9126042
8	2.8525864	2.9542271	3.0590228	3.1670569	3.2784148	3.3931839
9	3.2519484	3.3825901	3.5178762	3.6579507	3.8029612	3.9530592
10	3.7072212	3.8730656	4.0455576	4.2249330	4.4114349	4.6053139
11	4.2262322	4.4346601	4.6523912	4.8797976	5.1172645	5.3651907
12	4.8179047	5.0776858	5.3502499	5.6361663	5.9360269	6.2504472
13	5.4924113	5.8139502	6.1527874	6.5097720	6.8857911	7.2817709
14	6.2613489	6.6569730	7.0757055	7.5187866	7.9875176	8.4832631
15	7.1379377	7.6222341	8.1370613	8.6841985	9.2655204	9.8830015
16	8.1372489	8.7274580	9.3576204	10.030249	10.748004	11.513697
17	9.2764638	9.9929394	10.761263	11.584938	12.467684	13.413457
18	10.575169	11.441916	12.375453	13.380603	14.462514	15.626677
19	12.055692	13.100993	14.231771	15.454597	16.776516	18.205078
20	13.743489	15.000637	16.366536	17.850059	19.460758	21.208916
21	15.667578	17.175730	18.821517	20.616818	22.574480	24.708388
22	17.861038	19.666210	21.644744	23.812425	26.186396	28.785271
23	20.361584	22.517811	24.891456	27.503351	30.376219	33.534841
24	23.212205	25.782893	28.625174	31.766370	35.236414	39.068090
25	26.461914	29.521413	32.918950	36.690157	40.874241	45.514324

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι. $(1+i)^n$

Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί n χρονικές περιόδους.

n	14%	14,5%	15%	15,5%	16%	16,5%
	0.1400	0.1450	0.1500	0.1550	0.1600	0.1650
26	30.166582	33.802017	37.856793	42.377132	47.414119	53.024188
27	34.389903	38.703310	43.535311	48.945587	55.000378	61.773178
28	39.204490	44.315290	50.065608	56.532153	63.800438	71.965753
29	44.693118	50.741007	57.575449	65.294636	74.008508	83.840102
30	50.950154	58.098452	66.211766	75.415304	85.849869	97.673718
31	58.083176	66.522728	76.143531	87.104676	99.585848	113.78988
32	66.214820	76.168523	87.565060	100.60590	115.51958	132.56521
33	75.484895	87.212959	100.69982	116.19981	134.00272	154.43847
34	86.052780	99.858837	115.80479	134.21079	155.44315	179.92082
35	98.100169	114.33837	133.17551	155.01346	180.31405	209.60775
36	111.83419	130.91743	153.15184	179.04054	209.16430	244.19303
37	127.49098	149.90046	176.12461	206.79183	242.63059	284.48488
38	145.33972	171.63602	202.54330	238.84456	281.45148	331.42488
39	165.68728	196.52325	232.92480	275.86546	326.48372	386.10999
40	188.88349	225.01912	267.86351	318.62461	378.72111	449.81813
41	215.32718	257.64689	308.04304	368.01142	439.31649	524.03812
42	245.47299	295.00569	354.24950	425.05319	509.60712	610.50441
43	279.83920	337.78151	407.38692	490.93644	591.14426	711.23764
44	319.01669	386.75983	468.49496	567.03158	685.72734	828.59185
45	363.67903	442.84000	538.76920	654.92148	795.44372	965.30950
46	414.59409	507.05180	619.58458	756.43430	922.71471	1124.5856
47	472.63726	580.57431	712.52226	873.68162	1070.3491	1310.1422
48	538.80648	664.75759	819.40060	1009.1023	1241.6049	1526.3156
49	614.23938	761.14743	942.31068	1165.5131	1440.2617	1778.1577
50	700.23289	871.51381	1083.6573	1346.1676	1670.7035	2071.5537

n	17%	17,5%	18%	18,5%	19%	20%
	0.1700	0.1750	0.1800	0.1850	0.1900	0.2000
1	1.1700000	1.1750000	1.1800000	1.1850000	1.1900000	1.2000000
2	1.3689000	1.3806250	1.3924000	1.4042250	1.4161000	1.4400000
3	1.6016130	1.6222344	1.6430320	1.6640066	1.6851590	1.7280000
4	1.8738872	1.9061254	1.9387777	1.9718478	2.0053392	2.0736000
5	2.1924480	2.2396973	2.2877577	2.3366397	2.3863536	2.4883200
6	2.5651642	2.6316443	2.6995541	2.7689180	2.8397608	2.9859839
7	3.0012420	3.0921821	3.1854738	3.2811678	3.3793153	3.5831807
8	3.5114532	3.6333139	3.7588591	3.8881838	4.0213852	4.2998168
9	4.1084002	4.2691438	4.4354537	4.6074978	4.7854484	5.1597802
10	4.8068282	5.0162440	5.2338354	5.4598849	5.6946836	6.1917362
11	5.6239890	5.8940867	6.1759257	6.4699636	6.7766734	7.4300834
12	6.5800671	6.9255518	7.2875923	7.6669068	8.0642414	8.9161000
13	7.6986785	8.1375233	8.5993589	9.0852846	9.5964472	10.699320
14	9.0074538	9.5615899	10.147243	10.766062	11.419772	12.839184
15	10.538721	11.234868	11.973747	12.757784	13.589529	15.407021
16	12.330303	13.200970	14.129022	15.117974	16.171539	18.488425
17	14.426455	15.511140	16.672246	17.914799	19.244132	22.186110
18	16.878952	18.225589	19.673250	21.229036	22.900516	26.623331
19	19.748374	21.415067	23.214435	25.156408	27.251615	31.947998
20	23.105598	25.162704	27.393033	29.810343	32.429421	38.337597
21	27.033549	29.566177	32.323779	35.325257	38.591011	46.005116
22	31.629252	34.740258	38.142059	41.860429	45.923303	55.206139
23	37.006225	40.819802	45.007629	49.604608	54.648730	66.247367
24	43.297283	47.963268	53.109002	58.781460	65.031989	79.496840
25	50.657821	56.356839	62.668622	69.656030	77.388066	95.396208
26	59.269651	66.219286	73.948974	82.542396	92.091799	114.47545
27	69.345491	77.807661	87.259789	97.812739	109.58924	137.37054
28	81.134224	91.424001	102.96655	115.90809	130.41120	164.84465
29	94.927042	107.42320	121.50053	137.35109	155.18932	197.81357
30	111.06464	126.22226	143.37062	162.76104	184.67529	237.37629
31	129.94563	148.31116	169.17734	192.87184	219.76360	284.85154
32	152.03638	174.26561	199.62926	228.55312	261.51868	341.82185
33	177.88257	204.76209	235.56252	270.83545	311.20723	410.18622
34	208.12260	240.59545	277.96377	320.94001	370.33660	492.22346
35	243.50345	282.69966	327.99725	380.31391	440.70055	590.66815
36	284.89903	332.17210	387.03675	450.67198	524.43366	708.80178
37	333.33187	390.30221	456.70337	534.04630	624.07605	850.56213
38	389.99828	458.60510	538.90997	632.84486	742.65049	1020.6746
39	456.29799	538.86099	635.91377	749.92115	883.75408	1224.8095
40	533.86864	633.16166	750.37824	888.65656	1051.6674	1469.7713
41	624.62631	743.96494	885.44632	1053.0580	1251.4841	1763.7256
42	730.81278	874.15881	1044.8267	1247.8738	1489.2661	2116.4707
43	855.05095	1027.1366	1232.8955	1478.7304	1772.2267	2539.7649
44	1000.4096	1206.8855	1454.8166	1752.2955	2108.9498	3047.7178
45	1170.4792	1418.0904	1716.6836	2076.4702	2509.6502	3657.2614
46	1369.4607	1666.2563	2025.6867	2460.6171	2986.4837	4388.7136
47	1602.2690	1957.8511	2390.3102	2915.8313	3553.9156	5266.4563
48	1874.6547	2300.4751	2820.5661	3455.2601	4229.1596	6319.7476
49	2193.3460	2703.0582	3328.2680	4094.4832	5032.6999	7583.6971
50	2566.2149	3176.0933	3927.3562	4851.9626	5988.9128	9100.4365

ΠΙΝΑΚΑΣ II. $(1+i)^{\mu/12}$

Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί 1, 2, 3, ..., 11 δωδέκατα της ακεραίας χρονικής περιόδου.

i%	$(1+i)^{\frac{1}{12}}$	$(1+i)^{\frac{2}{12}}$	$(1+i)^{\frac{3}{12}}$	$(1+i)^{\frac{4}{12}}$	$(1+i)^{\frac{5}{12}}$	$(1+i)^{\frac{6}{12}}$	i%
1/4 %	1.000208	1,000416	1,000624	1,000832	1,001040	1,001249	1/4 %
1/2 %	1,000415	1,000831	1,001247	1,000663	1,002080	1,002496	1/2 %
3/4 %	1,000622	1,001246	1,001879	1,002499	1,003118	1,003743	3/4 %
1 %	1,000829	1,001659	1,002490	1,003322	1,004154	1,004987	1%
1 1/4 %	1,001035	1,002072	1,003110	1,004149	1,005189	1,006230	1 1/4 %
1 1/2 %	1,001241	1,002484	1,003729	1,004975	1,006222	1,007472	1 1/2 %
1 3/4 %	1,001446	1,002895	1,004346	1,005789	1,007254	1,008712	1 3/4 %
2 %	1,001651	1,003305	1,004962	1,006622	1,008285	1,009950	2 %
2 1/4 %	1,001855	1,003715	1,005578	1,007444	1,009314	1,011187	2 1/4 %
2 1/2 %	1,002059	1,004123	1,006192	1,008264	1,010341	1,012422	2 1/2 %
2 3/4 %	1,002263	1,004531	1,006805	1,009083	1,011367	1,013656	2 3/4 %
3 %	1,002466	1,004938	1,007417	1,009901	1,012392	1,014889	3 %
3 1/4 %	1,002668	1,005344	1,008027	1,010718	1,013415	1,016120	3 1/4 %
3 1/2 %	1,002870	1,005750	1,008637	1,011533	1,014437	1,017349	3 1/2 %
3 3/4 %	1,003072	1,006154	1,009245	1,012346	1,015457	1,018577	3 3/4 %
4 %	1,003273	1,006558	1,009853	1,013159	1,016476	1,019803	4 %
4 1/4 %	1,003474	1,006961	1,010459	1,013970	1,017493	1,021028	4 1/4 %
4 1/2 %	1,003674	1,007363	1,011064	1,014780	1,018509	1,022252	4 1/2 %
4 3/4 %	1,003874	1,007764	1,011669	1,015589	1,019524	1,023474	4 3/4 %
5 %	1,004074	1,008164	1,012272	1,016396	1,020537	1,024695	5 %
5 1/4 %	1,004273	1,008564	1,012874	1,017202	1,021549	1,025914	5 1/4 %
5 1/2 %	1,004471	1,008963	1,013475	1,018007	1,022559	1,027131	5 1/2 %
5 3/4 %	1,004669	1,009361	1,014075	1,018810	1,023568	1,028348	5 3/4 %
6 %	1,004867	1,009758	1,014673	1,019612	1,024575	1,029563	6 %
6 1/4 %	1,005064	1,010155	1,015271	1,020413	1,025582	1,030776	6 1/4
6 1/2 %	1,005261	1,010551	1,015868	1,021213	1,026586	1,031988	6 1/2 %
6 3/4 %	1,005458	1,010946	1,016463	1,022011	1,027590	1,033198	6 3/4 %
7 %	1,005654	1,011340	1,017058	1,022809	1,028592	1,034408	7 %
7 1/2 %	1,006044	1,012126	1,018244	1,024399	1,030592	1,036822	7 1/2 %
8 %	1,006434	1,012909	1,019426	1,025985	1,032586	1,039230	8 %
8 1/2 %	1,006821	1,013687	1,020601	1,027584	1,034563	1,041631	8 1/2 %
9 %	1,007207	1,014466	1,021778	1,029142	1,036559	1,044030	9 %
9 1/2 %	1,007593	1,015239	1,022946	1,030721	1,038546	1,046432	9 1/2 %
10 %	1,007974	1,016011	1,024113	1,032280	1,040511	1,048808	10 %
11 %	1,008742	1,017556	1,026448	1,035437	1,044484	1,053608	11 %
12 %	1,009511	1,019101	1,028781	1,038594	1,048457	1,058408	12 %

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ. $(1 + i)^{\mu/12}$

Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί 1, 2, 3, ..., 11 δωδέκατα της ακεραίας χρονικης περιόδου.

i%	$(1+i)^{\frac{7}{12}}$	$(1+i)^{\frac{8}{12}}$	$(1+i)^{\frac{9}{12}}$	$(1+i)^{\frac{10}{12}}$	$(1+i)^{\frac{11}{12}}$	i%
1/4 %	1,001457	1,001665	1,001874	1,002082	1,002291	1/4 %
1/2 %	1,002913	1,003340	1,003747	1,004164	1,004582	1/2 %
3/4 %	1,004368	1,004993	1,005619	1,006246	1,006872	3/4 %
1 %	1,005821	1,006655	1,007490	1,008326	1,009162	1 %
1 1/4 %	1,007272	1,008316	1,009260	1,010405	1,011452	1 1/4 %
1 1/2 %	1,008722	1,009975	1,011229	1,012484	1,013741	1 1/2 %
1 3/4 %	1,010171	1,011632	1,013096	1,014562	1,016030	1 3/4 %
2 %	1,011618	1,013289	1,014962	1,016639	1,018318	2 %
2 1/4 %	1,013064	1,014944	1,016827	1,018715	1,020605	2 1/4 %
2 1/2 %	1,014508	1,016597	1,018692	1,020790	1,022893	2 1/2 %
2 3/4 %	1,015950	1,018250	1,020554	1,022864	1,025179	2 3/4 %
3 %	1,017392	1,019901	1,022416	1,024938	1,027465	3 %
3 1/4 %	1,018831	1,021550	1,024277	1,027010	1,029751	3 1/4 %
3 1/2 %	1,020270	1,023199	1,026136	1,029082	1,032037	3 1/2 %
3 3/4 %	1,021707	1,024846	1,027995	1,031153	1,034322	3 3/4 %
4 %	1,023142	1,026491	1,029852	1,033223	1,036606	4 %
4 1/4 %	1,024576	1,028136	1,031708	1,035293	1,038890	4 1/4 %
4 1/2 %	1,026009	1,029779	1,033563	1,037361	1,041173	4 1/2 %
4 3/4 %	1,027440	1,031421	1,035417	1,039429	1,043456	4 3/4 %
5 %	1,028869	1,033061	1,037270	1,041496	1,045739	5 %
5 1/4 %	1,030298	1,034700	1,039122	1,043562	1,048021	5 1/4 %
5 1/2 %	1,031724	1,036338	1,040972	1,045627	1,050303	5 1/2 %
5 3/4 %	,1033150	1,037975	1,042822	1,047692	1,052584	5 3/4 %
6 %	1,034574	1,039610	1,044670	1,049755	1,054865	6 %
6 1/4 %	1,035997	1,041244	1,046518	1,051818	1,057145	6 1/4 %
6 1/2 %	1,037418	1,042876	1,048364	1,053880	1,059425	6 1/2 %
6 3/4 %	1,038838	1,044508	1,050209	1,055941	1,061705	6 3/4 %
7 %	1,040256	1,046138	1,052053	1,058001	1,063984	7 %
7 1/2 %	1,043089	1,049394	1,055738	1,062120	1,068540	7 1/2 %
8 %	1,045916	1,052646	1,059419	1,066235	1,073095	8 %
8 1/2 %	1,048736	1,055892	1,063093	1,070346	1,077648	8 1/2 %
9 %	1,051555	1,059134	1,066767	1,074456	1,082200	9 %
9 1/2 %	1,054375	1,062378	1,070441	1,078567	1,086753	9 1/2 %
10 %	1,057172	1,065602	1,074099	1,082664	1,091297	10 %
11 %	1,062802	1,072090	1,081447	1,090885	1,100402	11 %
12 %	1,068441	1,078578	1,088795	1,099106	1,109507	12 %

ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (αρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά n χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

n	.0025 ($\frac{1}{4}$%)	.004167 ($\frac{5}{12}$%)	.005 ($\frac{1}{2}$%)	.005833 ($\frac{7}{12}$%)	.0075 ($\frac{3}{4}$%)
1	.9975 0623	.9958 5062	.9950 2488	.9942 0050	.9925 5583
2	.9950 1869	.9917 1846	.9900 7450	.9884 3463	.9851 6708
3	.9925 3734	.9876 0345	.9851 4876	.9827 0220	.9778 3333
4	.9900 6219	.9835 0551	.9802 4752	.9770 0301	.9705 5417
5	.9875 9321	.9794 2457	.9753 7067	.9713 3688	.9633 2920
6	.9851 3038	.9753 6057	.9705 1808	.9657 0361	.9561 5802
7	.9826 7370	.9713 1343	.9656 8963	.9601 0301	.9490 4022
8	.9802 2314	.9672 8308	.9608 8520	.9545 3489	.9419 7540
9	.9777 7869	.9632 6946	.9561 0468	.9489 9906	.9349 6318
10	.9753 4034	.9592 7249	.9513 4794	.9434 9534	.9280 0315
11	.9729 0807	.9552 9211	.9466 1487	.9380 2354	.9210 9494
12	.9704 8187	.9513 2824	.9419 0534	.9325 8347	.9142 3815
13	.9680 6171	.9473 8082	.9372 1924	.9271 7495	.9074 3241
14	.9656 4759	.9434 4978	.9325 5646	.9217 9779	.9006 7733
15	.9632 3949	.9395 3505	.9279 1688	.9164 5182	.8939 7254
16	.9608 3740	.9356 3657	.9233 0037	.9111 3686	.8873 1766
17	.9584 4130	.9317 5426	.9187 0684	.9058 5272	.8807 1231
18	.9560 5117	.9278 8806	.9141 3616	.9005 9922	.8741 5614
19	.9536 6700	.9240 3790	.9095 8822	.8953 7619	.8676 4878
20	.9512 8878	.9202 0372	.9050 6290	.8901 8346	.8611 8985
21	.9489 1649	.9163 8544	.9005 6010	.8850 2084	.8547 7901
22	.9465 5011	.9125 8301	.8960 7971	.8798 8815	.8484 1589
23	.9441 8964	.9087 9636	.8916 2160	.8747 8524	.8421 0014
24	.9418 3505	.9050 2542	.8871 8567	.8697 1192	.8358 3140
25	.9394 8634	.9012 7013	.8827 7181	.8646 6802	.8296 0933
26	.9371 4348	.8975 3042	.8783 7991	.8596 5338	.8234 3358
27	.9348 0646	.8938 0623	.8740 0986	.8546 6782	.8173 0380
28	.9324 7527	.8900 9749	.8696 6155	.8497 1117	.8112 1966
29	.9301 4990	.8864 0414	.8653 3488	.8447 8327	.8051 8080
30	.9278 3032	.8827 2611	.8610 2973	.8398 8394	.7991 8690
31	.9255 1653	.8790 6335	.8567 4600	.8350 1303	.7932 3762
32	.9232 0851	.8754 1578	.8524 8358	.8301 7037	.7873 3262
33	.9209 0624	.8717 8335	.8482 4237	.8253 5580	.7814 7158
34	.9186 0972	.8681 6599	.8440 2226	.8205 6914	.7756 5418
35	.9163 1892	.8645 6365	.8398 2314	.8158 1025	.7698 8008
36	.9140 3384	.8609 7624	.8356 4492	.8110 7896	.7641 4896
37	.9117 5445	.8574 0373	.8314 8748	.8063 7510	.7584 6051
38	.9094 8075	.8538 4604	.8273 5073	.8016 9853	.7528 1440
39	.9072 1272	.8503 0311	.8232 3455	.7970 4907	.7472 1032
40	.9049 5034	.8467 7488	.8191 3886	.7924 2659	.7416 4796
41	.9026 9361	.8432 6129	.8150 6354	.7878 3091	.7361 2701
42	.9004 4250	.8397 6228	.8110 0850	.7832 6188	.7306 4716
43	.8981 9701	.8362 7779	.8069 7363	.7787 1935	.7252 0809
44	.8959 5712	.8328 0776	.8029 5884	.7742 0316	.7198 0952
45	.8937 2281	.8293 5212	.7989 6402	.7697 1317	.7144 5114
46	.8914 9407	.8259 1083	.7949 8907	.7652 4922	.7091 3264
47	.8892 7090	.8224 8381	.7910 3390	.7608 1115	.7038 5374
48	.8870 5326	.8190 7102	.7870 9841	.7563 9883	.6986 1414
49	.8848 4116	.8156 7238	.7831 8250	.7520 1209	.6934 1353
50	.8826 3457	.8122 8785	.7792 8607	.7476 5079	.6882 5165

Σημείωση: Σε κάθε αριθμό του Πίνακα III πρέπει να προτάσσεται το μηδέν.

ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1 + i)^{-n}$

Παρούσα (αρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά n χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

n	.0025 ($\frac{1}{4}$%)	.004167 ($\frac{5}{12}$%)	.005 ($\frac{1}{2}$%)	.005833 ($\frac{7}{12}$%)	.0075 ($\frac{3}{4}$%)
50	.8826 3457	.8122 8785	.7792 8607	.7476 5079	.6882 5165
51	.8804 3349	.8089 1736	.7754 0902	.7433 1479	.6831 2819
52	.8782 3790	.8055 6086	.7715 5127	.7390 0393	.6780 4286
53	.8760 4778	.8022 1828	.7677 1270	.7347 1808	.6729 9540
54	.8738 6312	.7988 8957	.7638 9324	.7304 5708	.6679 8551
55	.8716 8391	.7955 7468	.7600 9277	.7262 2079	.6630 1291
56	.8695 1013	.7922 7354	.7563 1122	.7220 0907	.6580 7733
57	.8673 4178	.7889 8610	.7525 4847	.7178 2178	.6531 7849
58	.8651 7883	.7857 1230	.7488 0445	.7136 5877	.6483 1612
59	.8630 2128	.7824 5208	.7450 7906	.7095 1990	.6434 8995
60	.8608 6911	.7792 0539	.7413 7220	.7054 0504	.6386 9970
61	.8587 2230	.7759 7217	.7376 8378	.7013 1404	.6339 4511
62	.8565 8085	.7727 5237	.7340 1371	.6972 4677	.6292 2592
63	.8544 4474	.7695 4593	.7303 6190	.6932 0308	.6245 4185
64	.8523 1395	.7663 5279	.7267 2826	.6891 8285	.6198 9266
65	.8501 8848	.7631 7291	.7231 1269	.6851 8593	.6152 7807
66	.8480 6831	.7600 0621	.7195 1512	.6812 1219	.6106 9784
67	.8459 5343	.7568 5266	.7159 3544	.6772 6150	.6061 5170
68	.8438 4382	.7537 1219	.7123 7357	.6733 3372	.6016 3940
69	.8417 3947	.7505 8476	.7088 2943	.6694 2872	.5971 6070
70	.8396 4037	.7474 7030	.7053 0291	.6655 4637	.5927 1533
71	.8375 4650	.7443 6876	.7017 9394	.6616 8653	.5883 0306
72	.8354 5786	.7412 8009	.6983 0243	.6578 4908	.5839 2363
73	.8333 7442	.7382 0424	.6948 2829	.6540 3338	.5795 7681
74	.8312 9618	.7351 4115	.6913 7143	.6502 4081	.5752 6234
75	.8292 2312	.7320 9078	.6879 3177	.6464 6973	.5709 7999
76	.8271 5523	.7290 5306	.6845 0923	.6427 2053	.5667 2952
77	.8250 9250	.7260 2794	.6811 0371	.6389 9306	.5625 1069
78	.8230 3491	.7230 1537	.6777 1513	.6352 8723	.5583 2326
79	.8209 8246	.7200 1531	.6743 4342	.6316 0288	.5541 6701
80	.8189 3512	.7170 2770	.6709 8847	.6279 3989	.5500 4170
81	.8168 9289	.7140 5248	.6676 5022	.6242 9816	.5459 4710
82	.8148 5575	.7110 8960	.6643 2858	6206 7754	.5418 8297
83	.8128 2369	.7081 3902	.6610 2346	.6170 7792	.5378 4911
84	.8107 9670	.7052 0069	.6577 3479	.6134 9917	.5338 4527
85	.8087 7476	.7022 7454	.6544 6248	.6099 4118	.5298 7123
86	.8067 5787	.6993 6054	.6512 0644	.6064 0382	.5259 2678
87	.8047 4600	.6964 5863	.6479 6661	.6028 8698	.5220 1169
88	.8027 3915	.6935 6876	.6447 4290	.5993 9054	.5181 2575
89	.8007 3731	.6906 9088	.6415 3522	.5959 1437	.5142 6873
90	.7987 4046	.6878 2495	.6383 4350	.5924 5836	.5104 4043
91	.7967 4859	.6849 7090	.6351 6766	.5890 2240	.5066 4063
92	.7947 6168	.6821 2870	.6320 0763	.5856 0636	.5028 6911
93	.7927 7973	.6792 9829	.6288 6331	.5822 1014	.4991 2567
94	.7908 0273	.6764 7962	.6257 3464	.5788 3361	.4954 1009
95	.7888 3065	.6736 7265	.6226 2153	.5754 7666	.4917 2217
96	.7868 6349	.6708 7733	.6195 2391	.5721 3918	.4880 6171
97	.7849 0124	.6680 9361	.6164 4170	.5688 2106	.4844 2850
98	.7829 4388	.6653 2143	.6133 7483	.5655 2218	.4808 2233
99	.7809 9140	.6625 6076	.6103 2321	.5622 4243	.4772 4301
100	.7790 4379	.6598 1155	.6072 8678	.5589 8171	.4736 9033

ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (αρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά n χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

n	.01 (1%)	.01125 (1⅛%)	.0125 (1¼%)	.015 (1½%)	.0175 (1¾%)
1	.9900 9901	.9888 7515	.9876 5432	.9852 2167	.9828 0098
2	.9802 9605	.9778 7407	.9754 6106	.9706 6175	.9658 9777
3	.9705 9015	.9669 9537	.9634 1833	.9563 1699	.9492 8528
4	.9609 8034	.9562 3770	.9515 2428	.9421 8423	.9329 5851
5	.9514 6569	.9455 9970	.9397 7706	.9282 6033	.9169 1254
6	.9420 4524	.9350 8005	.9281 7488	.9145 4219	.9011 4254
7	.9327 1805	.9246 7743	.9167 1593	.9010 2679	.8856 4378
8	.9234 8322	.9143 9054	.9053 9845	.8877 1112	.8704 1157
9	.9143 3982	.9042 1808	.8942 2069	.8745 9224	.8554 4135
10	.9052 8695	.8941 5880	.8831 8093	.8616 6723	.8407 2860
11	.8963 2372	.8842 1142	.8722 7746	.8489 3323	.8262 6889
12	.8874 4923	.8743 7470	.8615 0860	.8363 8742	.8120 5788
13	.8786 6260	.8646 4742	.8508 7269	.8240 2702	.7980 9128
14	.8699 6297	.8550 2835	.8403 6809	.8118 4928	.7843 6490
15	.8613 4947	.8455 1629	.8299 9318	.7998 5150	.7708 7459
16	.8528 2126	.8361 1005	.8197 4635	.7880 3104	.7576 1631
17	.8443 7749	.8268 0846	.8096 2602	.7763 8526	.7445 8605
18	.8360 1731	.8176 1034	.7996 3064	.7649 1159	.7317 7990
19	.8277 3992	.8085 1455	.7897 5866	.7536 0747	.7191 9401
20	.8195 4447	.7995 1995	.7800 0855	.7424 7042	.7068 2458
21	.8114 3017	.7906 2542	.7703 7881	.7314 9795	.6946 6789
22	.8033 9621	.7818 2983	.7608 6796	.7206 8763	.6827 2028
23	.7954 4179	.7731 3210	.7514 7453	.7100 3708	.6709 7817
24	.7875 6613	.7645 3112	.7421 9707	.6995 4392	.6594 3800
25	.7797 6844	.7560 2583	.7330 3414	.6892 0583	.6480 9632
26	.7720 4796	.7476 1516	.7239 8434	.6790 2052	.6369 4970
27	.7644 0392	.7392 9806	.7150 4626	.6689 8574	.6259 9479
28	.7568 3557	.7310 7348	.7062 1853	.6590 9925	.6152 2829
29	.7493 4215	.7229 4040	.6974 9978	.6493 5887	.6046 4697
30	.7419 2292	.7148 9780	.6888 8867	.6397 6243	.5942 4764
31	.7345 7715	.7069 4467	.6803 8387	.6303 0781	.5840 2716
32	.7273 0411	.6990 8002	.6719 8407	.6209 9292	.5739 8247
33	.7201 0307	.6913 0287	.6636 8797	.6118 1568	.5641 1053
34	.7129 7334	.6836 1223	.6554 9429	.6027 7407	.5544 0839
35	.7059 1420	.6760 0715	.6474 0177	.5938 6608	.5448 7311
36	.6989 2495	.6684 8667	.6394 0916	.5850 8974	.5355 0183
37	.6920 0490	.6610 4986	.6315 1522	.5764 4309	.5262 9172
38	.6851 5337	.6536 9578	.6237 1873	.5679 2423	.5172 4002
39	.6783 6967	.6464 2352	.6160 1850	.5595 3126	.5083 4400
40	.6716 5314	.6392 3216	.6084 1334	.5512 6232	.4996 0098
41	.6650 0311	.6321 2080	.6009 0206	.5431 1559	.4910 0834
42	.6584 1892	.6250 8855	.5934 8352	.5350 8925	.4825 6348
43	.6518 9992	.6181 3454	.5861 5656	.5271 8153	.4742 6386
44	.6454 4546	.6112 5789	.5789 2006	.5193 9067	.4661 0699
45	.6390 5492	.6044 5774	.5717 7290	.5117 1494	.4580 9040
46	.6327 2764	.5977 3324	.5647 1397	.5041 5265	.4502 1170
47	.6264 6301	.5910 8355	.5577 4219	.4967 0212	.4424 6850
48	.6202 6041	.5845 0784	.5508 5649	.4893 6170	.4348 5848
49	.6141 1921	.5780 0528	.5440 5579	.4821 2975	.4273 7934
50	.6080 3882	.5715 7506	.5373 3905	.4750 0468	.4200 2883

ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (αρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά n χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

n	.01 (1%)	.01125 ($1\frac{1}{8}$%)	.0125 ($1\frac{1}{4}$%)	.015 ($1\frac{1}{2}$%)	.0175 ($1\frac{3}{4}$%)
50	.6080 3882	.5715 7506	.5373 3905	.4750 0468	.4200 2883
51	.6020 1864	.5652 1637	.5307 0524	.4679 8491	.4128 0475
52	.5960 5806	.5589 2843	.5241 5332	.4610 6887	.4057 0492
53	.5901 5649	.5527 1044	.5176 8229	.4542 5505	.3987 2719
54	.5843 1336	.5465 6162	.5112 9115	.4475 4192	.3918 6947
55	.5785 2808	.5404 8120	.5049 7892	.4409 2800	.3851 2970
56	.5728 0008	.5344 6843	.4987 4461	.4344 1182	.3785 0585
57	.5671 2879	.5285 2256	.4925 8727	.4279 9194	.3719 9592
58	.5615 1365	.5226 4282	.4865 0594	.4216 6694	.3655 9796
59	.5559 5411	.5168 2850	.4804 9970	.4154 3541	.3593 1003
60	.5504 4962	.5110 7887	.4745 6760	.4092 9597	.3531 3025
61	.5449 9962	.5053 9319	.4687 0874	.4032 4726	.3470 5676
62	.5396 0358	.4997 7077	.4629 2222	.3972 8794	.3410 8772
63	.5342 6097	.4942 1090	.4572 0713	.3914 1669	.3352 2135
64	.5289 7126	.4887 1288	.4515 6259	.3856 3221	.3294 5587
65	.5237 3392	.4832 7602	.4459 8775	.3799 3321	.3237 8956
66	.5185 4844	.4778 9965	.4404 8173	.3743 1843	.3182 2069
67	.5134 1429	.4725 8309	.4350 4368	.3687 8663	.3127 4761
68	.5083 3099	.4673 2568	.4296 7277	.3633 3658	.3073 6866
69	.5032 9801	.4621 2675	.4243 6817	.3579 6708	.3020 8222
70	.4983 1486	.4569 8566	.4191 2905	.3526 7692	.2968 8670
71	.4933 8105	.4519 0177	.4139 5462	.3474 6495	.2917 8054
72	.4884 9609	.4468 7443	.4088 4407	.3423 3000	.2867 6221
73	.4836 5949	.4419 0302	.4037 9661	.3372 7093	.2818 3018
74	.4788 7078	.4369 8692	.3988 1147	.3322 8663	.2769 8298
75	.4741 2949	.4321 2551	.3938 8787	.3273 7599	.2722 1914
76	.4694 3514	.4273 1818	.3890 2506	.3225 3793	.2675 3724
77	.4647 8726	.4225 6433	.3842 2228	.3177 7136	.2629 3586
78	.4601 8541	.4178 6337	.3794 7879	.3130 7523	.2584 1362
79	.4556 2912	.4132 1470	.3747 9387	.3084 4850	.2539 6916
80	.4511 1794	.4086 1775	.3701 6679	.3038 9015	.2496 0114
81	.4466 5142	.4040 7194	.3655 9683	.2993 9916	.2453 0825
82	.4422 2913	.3995 7670	.3610 8329	.2949 7454	.2410 8919
83	.4378 5063	.3951 3148	.3566 2547	.2906 1531	.2369 4269
84	.4335 1547	.3907 3570	.3522 2268	.2863 2050	.2328 6751
85	.4292 2324	.3863 8882	.3478 7426	.2820 8917	.2288 6242
86	.4249 7350	.3820 9031	.3435 7951	.2779 2036	.2249 2621
87	.4207 6585	.3778 3961	.3393 3779	.2738 1316	.2210 5770
88	.4165 9985	.3736 3621	.3351 4843	.2697 6666	.2172 5572
89	.4124 7510	.3694 7956	.3310 1080	.2657 7996	.2135 1914
90	.4083 9119	.3653 6916	.3269 2425	.2618 5218	.2098 4682
91	.4043 4771	.3613 0448	.3228 8814	.2579 8245	.2062 3766
92	.4003 4427	.3572 8503	.3189 0187	.2541 6990	.2026 9057
93	.3963 8046	.3533 1029	.3149 6481	.2504 1369	.1992 0450
94	.3924 5590	.3493 7976	.3110 7636	.2467 1300	.1957 7837
95	.3885 7020	.3454 9297	.3072 3591	.2430 6699	.1924 1118
96	.3847 2297	.3416 4941	.3034 4287	.2394 7487	.1891 0190
97	.3809 1383	.3378 4861	.2996 9666	.2359 3583	.1858 4953
98	.3771 4241	.3340 9010	.2959 9670	.2324 4909	.1826 5310
99	.3734 0832	.3303 7340	.2923 4242	.2290 1389	.1795 1165
100	.3697 1121	.3266 9805	.2887 3326	.2256 2944	.1764 2422

ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1 + i)^{-n}$

Παρούσα (αρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά n χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

n	.02 (2%)	.0225 (2¼%)	.025 (2½%)	.0275 (2¾%)	.03 (3%)
1	.9803 9216	.9779 9511	.9756 0976	.9732 3601	.9708 7379
2	.9611 6878	.9564 7444	.9518 1440	.9471 8833	.9425 9591
3	.9423 2233	.9354 2732	.9285 9941	.9218 3779	.9151 4166
4	.9238 4543	.9148 4335	.9059 5064	.8971 6573	.8884 8705
5	.9057 3081	.8947 1232	.8838 5429	.8731 5400	.8626 0878
6	.8879 7138	.8750 2427	.8622 9687	.8497 8491	.8374 8426
7	.8705 6018	.8557 6946	.8412 6524	.8270 4128	.8130 9151
8	.8534 9037	.8369 3835	.8207 4657	.8049 0635	.7894 0923
9	.8367 5527	.8185 2161	.8007 2836	.7833 6385	.7664 1673
10	.8203 4830	.8005 1013	.7811 9840	.7623 9791	.7440 9391
11	.8042 6304	.7828 9499	.7621 4478	.7419 9310	.7224 2128
12	.7884 9318	.7656 6748	.7435 5589	.7221 3440	.7013 7988
13	.7730 3253	.7488 1905	.7254 2038	.7028 0720	.6809 5134
14	.7578 7502	.7323 4137	.7077 2720	.6839 9728	.6611 1781
15	.7430 1473	.7162 2628	.6904 6556	.6656 9078	.6418 6195
16	.7284 4581	.7004 6580	.6736 2493	.6478 7424	.6231 6694
17	.7141 6256	.6850 5212	.6571 9506	.6305 3454	.6050 1645
18	.7001 5937	.6699 7763	.6411 6591	.6136 5892	.5873 9461
19	.6864 3076	.6552 3484	.6255 2772	.5972 3496	.5702 8603
20	.6729 7133	.6408 1647	.6102 7094	.5812 5057	.5536 7575
21	.6597 7582	.6267 1538	.5953 8629	.5656 9398	.5375 4928
22	.6468 3904	.6129 2457	.5808 6467	.5505 5375	.5218 9250
23	.6341 5592	.5994 3724	.5666 9724	.5358 1874	.5066 9175
24	.6217 2149	.5862 4668	.5528 7535	.5214 7809	.4919 3374
25	.6095 3087	.5733 4639	.5393 9059	.5075 2126	.4776 0557
26	.5975 7928	.5607 2997	.5262 3472	.4939 3796	.4636 9473
27	.5858 6204	.5483 9117	.5133 9973	.4807 1821	.4501 8906
28	.5743 7455	.5363 2388	.5008 7778	.4678 5227	.4370 7675
29	.5631 1231	.5245 2213	.4886 6125	.4553 3068	.4243 4636
30	.5520 7089	.5129 8008	.4767 4269	.4431 4421	.4119 8676
31	.5412 4597	.5016 9201	.4651 1481	.4312 8391	.3999 8715
32	.5306 3330	.4906 5233	.4537 7055	.4197 4103	.3883 3703
33	.5202 2873	.4798 5558	.4427 0298	.4085 0708	.3770 2625
34	.5100 2817	.4692 9641	.4319 0534	.3975 7380	.3660 4490
35	.5000 2761	.4589 6960	.4213 7107	.3869 3314	.3553 8340
36	.4902 2315	.4488 7002	.4110 9372	.3765 7727	.3450 3243
37	.4806 1093	.4389 9268	.4010 6705	.3664 9856	.3349 8294
38	.4711 8719	.4293 3270	.3912 8492	.3566 8959	.3252 2615
39	.4619 4822	.4198 8528	.3817 4139	.3471 4316	.3157 5355
40	.4528 9042	.4106 4575	.3724 3062	.3378 5222	.3065 5684
41	.4440 1021	.4016 0954	.3633 4695	.3288 0995	.2976 2800
42	.4353 0413	.3927 7216	.3544 8483	.3200 0968	.2889 5922
43	.4267 6875	.3841 2925	.3458 3886	.3114 4495	.2805 4294
44	.4184 0074	.3756 7653	.3374 0376	.3031 0944	.2723 7178
45	.4101 9680	.3674 0981	.3291 7440	.2949 9702	.2644 3862
46	.4021 5373	.3593 2500	.3211 4576	.2871 0172	.2567 3653
47	.3942 6836	.3514 1809	.3133 1294	.2794 1773	.2492 5876
48	.3865 3761	.3436 8518	.3056 7116	.2719 3940	.2419 9880
49	.3789 5844	.3361 2242	.2982 1576	.2646 0122	.2349 5029
50	.3715 2788	.3287 2608	.2909 4221	.2575 7783	.2281 0708

ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (αρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά n χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

n	.02 (2%)	.0225 (2¼%)	.025 (2½%)	.0275 (2¾%)	.03 (3%)
50	.3715 2788	.3287 2608	.2909 4221	.2575 7783	.2281 0708
51	.3642 4302	.3214 9250	.2838 4606	.2506 8402	.2214 6318
52	.3571 0100	.3144 1810	.2769 2298	.2439 7471	.2150 1280
53	.3500 9902	.3074 9936	.2701 6876	.2374 4497	.2087 5029
54	.3432 3433	.3007 3287	.2635 7928	.2310 9000	.2026 7019
55	.3365 0425	.2941 1528	.2571 5052	.2249 0511	.1967 6717
56	.3299 0613	.2876 4330	.2508 7855	.2188 8575	.1910 3609
57	.3234 3738	.2813 1374	.2447 5956	.2130 2749	.1854 7193
58	.3170 9547	.2751 2347	.2387 8982	.2073 2603	.1800 6984
59	.3108 7791	.2690 6940	.2329 6568	.2017 7716	.1748 2508
60	.3047 8227	.2631 4856	.2272 8359	.1963 7679	.1697 3309
61	.2988 0614	.2573 5801	.2217 4009	.1911 2097	.1647 8941
62	.2929 4720	.2516 9487	.2163 3179	.1860 0581	.1599 8972
63	.2872 0314	.2461 5635	.2110 5541	.1810 2755	.1553 2982
64	.2815 7170	.2407 3971	.2059 0771	.1761 8253	.1508 0565
65	.2760 5069	.2354 4226	.2008 8557	.1714 6718	.1464 1325
66	.2706 3793	.2302 6138	.1959 8593	.1668 7804	.1421 4879
67	.2653 3130	.2251 9450	.1912 0578	.1624 1172	.1380 0853
68	.2601 2873	.2202 3912	.1865 4223	.1580 6493	.1339 8887
69	.2550 2817	.2153 9278	.1819 9241	.1538 3148	.1300 8628
70	.2500 2761	.2106 5309	.1775 5358	.1497 1726	.1262 9736
71	.2451 2511	.2060 1769	.1732 2300	.1457 1023	.1226 1880
72	.2403 1874	.2014 8429	.1689 9805	.1418 1044	.1190 4737
73	.2356 0661	.1970 5065	.1648 7615	.1380 1503	.1155 7998
74	.2309 8687	.1927 1458	.1608 5478	.1343 2119	.1122 1357
75	.2264 5771	.1884 7391	.1569 3149	.1307 2622	.1089 4521
76	.2220 1737	.1843 2657	.1531 0389	.1272 2747	.1057 7205
77	.2176 6408	.1802 7048	.1493 6965	.1238 2235	.1026 9131
78	.2133 9516	.1763 0365	.1457 2649	.1205 0837	.0997 0030
79	.2092 1192	.1724 2411	.1421 7218	.1172 8309	.0967 9641
80	.2051 0973	.1686 2993	.1387 0457	.1141 4412	.0939 7710
81	.2010 8797	.1649 1925	.1353 2153	.1110 8917	.0912 3990
82	.1971 4507	.1612 9022	.1320 2101	.1081 1598	.0885 8243
83	.1932 7948	.1577 4105	.1288 0098	.1052 2237	.0860 0236
84	.1894 8968	.1542 6997	.1256 5949	.1024 0620	.0834 9743
85	.1857 7420	.1508 7528	.1225 9463	.0996 6540	.0810 6547
86	.1821 3157	.1475 5528	.1196 0452	.0969 9795	.0787 0434
87	.1785 6036	.1443 0835	.1166 8733	.0944 0190	.0764 1198
88	.1750 5918	.1411 3286	.1138 4130	.0918 7533	.0741 8639
89	.1716 2665	.1380 2724	.1110 6468	.0894 1638	.0720 2562
90	.1682 6142	.1349 8997	.1083 5579	.0870 2324	.0699 2779
91	.1649 6217	.1320 1953	.1057 1296	.0846 9415	.0678 9105
92	.1617 2762	.1291 1445	.1031 3460	.0824 2740	.0659 1364
93	.1585 5649	.1262 7331	.1006 1912	.0802 2131	.0639 9383
94	.1554 4754	.1234 9468	.0981 6500	.0780 7427	.0621 2993
95	.1523 9955	.1207 7719	.0957 7073	.0759 8469	.0603 2032
96	.1494 1132	.1181 1950	.0934 3486	.0739 5104	.0585 6342
97	.1464 8169	.1155 2029	.0911 5596	.0719 7181	.0568 5769
98	.1436 0950	.1129 7828	.0889 3264	.0700 4556	.0552 0164
99	.1407 9363	.1104 9221	.0867 6355	.0681 7086	.0535 9383
100	.1380 3297	.1080 6084	.0846 4737	.0663 4634	.0520 3284

ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1 + i)^{-n}$

Παρούσα (αρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά n χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

n	.035 (3½%)	.04 (4%)	.045 (4½%)	.05 (5%)	.055 (5½%)
1	.9661 8357	.9615 3846	.9569 3780	.9523 8095	.9478 6730
2	.9335 1070	.9245 5621	.9157 2995	.9070 2948	.8984 5242
3	.9019 4271	.8889 9636	.8762 9660	.8638 3760	.8516 1366
4	.8714 4223	.8548 0419	.8385 6134	.8227 0247	.8072 1674
5	.8419 7317	.8219 2711	.8024 5105	.7835 2617	.7651 3435
6	.8135 0064	.7903 1453	.7678 9574	.7462 1540	.7252 4583
7	.7859 9096	.7599 1781	.7348 2846	.7106 8133	.6874 3681
8	.7594 1156	.7306 9021	.7031 8513	.6768 3936	.6515 9887
9	.7337 3097	.7025 8674	.6729 0443	.6446 0892	.6176 2926
10	.7089 1881	.6755 6417	.6439 2768	.6139 1325	.5854 3058
11	.6849 4571	.6495 8093	.6161 9874	.5846 7929	.5549 1050
12	.6617 8330	.6245 9705	.5896 6386	.5568 3742	.5259 8152
13	.6394 0415	.6005 7409	.5642 7164	.5303 2135	.4985 6068
14	.6177 8179	.5774 7508	.5399 7286	.5050 6795	.4725 6937
15	.5968 9062	.5552 6450	.5167 2044	.4810 1710	.4479 3305
16	.5767 0591	.5339 0818	.4944 6932	.4581 1152	.4245 8109
17	.5572 0378	.5133 7325	.4731 7639	.4362 9669	.4024 4653
18	.5383 6114	.4936 2812	.4528 0037	.4155 2065	.3814 6590
19	.5201 5569	.4746 4242	.4333 0179	.3957 3396	.3615 7906
20	.5025 6588	.4563 8695	.4146 4286	.3768 8948	.3427 2896
21	.4855 7090	.4388 3360	.3967 8743	.3589 4236	.3248 6158
22	.4691 5063	.4219 5539	.3797 0089	.3418 4987	.3079 2567
23	.4532 8563	.4057 2633	.3633 5013	.3255 7131	.2918 7267
24	.4379 5713	.3901 2147	.3477 0347	.3100 6791	.2766 5656
25	.4231 4699	.3751 1680	.3327 3060	.2953 0277	.2622 3370
26	.4088 3767	.3606 8923	.3184 0248	.2812 4073	.2485 6275
27	.3950 1224	.3468 1657	.3046 9137	.2678 4832	.2356 0450
28	.3816 5434	.3334 7747	.2915 7069	.2550 9364	.2233 2181
29	.3687 4815	.3206 5141	.2790 1502	.2429 4632	.2116 7944
30	.3562 7841	.3083 1867	.2670 0002	.2313 7745	.2006 4402
31	.3442 3035	.2964 6026	.2555 0241	.2203 5947	.1901 8390
32	.3325 8971	.2850 5794	.2444 9991	.2098 6617	.1802 6910
33	.3213 4271	.2740 9417	.2339 7121	.1998 7254	.1708 7119
34	.3104 7605	.2635 5209	.2238 9589	.1903 5480	.1619 6321
35	.2999 7686	.2534 1547	.2142 5444	.1812 9029	.1535 1963
36	.2898 3272	.2436 6872	.2050 2817	.1726 5741	.1455 1624
37	.2800 3161	.2342 9685	.1961 9921	.1644 3563	.1379 3008
38	.2705 6194	.2252 8543	.1877 5044	.1566 0536	.1307 3941
39	.2614 1250	.2166 2061	.1796 6549	.1491 4797	.1239 2362
40	.2525 7247	.2082 8904	.1719 2870	.1420 4568	.1174 6314
41	.2440 3137	.2002 7793	.1645 2507	.1352 8160	.1113 3947
42	.2357 7910	.1925 7493	.1574 4026	.1288 3962	.1055 3504
43	.2278 0590	.1851 6820	.1506 6054	.1227 0440	.1000 3322
44	.2201 0231	.1780 4635	.1441 7276	.1168 6133	.0948 1822
45	.2126 5924	.1711 9841	.1379 6437	.1112 9651	.0898 7509
46	.2054 6787	.1646 1386	.1320 2332	.1059 9668	.0851 8965
47	.1985 1968	.1582 8256	.1263 3810	.1009 4921	.0807 4849
48	.1918 0645	.1521 9476	.1208 9771	.0961 4211	.0765 3885
49	.1853 2024	.1463 4112	.1156 9158	.0915 6391	.0725 4867
50	.1790 5337	.1407 1262	.1107 0965	.0872 0373	.0687 6652

ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1 + i)^{-n}$

Παρούσα (αρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά n χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

n	.06 (6%)	.065 (6½%)	.07 (7%)	.075 (7½%)	.08 (8%)
1	.9433 9623	.9389 6714	.9345 7944	.9302 3256	.9259 2593
2	.8899 9644	.8816 5928	.8734 3873	.8653 3261	.8573 3882
3	.8396 1928	.8278 4909	.8162 9788	.8049 6057	.7938 3224
4	.7920 9366	.7773 2309	.7628 9521	.7488 0053	.7350 2985
5	.7472 5817	.7298 8084	.7129 8618	.6965 5863	.6805 8320
6	.7049 6054	.6853 3412	.6663 4222	.6479 6152	.6301 6963
7	.6650 5711	.6435 0621	.6227 4974	.6027 5490	.5834 9040
8	.6274 1237	.6042 3119	.5820 0910	.5607 0223	.5402 6888
9	.5918 9846	.5673 5323	.5439 3374	.5215 8347	.5002 4897
10	.5583 9478	.5327 2604	.5083 4929	.4851 9393	.4631 9349
11	.5267 8753	.5002 1224	.4750 9280	.4513 4319	.4288 8286
12	.4969 6936	.4696 8285	.4440 1196	.4198 5413	.3971 1376
13	.4688 3902	.4410 1676	.4149 6445	.3905 6198	.3676 9792
14	.4423 0096	.4141 0025	.3878 1724	.3633 1347	.3404 6104
15	.4172 6506	.3888 2652	.3624 4602	.3379 6602	.3152 4170
16	.3936 4628	.3650 9533	.3387 3460	.3143 8699	.2918 9047
17	.3713 6442	.3428 1251	.3165 7439	.2924 5302	.2702 6895
18	.3503 4379	.3218 8969	.2958 6392	.2720 4932	.2502 4903
19	.3305 1301	.3022 4384	.2765 0833	.2530 6913	.2317 1206
20	.3118 0473	.2837 9703	.2584 1900	.2354 1315	.2145 4821
21	.2941 5540	.2664 7608	.2415 1309	.2189 8897	.1986 5575
22	.2775 0510	.2502 1228	.2257 1317	.2037 1067	.1839 4051
23	.2617 9726	.2349 4111	.2109 4688	.1894 9830	.1703 1528
24	.2469 7855	.2206 0198	.1971 4662	.1762 7749	.1576 9934
25	.2329 9863	.2071 3801	.1842 4918	.1639 7906	.1460 1790
26	.2198 1003	.1944 9579	.1721 9549	.1525 3866	.1352 0176
27	.2073 6795	.1826 2515	.1609 3037	.1418 9643	.1251 8682
28	.1956 3014	.1714 7902	.1504 0221	.1319 9668	.1159 1372
29	.1845 5674	.1610 1316	.1405 6282	.1227 8761	.1073 2752
30	.1741 1013	.1511 8607	.1313 6712	.1142 2103	.0993 7733
31	.1642 5484	.1419 5875	.1227 7301	.1062 5212	.0920 1605
32	.1549 5740	.1332 9460	.1147 4113	.0988 3918	.0852 0005
33	.1461 8622	.1251 5925	.1072 3470	.0919 4343	.0788 8893
34	.1379 1153	.1175 2042	.1002 1934	.0855 2877	.0730 4531
35	.1301 0522	.1103 4781	.0936 6294	.0795 6164	.0676 3454
36	.1227 4077	.1036 1297	.0875 3546	.0740 1083	.0626 2458
37	.1157 9318	.0972 8917	.0818 0884	.0688 4729	.0579 8572
38	.1092 3885	.0913 5134	.0764 5686	.0640 4399	.0536 9048
39	.1030 5552	.0857 7590	.0714 5501	.0595 7580	.0497 1341
40	.0972 2219	.0805 4075	.0667 8038	.0554 1935	.0460 3093
41	.0917 1905	.0756 2512	.0624 1157	.0515 5288	.0426 2123
42	.0865 2740	.0710 0950	.0583 2857	.0479 5617	.0394 6411
43	.0816 2962	.0666 7559	.0545 1268	.0446 1039	.0365 4084
44	.0770 0908	.0626 0619	.0509 4643	.0414 9804	.0338 3411
45	.0726 5007	.0587 8515	.0476 1349	.0386 0283	.0313 2788
46	.0685 3781	.0551 9733	.0444 9859	.0359 0961	.0290 0730
47	.0646 5831	.0518 2848	.0415 8747	.0334 0428	.0268 5861
48	.0609 9840	.0486 6524	.0388 6679	.0310 7375	.0248 6908
49	.0575 4566	.0456 9506	.0363 2410	.0289 0582	.0230 2693
50	.0542 8836	.0429 0616	.0339 4776	.0268 8913	.0213 2123

ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (αρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά n χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

n	8%	8,5%	9%	9,5%	10%	10,5%
	0.0800	0.0850	0.0900	0.0950	0.1000	0.1050
1	0.92592593	0.92165899	0.91743119	0.91324201	0.90909091	0.90497738
2	0.85733882	0.84945529	0.84168000	0.83401097	0.82644628	0.81898405
3	0.79383224	0.78290810	0.77218348	0.76165386	0.75131481	0.74116204
4	0.73502986	0.72157429	0.70842522	0.69557430	0.68301346	0.67073488
5	0.68058320	0.66504543	0.64993139	0.63522767	0.62092133	0.60699989
6	0.63016963	0.61294510	0.59626733	0.58011660	0.56447394	0.54932117
7	0.58349040	0.56492636	0.54703425	0.52978685	0.51315813	0.49712323
8	0.54026889	0.52066946	0.50186629	0.48382361	0.46650739	0.44988528
9	0.50024897	0.47987968	0.46042779	0.44184804	0.42409763	0.40713600
10	0.46319350	0.44228542	0.42241081	0.40351419	0.38554330	0.36844887
11	0.42888287	0.40763634	0.38753286	0.36850611	0.35049391	0.33343789
12	0.39711377	0.37570169	0.35553473	0.33653527	0.31863083	0.30175375
13	0.36769793	0.34626884	0.32617865	0.30733814	0.28966439	0.27308032
14	0.34046105	0.31914179	0.29924647	0.28067410	0.26333126	0.24713151
15	0.31524171	0.29413990	0.27453805	0.25632338	0.23939206	0.22364842
16	0.29189048	0.27109668	0.25186977	0.23408528	0.21762914	0.20239676
17	0.27026896	0.24985869	0.23107318	0.21377651	0.19784468	0.18316449
18	0.25024904	0.23028451	0.21199375	0.19522969	0.17985880	0.16575972
19	0.23171207	0.21224379	0.19448968	0.17829196	0.16350800	0.15000880
20	0.21454821	0.19561640	0.17843090	0.16282371	0.14864363	0.13575457
21	0.19865575	0.18029161	0.16369807	0.14869745	0.13513058	0.12285481
22	0.18394051	0.16616738	0.15018172	0.13579676	0.12284598	0.11118083
23	0.17031529	0.15314966	0.13778139	0.12401530	0.11167816	0.10061613
24	0.15769934	0.14115176	0.12640495	0.11325598	0.10152560	0.91055325D-01
25	0.14601791	0.13009379	0.11596784	0.10343012	0.92296003D-01	0.82403009D-01
26	0.13520177	0.11990211	0.10639251	0.94456734D-01	0.83905457D-01	0.74572859D-01
27	0.12518682	0.11050886	0.97607812D-01	0.86261857D-01	0.76277689D-01	0.67486751D-01
28	0.11591373	0.10185148	0.89548451D-01	0.78777952D-01	0.69343353D-01	0.61073983D-01
29	0.10732752	0.93872334D-01	0.82154543D-01	0.71943335D-01	0.63039412D-01	0.55270573D-01
* 30	0.99377337D-01	0.86518280D-01	0.75371140D-01	0.65701676D-01	0.57308557D-01	0.50018618D-01
31	0.92016053D-01	0.79740350D-01	0.69147835D-01	0.60001531D-01	0.52098688D-01	0.45265718D-01
32	0.85200050D-01	0.73493411D-01	0.63438381D-01	0.54795919D-01	0.47362444D-01	0.40964450D-01
33	0.78888935D-01	0.67735862D-01	0.58200350D-01	0.50041935D-01	0.43056767D-01	0.37071901D-01
34	0.73045310D-01	0.62429366D-01	0.53394816D-01	0.45700397D-01	0.39142516D-01	0.33549232D-01
35	0.67634547D-01	0.57538587D-01	0.48986070D-01	0.41735523D-01	0.35584105D-01	0.30361296D-01
36	0.62624580D-01	0.53030956D-01	0.44941349D-01	0.38114633D-01	0.32349187D-01	0.27476286D-01
37	0.57985723D-01	0.48876457D-01	0.41230595D-01	0.34807884D-01	0.29408352D-01	0.24865417D-01
38	0.53690484D-01	0.45047426D-01	0.37826234D-01	0.31788022D-01	0.26734865D-01	0.22502640D-01
39	0.49713411D-01	0.41518365D-01	0.34702967D-01	0.29030157D-01	0.24304423D-01	0.20364380D-01
40	0.46030936D-01	0.38265774D-01	0.31837585D-01	0.26511559D-01	0.22094930D-01	0.18429303D-01
41	0.42621237D-01	0.35267995D-01	0.29208793D-01	0.24211469D-01	0.20086300D-01	0.16678103D-01
42	0.39464109D-01	0.32505064D-01	0.26797058D-01	0.22110931D-01	0.18260273D-01	0.15093305D-01
43	0.36540842D-01	0.29958585D-01	0.24584457D-01	0.20192631D-01	0.16600248D-01	0.13659100D-01
44	0.33834113D-01	0.27611599D-01	0.22554548D-01	0.18440759D-01	0.15091135D-01	0.12361177D-01
45	0.31327882D-01	0.25448478D-01	0.20692246D-01	0.16840876D-01	0.13719213D-01	0.11186585D-01
46	0.29007298D-01	0.23454819D-01	0.18983712D-01	0.15379795D-01	0.12472012D-01	0.10123606D-01
47	0.26858610D-01	0.21617344D-01	0.17416249D-01	0.14045475D-01	0.11338193D-01	0.91616348D-02
48	0.24869083D-01	0.19923820D-01	0.15978210D-01	0.12826918D-01	0.10307448D-01	0.82910722D-02
49	0.23026929D-01	0.18362968D-01	0.14658909D-01	0.11714080D-01	** 0.93704073D-02	0.75032328D-02
50	0.21321230D-01	0.16924394D-01	0.13448540D-01	0.10697790D-01	0.85185521D-02	0.67902560D-02

Σημείωση: Οι αριθμοί 01, 02 και 03, που υπάρχουν στο τέλος ορισμένων αριθμών του Πίνακα III, δηλώνουν ότι οι αντίστοιχοι αριθμοί πρέπει να διαιρεθούν με: 10, 100 ή 1000, ή να πολλαπλασιασθούν επί: 10^{-1}, 10^{-2} ή 10^{-3}.

* (0,993773370 – 01) = (0,993773370)(10^{-1}) = 0,0993773370

** (0,93704073 – 02) = (0,93704073)(10^{-2}) = 0,0093704073

ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1 + i)^{-n}$

Παρούσα (αρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά n χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

n	11%	11,5%	12%	12,5%	13%	13,5%
	0.1100	0.1150	0.1200	0.1250	0.1300	0.1350
1	0.90090090	0.89686099	0.89285714	0.88888889	0.88495575	0.88105727
2	0.81162244	0.80435963	0.79719388	0.79012346	0.78314669	0.77626191
3	0.73119139	0.72139878	0.71178025	0.70233197	0.69305017	0.68393120
4	0.65873098	0.64699442	0.63551808	0.62429508	0.61331873	0.60258256
5	0.59345133	0.58026405	0.56742686	0.55492896	0.54275994	0.53090975
6	0.53464084	0.52041619	0.50663113	0.49327019	0.48031853	0.46776189
7	0.48165842	0.46674098	0.45234922	0.43846239	0.42506065	0.41212502
8	0.43392650	0.41860178	0.40388324	0.38974435	0.37615987	0.36310574
9	0.39092478	0.37542760	0.36061003	0.34643942	0.33288484	0.31991695
10	0.35218449	0.33670637	0.32197324	0.30794616	0.29458836	0.28186516
11	0.31728332	0.30197881	0.28747611	0.27372992	0.26069766	0.24833935
12	0.28584083	0.27083301	0.25667510	0.24331548	0.23070589	0.21880119
13	0.25751426	0.24289956	0.22917420	0.21628043	0.20416451	0.19277638
14	0.23199483	0.21784714	0.20461982	0.19224927	0.18067656	0.16984703
15	0.20900435	0.19537860	0.18269627	0.17088824	0.15989076	0.14964496
16	0.18829221	0.17522745	0.16312167	0.15190066	0.14149625	0.13184578
17	0.16963262	0.15715466	0.14564435	0.13502281	0.12521792	0.11616368
18	0.15282218	0.14094589	0.13003960	0.12002027	0.11081232	0.10234686
19	0.13767764	0.12640887	0.11610678	0.10668469	0.98063998D-01	0.90173443D-01
20	0.12403391	0.11337118	0.10366677	0.94830835D-01	0.86782299D-01	0.79447968D-01
21	0.11174226	0.10167819	0.92559616D-01	0.84294075D-01	0.76798495D-01	0.69998210D-01
22	0.10066871	0.91191202D-01	0.82642515D-01	0.74928067D-01	0.67963270D-01	0.61672432D-01
23	0.90692528D-01	0.81785831D-01	0.73787960D-01	0.66602727D-01	0.60144487D-01	0.54336944D-01
24	0.81704981D-01	0.73350522D-01	0.65882107D-01	0.59202424D-01	0.53225210D-01	0.47873960D-01
25	0.73608091D-01	0.65785221D-01	0.58823310D-01	0.52624377D-01	0.47101956D-01	0.42179700D-01
26	0.66313596D-01	0.59000199D-01	0.52520813D-01	0.46777224D-01	0.41683147D-01	0.37162732D-01
27	0.59741978D-01	0.52914977D-01	0.46893583D-01	0.41579755D-01	0.36887741D-01	0.32742495D-01
28	0.53821602D-01	0.47457378D-01	0.41869271D-01	0.36959782D-01	0.32644018D-01	0.28848013D-01
29	0.48487930D-01	0.42562671D-01	0.37383277D-01	0.32853140D-01	0.28888512D-01	0.25416752D-01
30	0.43682820D-01	0.38172799D-01	0.33377926D-01	0.29202791D-01	0.25565055D-01	0.22393614D-01
31	0.39353892D-01	0.34235694D-01	0.29801720D-01	0.25958036D-01	0.22623942D-01	0.19730056D-01
32	0.35453957D-01	0.30704659D-01	0.26608679D-01	0.23073810D-01	0.20021188D-01	0.17383310D-01
33	0.31940502D-01	0.27537811D-01	0.23757749D-01	0.20510054D-01	0.17717866D-01	0.15315691D-01
34	0.28775227D-01	0.24697588D-01	0.21212276D-01	0.18231159D-01	0.15679527D-01	0.13494001D-01
35	0.25923628D-01	0.22150303D-01	0.18939532D-01	0.16205475D-01	0.13875688D-01	0.11888988D-01
36	0.23354620D-01	0.19865743D-01	0.16910296D-01	0.14404866D-01	0.12279370D-01	0.10474879D-01
37	0.21040198D-01	0.17816810D-01	0.15098479D-01	0.12804326D-01	0.10866699D-01	0.92289686D-02
38	0.18955133D-01	0.15979202D-01	0.13480785D-01	0.11381623D-01	0.96165477D-02	0.81312498D-02
39	0.17076697D-01	0.14331123D-01	0.12036415D-01	0.10116998D-01	0.85102192D-02	0.71640968D-02
40	0.15384411D-01	0.12853025D-01	0.10746799D-01	0.89928872D-02	0.75311675D-02	0.63119796D-02
41	0.13859830D-01	0.11527377D-01	0.95953565D-02	0.79936775D-02	0.66647500D-02	0.55612155D-02
42	0.12486334D-01	0.10338454D-01	0.85672826D-02	0.71054911D-02	0.58980089D-02	0.48997494D-02
43	0.11248949D-01	0.92721563D-02	0.76493595D-02	0.63159921D-02	0.52194769D-02	0.43169598D-02
44	0.10134188D-01	0.83158353D-02	0.68297852D-02	0.56142153D-02	0.46190061D-02	0.38034888D-02
45	0.91298995D-02	0.74581483D-02	0.60980226D-02	0.49904136D-02	0.40876160D-02	0.33510915D-02
46	0.82251347D-02	0.66889222D-02	0.54446630D-02	0.44359232D-02	0.36173593D-02	0.29525035D-02
47	0.74100313D-02	0.59990334D-02	0.48613063D-02	0.39430428D-02	0.32012030D-02	0.26013247D-02
48	0.66757039D-02	0.53802990D-02	0.43404520D-02	0.35049270D-02	0.28329230D-02	0.22919160D-02
49	0.60141477D-02	0.48253803D-02	0.38754036D-02	0.31154907D-02	0.25070115D-02	0.20193093D-02
50	0.54181511D-02	0.43276954D-02	0.34601818D-02	0.27693250D-02	0.22185942D-02	0.17791271D-02

n	14%	14,5%	15%	15,5%	16%	16,5%
	0.1400	0.1450	0.1500	0.1550	0.1600	0.1650
1	0.87719298	0.87336245	0.86956522	0.86580087	0.86206897	0.85836910
2	0.76946753	0.76276197	0.75614367	0.74961114	0.74316291	0.73679751
3	0.67497152	0.66616766	0.65751624	0.64901398	0.64065768	0.63244422
4	0.59208028	0.58180582	0.57175325	0.56191687	0.55229110	0.54287058
5	0.51936867	0.50812735	0.49717674	0.48650811	0.47611302	0.46598333
6	0.45558656	0.44377935	0.43232760	0.42121915	0.41044226	0.39998569
7	0.39963733	0.38758022	0.37593705	0.36469190	0.35382954	0.34333536
8	0.35055906	0.33849801	0.32690178	0.31575057	0.30502546	0.29470846
9	0.30750795	0.29563145	0.28426242	0.27337711	0.26295299	0.25296864
10	0.26974382	0.25819341	0.24718471	0.23669014	0.22668361	0.21714046
11	0.23661738	0.22549642	0.21494323	0.20492653	0.19541691	0.18638666
12	0.20755911	0.19694011	0.18690716	0.17742557	0.16846285	0.15998855
13	0.18206939	0.17200010	0.16252796	0.15361521	0.14522660	0.13732923
14	0.15971000	0.15021842	0.14132866	0.13300018	0.12519534	0.11787917
15	0.14009649	0.13119513	0.12289449	0.11515167	0.10792702	0.10118384
16	0.12289166	0.11458090	0.10686477	0.99698419D-01	0.93040534D-01	0.86853078D-01
17	0.10779970	0.10007066	0.92925891D-01	0.86318978D-01	0.80207357D-01	0.74551999D-01
18	0.94561140D-01	0.87397953D-01	0.80805123D-01	0.74735046D-01	0.69144274D-01	0.63993132D-01
19	0.82948368D-01	0.76330090D-01	0.70265325D-01	0.64705668D-01	0.59607133D-01	0.54929727D-01
20	0.72761727D-01	0.66663835D-01	0.61100283D-01	0.56022223D-01	0.51385459D-01	0.47149981D-01
21	0.63826076D-01	0.58221690D-01	0.53130681D-01	0.48504090D-01	0.44297810D-01	0.40472087D-01
22	0.55987786D-01	0.50848637D-01	0.46200592D-01	0.41994883D-01	0.38187767D-01	0.34739989D-01
23	0.49112093D-01	0.44409290D-01	0.40174428D-01	0.36359206D-01	0.32920489D-01	0.29819733D-01
24	0.43080784D-01	0.38785407D-01	0.34934285D-01	0.31479832D-01	0.28379732D-01	0.25596337D-01
25	0.37790161D-01	0.33873718D-01	0.30377639D-01	0.27255266D-01	0.24465286D-01	0.21971105D-01

ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1 + i)^{-n}$

Παρούσα (αρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά n χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

n	14%	14,5%	15%	15,5%	16%	16,5%
	0.1400	0.1450	0.1500	0.1550	0.1600	0.1650
26	0.33149264D-01	0.29584033D-01	0.26415339D-01	0.23597633D-01	0.21090764D-01	0.18859318D-01
27	0.29078302D-01	0.25837583D-01	0.22969860D-01	0.20430851D-01	0.18181693D-01	0.16188256D-01
28	0.25507283D-01	0.22565575D-01	0.19973791D-01	0.17689049D-01	0.15673874D-01	0.13895498D-01
29	0.22374809D-01	0.19707926D-01	0.17368514D-01	0.15315194D-01	0.13511960D-01	0.11927466D-01
30	0.19627026D-01	0.17212162D-01	0.15103056D-01	0.13259908D-01	0.11648241D-01	0.10238169D-01
31	0.17216689D-01	0.15032456D-01	0.13133092D-01	0.11480440D-01	0.10041587D-01	0.87881276D-02
32	0.15102359D-01	0.13128783D-01	0.11420080D-01	0.99397748D-02	0.86565409D-02	0.75434572D-02
33	0.13247684D-01	0.11466186D-01	0.99305044D-02	0.86058657D-02	0.74625353D-02	0.64750706D-02
34	0.11620775D-01	0.10014136D-01	0.86352213D-02	0.74509660D-02	0.64332201D-02	0.55580005D-02
35	0.10193662D-01	0.87459705D-02	0.75088881D-02	0.64510528D-02	0.55458794D-02	0.47708159D-02
36	0.89418091D-02	0.76384022D-02	0.65294679D-02	0.55853271D-02	0.47809306D-02	0.40951210D-02
37	0.78436922D-02	0.66710937D-02	0.56777982D-02	0.48357811D-02	0.41214919D-02	0.35151253D-02
38	0.68804318D-02	0.58262827D-02	0.49372159D-02	0.41868235D-02	0.35530102D-02	0.30172750D-02
39	0.60354665D-02	0.50884565D-02	0.42932312D-02	0.36249554D-02	0.30629399D-02	0.25899356D-02
40	0.52942689D-02	0.44440668D-02	0.37332445D-02	0.31384895D-02	0.26404654D-02	0.22231207D-02
41	0.46440955D-02	0.38812811D-02	0.32462996D-02	0.27173070D-02	0.22762633D-02	0.19082581D-02
42	0.40737680D-02	0.33897652D-02	0.28228692D-02	0.23526467D-02	0.19622960D-02	0.16379898D-02
43	0.35734807D-02	0.29604936D-02	0.24546689D-02	0.20369236D-02	0.16916344D-02	0.14059998D-02
44	0.31346322D-02	0.25855839D-02	0.21344947D-02	0.17635702D-02	0.14583056D-02	0.12068668D-02
45	0.27496774D-02	0.22581519D-02	0.18560824D-02	0.15269006D-02	0.12571600D-02	0.10359372D-02
46	0.24119977D-02	0.19721851D-02	0.16139847D-02	0.13219919D-02	0.10837586D-02	0.88921647D-03
47	0.21157875D-02	0.17224324D-02	0.14034649D-02	0.11445817D-02	0.93427466D-03	0.76327594D-03
48	0.18559539D-02	0.15043078D-02	0.12204043D-02	0.99097984D-03	0.80540919D-03	0.65517248D-03
49	0.16280298D-02	0.13138059D-02	0.10612211D-02	0.85799121D-03	0.69431827D-03	0.56237942D-03
50	0.14280963D-02	0.11474288D-02	0.92280098D-03	0.74284953D-03	0.59855023D-03	0.48272946D-03

n	17%	17,5%	18%	18,5%		20%
	0.1700	0.1750	0.1800	0.1850	0.1900	0.2000
1	0.85470086	0.85106383	0.84745763	0.84388186	0.84033614	0.83333334
2	0.73051356	0.72430965	0.71818443	0.71213659	0.70616482	0.69444445
3	0.62437056	0.61643374	0.60863088	0.60095915	0.59341582	0.57870371
4	0.53365006	0.52462447	0.51578888	0.50713853	0.49866876	0.48225309
5	0.45611116	0.44648891	0.43710922	0.42796500	0.41904938	0.40187758
6	0.38983860	0.37999056	0.37043155	0.36115190	0.35214234	0.33489798
7	0.33319539	0.32339622	0.31392504	0.30476954	0.29591793	0.27908165
8	0.28478238	0.27523083	0.26603817	0.25718949	0.24867053	0.23256805
9	0.24340375	0.23423900	0.22545608	0.21703754	0.20896683	0.19380671
10	0.20803739	0.19935234	0.19106447	0.18315404	0.17560238	0.16150559
11	0.17780974	0.16966157	0.16191905	0.15456038	0.14756503	0.13458799
12	0.15197413	0.14439283	0.13721953	0.13043070	0.12400422	0.11215666
13	0.12989242	0.12288751	0.11628774	0.11006810	0.10420523	0.93463884D-01
14	0.11101916	0.10458512	0.98548931D-01	0.92884472D-01	0.87567422D-01	0.77886570D-01
15	0.94888175D-01	0.89008611D-01	0.83516044D-01	0.78383521D-01	0.73586069D-01	0.64905475D-01
16	0.81101005D-01	0.75752009D-01	0.70776308D-01	0.66146431D-01	0.61837033D-01	0.54087896D-01
17	0.69317098D-01	0.64469795D-01	0.59979923D-01	0.55819773D-01	0.51963893D-01	0.45073247D-01
18	0.59245383D-01	0.54867911D-01	0.50830443D-01	0.47105294D-01	0.43667137D-01	0.37561039D-01
19	0.50637080D-01	0.46696095D-01	0.43076647D-01	0.39751303D-01	0.36695074D-01	0.31300866D-01
20	0.43279556D-01	0.39741357D-01	0.36505633D-01	0.33545404D-01	0.30836196D-01	0.26084055D-01
21	0.36991073D-01	0.33822432D-01	0.30936977D-01	0.28308358D-01	0.25912770D-01	0.21736713D-01
22	0.31616302D-01	0.28785049D-01	0.26217777D-01	0.23888910D-01	0.21775437D-01	0.18113927D-01
23	0.27022481D-01	0.24497914D-01	0.22218456D-01	0.20159417D-01	0.18298687D-01	0.15094940D-01
24	0.23096137D-01	0.20849288D-01	0.18829200D-01	0.17012167D-01	0.15377048D-01	0.12579116D-01
25	0.19740288D-01	0.17744075D-01	0.15956949D-01	0.14356259D-01	0.12921889D-01	0.10482597D-01
26	0.16872041D-01	0.15101341D-01	0.13522838D-01	0.12114986D-01	0.10858730D-01	0.87354975D-02
27	0.14420548D-01	0.12852205D-01	0.11460032D-01	0.10223617D-01	0.91249834D-02	0.72795813D-02
28	0.12325255D-01	0.10938047D-01	0.97118918D-02	0.86275251D-02	0.76680533D-02	0.60663178D-02
29	0.10534406D-01	0.93089760D-02	0.82304168D-02	0.72806119D-02	0.64437423D-02	0.50552648D-02
30	0.90037658D-02	0.79225328D-02	0.69749295D-02	0.61439763D-02	0.54149095D-02	0.42127207D-02
31	0.76955264D-02	0.67425811D-02	0.59109573D-02	0.51847902D-02	0.45503442D-02	0.35106006D-02
32	0.65773730D-02	0.57383669D-02	0.50092858D-02	0.43753504D-02	0.38238186D-02	0.29255005D-02
33	0.56216863D-02	0.48837166D-02	0.42451575D-02	0.36922788D-02	0.32132930D-02	0.24379171D-02
34	0.48048601D-02	0.41563545D-02	0.35975911D-02	0.31158471D-02	0.27002462D-02	0.20315976D-02
35	0.41067181D-02	0.35373230D-02	0.30488060D-02	0.26294069D-02	0.22691145D-02	0.16929980D-02
36	0.35100154D-02	0.30104877D-02	0.25837339D-02	0.22189087D-02	0.19068189D-02	0.14108317D-02
37	0.30000132D-02	0.25621172D-02	0.21896050D-02	0.18724968D-02	0.16023688D-02	0.11756931D-02
38	0.25641139D-02	0.21805253D-02	0.18555975D-02	0.15801661D-02	0.13465284D-02	0.97974422D-03
39	0.21915503D-02	0.18557662D-02	0.15725403D-02	0.13334735D-02	0.11315365D-02	0.81645352D-03
40	0.18731199D-02	0.15793755D-02	0.13326612D-02	0.11252941D-02	0.95087101D-03	0.68037794D-03
41	0.16009572D-02	0.13441494D-02	0.11293739D-02	0.94961529D-03	0.79905127D-03	0.56698162D-03
42	0.13683395D-02	0.11439569D-02	0.95709656D-03	0.80136312D-03	0.67147166D-03	0.47248468D-03
43	0.11695209D-02	0.97358035D-03	0.81109878D-03	0.67625580D-03	0.56426190D-03	0.39373724D-03
44	0.99959056D-03	0.82857902D-03	0.68737185D-03	0.57068000D-03	0.47416967D-03	0.32811437D-03
45	0.85435091D-03	0.70517364D-03	0.58251852D-03	0.48158650D-03	0.39846191D-03	0.27342864D-03
46	0.73021445D-03	0.60014778D-03	0.49365976D-03	0.40640211D-03	0.33484194D-03	0.22785720D-03
47	0.62411492D-03	0.51076407D-03	0.41835573D-03	0.34295537D-03	0.28137978D-03	0.18988100D-03
48	0.53343156D-03	0.43469283D-03	0.35453876D-03	0.28941381D-03	0.23645360D-03	0.15823417D-03
49	0.45592441D-03	0.36995134D-03	0.30045658D-03	0.24423107D-03	0.19870050D-03	0.13186181D-03
50	0.38967898D-03	0.31485221D-03	0.25462422D-03	0.20610217D-03	0.16697521D-03	0.10988484D-03

ΠΙΝΑΚΑΣ IV. $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1 - U^n}{i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Αρχική (παρούσα) αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.0025 (¼ %)	.004167 ($\frac{5}{12}$ %)	.005 (½ %)	.005833 ($\frac{7}{12}$ %)	.0075 (¾ %)
1	0.9975 0623	0.9958 5062	0.9950 2488	0.9942 0050	0.9925 5583
2	1.9925 2492	1.9875 6908	1.9850 9938	1.9826 3513	1.9777 2291
3	2.9850 6227	2.9751 7253	2.9702 4814	2.9653 3732	2.9555 5624
4	3.9751 2446	3.9586 7804	3.9504 9566	3.9423 4034	3.92[illegible]1 1041
5	4.9627 1766	4.9381 0261	4.9258 6633	4.9136 7722	4.8894 3961
6	5.9478 4804	5.9134 6318	5.8963 8441	5.8793 8083	5.8455 9763
7	6.9305 2174	6.8847 7661	6.8620 7404	6.8394 8384	6.7946 3785
8	7.9107 4487	7.8520 5970	7.8229 5924	7.7940 1874	7.7366 1325
9	8.8885 2357	8.8153 2916	8.7790 6392	8.7430 1780	8.6715 7642
10	9.8638 6391	9.7746 0165	9.7304 1186	9.6865 1314	9.5995 7958
11	10.8367 7198	10.7298 9376	10.6770 2673	10.6245 3667	10.5206 7452
12	11.8072 5384	11.6812 2200	11.6189 3207	11.5571 2014	11.4349 1267
13	12.7753 1555	12.6286 0283	12.5561 5131	12.4842 9509	12.3423 4508
14	13.7409 6314	13.5720 5261	13.4887 0777	13.4060 9288	13.2430 2242
15	14.7042 0264	14.5115 8766	14.4166 2465	14.3225 4470	14.1369 9495
16	15.6650 4004	15.4472 2422	15.3399 2502	15.2336 8156	15.0243 1261
17	16.6234 8133	16.3789 7848	16.2586 3186	16.1395 3427	15.9050 2492
18	17.5795 3250	17.3068 6654	17.1727 6802	17.0401 3350	16.7791 8107
19	18.5331 9950	18.2309 0443	18.0823 5624	17.9355 0969	17.6468 2984
20	19.4844 8828	19.1511 0815	18.9874 1915	18.8256 9315	18.5080 1969
21	20.4334 0477	20.0674 9359	19.8879 7925	19.7107 1398	19.3627 9870
22	21.3799 5488	20.9800 7661	20.7840 5896	20.5906 0213	20.2112 1459
23	22.3241 4452	21.8888 7297	21.6756 8055	21.4653 8738	21.0533 1473
24	23.2659 7957	22.7938 9839	22.5628 6622	22.3350 9930	21.8891 4614
25	24.2054 6591	23.6951 6853	23.4456 3803	23.1997 6732	22.7187 5547
26	25.1426 0939	24.5926 9895	24.3240 1794	24.0594 2070	23.5421 8905
27	26.0774 1585	25.4865 0517	25.1980 2780	24.9140 8852	24.3594 9286
28	27.0098 9112	26.3766 0266	26.0676 8936	25.7637 9968	25.1707 1251
29	27.9400 4102	27.2630 0680	26.9330 2424	26.6085 8295	25.9758 9331
30	28.8678 7134	28.1457 3291	27.7940 5397	27.4484 6689	26.7750 8021
31	29.7933 8787	29.0247 9626	28.6507 9997	28.2834 7993	27.5683 1783
32	30.7165 9638	29.9002 1205	29.5032 8355	29.1136 5030	28.3556 5045
33	31.6375 0262	30.7719 9540	30.3515 2592	29.9390 0610	29.1371 2203
34	32.5561 1234	31.6401 6139	31.1955 4818	30.7595 7524	29.9127 7621
35	33.4724 3126	32.5047 2504	32.0353 7132	31.5753 8549	30.6826 5629
36	34.3864 6510	33.3657 0128	32.8710 1624	32.3864 6445	31.4468 0525
37	35.2982 1955	34.2231 0501	33.7025 0372	33.1928 3955	32.2052 6576
38	36.2077 0030	35.0769 5105	34.5298 5445	33.9945 3808	32.9580 8016
39	37.1149 1302	35.9272 5416	35.3530 8900	34.7915 8716	33.7052 9048
40	38.0198 6336	36.7740 2904	36.1722 2786	35.5840 1374	34.4469 3844
41	38.9225 5697	37.6172 9033	36.9872 9141	36.3718 4465	35.1830 6545
42	39.8229 9947	38.4570 5261	37.7982 9991	37.1551 0653	35.9137 1260
43	40.7211 9648	39.2933 3040	38.6052 7354	37.9338 2588	36.6389 2070
44	41.6171 5359	40.1261 3816	39.4082 3238	38.7080 2904	37.3587 3022
45	42.5108 7640	40.9554 9028	40.2071 9640	39.4777 4221	38.0731 8136
46	43.4023 7048	41.7814 0111	41.0021 8547	40.2429 9143	38.7823 1401
47	44.2916 4137	42.6038 8492	41.7932 1937	41.0038 0258	39.4861 6775
48	45.1786 9464	43.4229 5594	42.5803 1778	41.7602 0141	40.1847 8189
49	46.0635 3580	44.2386 2832	43.3635 0028	42.5122 1349	40.8781 9542
50	46.9461 7037	45.0509 1617	44.1427 8635	43.2598 6428	41.5664 4707

ΠΙΝΑΚΑΣ IV. $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1 - U^n}{i} = \dfrac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$

Αρχική (παρούσα) αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.0025 ($\frac{1}{4}$ %)	.004167 ($\frac{5}{12}$ %)	.005 ($\frac{1}{2}$ %)	.005833 ($\frac{7}{12}$ %)	.0075 ($\frac{3}{4}$ %)
50	46.9461 7037	45.0509 1617	44.1427 8635	43.2598 6428	41.5664 4707
51	47.8266 0386	45.8598 3353	44.9181 9537	44.0031 7907	42.2495 7525
52	48.7048 4176	46.6653 9439	45.6897 4664	44.7421 8301	42.9276 1812
53	49.5808 8953	47.4676 1267	46.4574 5934	45.4769 0108	43.6006 1351
54	50.4547 5265	48.2665 0224	47.2213 5258	46.2073 5816	44.2685 9902
55	51.3264 3656	49.0620 7692	47.9814 4535	46.9335 7895	44.9316 1193
56	52.1959 4669	49.8543 5046	48.7377 5657	47.6555 8802	45.5896 8926
57	53.0632 8847	50.6433 3656	49.4903 0505	48.3734 0980	46.2428 6776
58	53.9284 6730	51.4290 4885	50.2391 0950	49.0870 6856	46.8911 8388
59	54.7914 8858	52.2115 0093	50.9841 8856	49.7965 8846	47.5346 7382
60	55.6523 5769	52.9907 0632	51.7255 6075	50.5019 9350	48.1733 7352
61	56.5110 7999	53.7666 7850	52.4632 4453	51.2033 0754	48.8073 1863
62	57.3676 6083	54.5394 3087	53.1972 5824	51.9005 5431	49.4365 4455
63	58.2221 0557	55.3089 7680	53.9276 2014	52.5937 5739	50.0610 8640
64	59.0744 1952	56.0753 2959	54.6543 4840	53.2829 4024	50.6809 7906
65	59.9246 0800	56.8385 0250	55.3774 6109	53.9681 2617	51.2962 5713
66	60.7726 7631	57.5985 0871	56.0969 7621	54.6493 3836	51.9069 5497
67	61.6186 2974	58.3553 6137	56.8129 1165	55.3265 9986	52.5131 0667
68	62.4624 7355	59.1090 7357	57.5252 8522	55.9999 3358	53.1147 4607
69	63.3042 1302	59.8596 5832	58.2341 1465	56.6693 6230	53.7119 0677
70	64.1438 5339	60.6071 2862	58.9394 1756	57.3349 0867	54.3046 2210
71	64.9813 9989	61.3514 9738	59.6412 1151	57.9965 9520	54.8929 2516
72	65.8168 5774	62.0927 7748	60.3395 1394	58.6544 4427	55.4768 4880
73	66.6502 3216	62.8309 8172	61.0343 4222	59.3084 7815	56.0564 2561
74	67.4815 2834	63.5661 2287	61.7257 1366	59.9587 1896	56.6316 8795
75	68.3107 5146	64.2982 1365	62.4136 4543	60.6051 8869	57.2026 6794
76	69.1379 0670	65.0272 6670	63.0981 5466	61.2479 0922	57.7693 9746
77	69.9629 9920	65.7532 9464	63.7792 5836	61.8869 0229	58.3319 0815
78	70.7860 3411	66.4763 1002	64.4569 7350	62.5221 8952	58.8902 3141
79	71.6070 1657	67.1963 2533	65.1313 1691	63.1537 9239	59.4443 9842
80	72.4259 5169	67.9133 5303	65.8023 0539	63.7817 3229	59.9944 4012
81	73.2428 4458	68.6274 0550	66.4699 5561	64.4060 3044	60.5403 8722
82	74.0577 0033	69.3384 9511	67.1342 8419	65.0267 0798	61.0822 7019
83	74.8705 2402	70.0466 3413	67.7953 0765	65.6437 8590	61.6201 1930
84	75.6813 2072	70.7518 3482	68.4530 4244	66.2572 8507	62.1539 6456
85	76.4900 9548	71.4541 0936	69.1075 0491	66.8672 2625	62.6838 3579
86	77.2968 5335	72.1534 6991	69.7587 1135	67.4736 3007	63.2097 6257
87	78.1015 9935	72.8499 2854	70.4066 7796	68.0765 1706	63.7317 7427
88	78.9043 3850	73.5434 9730	71.0514 2086	68.6759 0759	64.2499 0002
89	79.7050 7581	74.2341 8818	71.6929 5608	69.2718 2197	64.7641 6875
90	80.5038 1627	74.9220 1313	72.3312 9958	69.8642 8033	65.2746 0918
91	81.3005 6486	75.6069 8403	72.9664 6725	70.4533 0273	65.7812 4981
92	82.0953 2654	76.2891 1272	73.5984 7487	71.0389 0910	66.2841 1892
93	82.8881 0628	76.9684 1101	74.2273 3818	71.6211 1923	66.7832 4458
94	83.6789 0901	77.6448 9063	74.8530 7282	72.1999 5284	67.2786 5467
95	84.4677 3966	78.3185 6329	75.4756 9434	72.7754 2950	67.7703 7685
96	85.2546 0315	78.9894 4062	76.0952 1825	73.3475 6869	68.2584 3856
97	86.0395 0439	79.6575 3422	76.7116 5995	73.9163 8975	68.7428 6705
98	86.8224 4827	80.3228 5566	77.3250 3478	74.4819 1193	69.2236 8938
99	87.6034 3967	80.9854 1642	77.9353 5799	75.0441 5436	69.7009 3239
100	88.3824 8346	81.6452 2797	78.5426 4477	75.6031 3607	70.1746 2272

ΠΙΝΑΚΑΣ IV. $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1 - U^n}{i} = \dfrac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$

Αρχική (παρούσα) αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.01 (1%)	.01125 ($1\frac{1}{8}$%)	.0125 ($1\frac{1}{4}$%)	.015 ($1\frac{1}{2}$%)	.0175 ($1\frac{3}{4}$%)
1	0.9900 9901	0.9888 7515	0.9876 5432	0.9852 2167	0.9828 0098
2	1.9703 9506	1.9667 4923	1.9631 1538	1.9558 8342	1.9486 9875
3	2.9409 8521	2.9337 4460	2.9265 3371	2.9122 0042	2.8979 8403
4	3.9019 6555	3.8899 8230	3.8780 5798	3.8543 8465	3.8309 4254
5	4.8534 3124	4.8355 8200	4.8178 3504	4.7826 4497	4.7478 5508
6	5.7954 7647	5.7706 6205	5.7460 0992	5.6971 8717	5.6489 9762
7	6.7281 9453	6.6953 3948	6.6627 2585	6.5982 1396	6.5346 4139
8	7.6516 7775	7.6097 3002	7.5681 2429	7.4859 2508	7.4050 5297
9	8.5660 1758	8.5139 4810	8.4623 4498	8.3605 1732	8.2604 9432
10	9.4713 0453	9.4081 0690	9.3455 2591	9.2221 8455	9.1012 2291
11	10.3676 2825	10.2923 1832	10.2178 0337	10.0711 1779	9.9274 9181
12	11.2550 7747	11.1666 9302	11.0793 1197	10.9075 0521	10.7395 4969
13	12.1337 4007	12.0313 4044	11.9301 8466	11.7315 3222	11.5376 4097
14	13.0037 0304	12.8863 6880	12.7705 5275	12.5433 8150	12.3220 0587
15	13.8650 5252	13.7318 8509	13.6005 4592	13.3432 3301	13.0928 8046
16	14.7178 7378	14.5679 9514	14.4202 9227	14.1312 6405	13.8504 9677
17	15.5622 5127	15.3948 0360	15.2299 1829	14.9076 4931	14.5950 8282
18	16.3982 6858	16.2124 1395	16.0295 4893	15.6725 6089	15.3268 6272
19	17.2260 0850	17.0209 2850	16.8193 0759	16.4261 6837	16.0460 5673
20	18.0455 5297	17.8204 4845	17.5993 1613	17.1686 3879	16.7528 8130
21	18.8569 8313	18.6110 7387	18.3696 9495	17.9001 3673	17.4475 4919
22	19.6603 7934	19.3929 0371	19.1305 6291	18.6208 2437	18.1302 6948
23	20.4558 2113	20.1660 3580	19.8820 3744	19.3308 6145	18.8012 4764
24	21.2433 8726	20.9305 6693	20.6242 3451	20.0304 0537	19.4606 8565
25	22.0231 5570	21.6865 9276	21.3572 6865	20.7196 1120	20.1087 8196
26	22.7952 0366	22.4342 0792	22.0812 5299	21.3986 3172	20.7457 3166
27	23.5596 0759	23.1735 0598	22.7962 9925	22.0676 1746	21.3717 2644
28	24.3164 4316	23.9045 7946	23.5025 1778	22.7267 1671	21.9869 5474
29	25.0657 8530	24.6275 1986	24.2000 1756	23.3760 7558	22.5916 0171
30	25.8077 0822	25.3424 1766	24.8889 0623	24.0158 3801	23.1858 4934
31	26.5422 8537	26.0493 6233	25.5692 9010	24.6461 4582	23.7698 7650
32	27.2695 8947	26.7484 4236	26.2412 7418	25.2671 3874	24.3438 5897
33	27.9896 9255	27.4397 4522	26.9049 6215	25.8789 5442	24.9079 6951
34	28.7026 6589	28.1233 5745	27.5604 5644	26.4817 2849	25.4623 7789
35	29.4085 8009	28.7993 6460	28.2078 5822	27.0755 9458	26.0072 5100
36	30.1075 0504	29.4678 5127	28.8472 6737	27.6606 8431	26.5427 5283
37	30.7995 0994	30.1289 0114	29.4787 8259	28.2371 2740	27.0690 4455
38	31.4846 6330	30.7825 9692	30.1025 0133	28.8050 5163	27.5862 8457
39	32.1630 3298	31.4290 2044	30.7185 1983	29.3645 8288	28.0946 2857
40	32.8346 8611	32.0682 5260	31.3269 3316	29.9158 4520	28.5942 2955
41	33.4996 8922	32.7003 7340	31.9278 3522	30.4589 6079	29.0852 3789
42	34.1581 0814	33.3254 6195	32.5213 1874	30.9940 5004	29.5678 0136
43	34.8100 0806	33.9435 9649	33.1074 7530	31.5212 3157	30.0420 6522
44	35.4554 5352	34.5548 5438	33.6863 9536	32.0406 2223	30.5081 7221
45	36.0945 0844	35.1593 1212	34.2581 6825	32.5523 3718	30.9662 6261
46	36.7272 3608	35.7570 4536	34.8228 8222	33.0564 8983	31.4164 7431
47	37.3536 9909	36.3481 2891	35.3806 2442	33.5531 9195	31.8589 4281
48	37.9739 5949	36.9326 3674	35.9314 8091	34.0425 5365	32.2938 0129
49	38.5880 7871	37.5106 4202	36.4755 3670	34.5246 8339	32.7211 8063
50	39.1961 1753	38.0822 1708	37.0128 7575	34.9996 8807	33.1412 0946

ΠΙΝΑΚΑΣ IV. $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1 - U^n}{i} = \dfrac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$

Αρχική (παρούσα) αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.01 (1%)	.01125 (1⅛%)	.0125 (1¼%)	.015 (1½%)	.0175 (1¾%)
50	39.1961 1753	38.0822 1708	37.0128 7575	34.9996 8807	33.1412 0946
51	39.7981 3617	38.6474 3345	37.5435 8099	35.4676 7298	33.5540 1421
52	40.3941 9423	39.2063 6188	38.0677 3431	35.9287 4185	33.9597 1913
53	40.9843 5072	39.7590 7232	38.5854 1660	36.3829 9690	34.3584 4632
54	41.5686 6408	40.3056 3394	39.0967 0776	36.8305 3882	34.7503 1579
55	42.1471 9216	40.8461 1514	39.6016 8667	37.2714 6681	35.1354 4550
56	42.7199 9224	41.3805 8358	40.1004 3128	37.7058 7863	35.5139 5135
57	43.2871 2102	41.9091 0613	40.5930 1855	38.1338 7058	35.8859 4727
58	43.8486 3468	42.4317 4896	41.0795 2449	38.5555 3751	36.2515 4523
59	44.4045 8879	42.9485 7746	41.5600 2419	38.9709 7292	36.6108 5526
60	44.9550 3841	43.4596 5633	42.0345 9179	39.3802 6889	36.9639 8552
61	45.5000 3803	43.9650 4952	42.5033 0054	39.7835 1614	37.3110 4228
62	46.0396 4161	44.4648 2029	42.9662 2275	40.1808 0408	37.6521 3000
63	46.5739 0258	44.9590 3119	43.4234 2988	40.5722 2077	37.9873 5135
64	47.1028 7385	45.4477 4407	43.8749 9247	40.9578 5298	38.3168 0723
65	47.6266 0777	45.9310 2009	44.3209 8022	41.3377 8618	38.6405 9678
66	48.1451 5621	46.4089 1975	44.7614 6195	41.7121 0461	38.9588 1748
67	48.6585 7050	46.8815 0284	45.1965 0563	42.0808 9125	39.2715 6509
68	49.1669 0149	47.3488 2852	45.6261 7840	42.4442 2783	39.5789 3375
69	49.6701 9949	47.8109 5527	46.0505 4656	42.8021 9490	39.8810 1597
70	50.1685 1435	48.2679 4094	46.4696 7562	43.1548 7183	40.1779 0267
71	50.6618 9539	48.7198 4270	46.8836 3024	43.5023 3678	40.4696 8321
72	51.1503 9148	49.1667 1714	47.2924 7431	43.8446 6677	40.7564 4542
73	51.6340 5097	49.6086 2016	47.6962 7093	44.1819 3771	41.0382 7560
74	52.1129 2175	50.0456 0708	48.0950 8240	44.5142 2434	41.3152 5857
75	52.5870 5124	50.4777 3259	48.4889 7027	44.8416 0034	41.5874 7771
76	53.0564 8638	50.9050 5077	48.8779 9533	45.1641 3826	41.8550 1495
77	53.5212 7364	51.3276 1510	49.2622 1761	45.4819 0962	42.1179 5081
78	53.9814 5905	51.7454 7847	49.6416 9640	45.7949 8485	42.3763 6443
79	54.4370 8817	52.1586 9317	50.0164 9027	46.1034 3335	42.6303 3359
80	54.8882 0611	52.5673 1092	50.3866 5706	46.4073 2349	42.8799 3474
81	55.3348 5753	52.9713 8286	50.7522 5389	46.7067 2265	43.1252 4298
82	55.7770 8666	53.3709 5957	51.1133 3717	47.0016 9720	43.3663 3217
83	56.2149 3729	53.7660 9104	51.4699 6264	47.2923 1251	43.6032 7486
84	56.6484 5276	54.1568 2674	51.8221 8532	47.5786 3301	43.8361 4237
85	57.0776 7600	54.5432 1557	52.1700 5958	47.8607 2218	44.0650 0479
86	57.5026 4951	54.9253 0588	52.5136 3909	48.1386 4254	44.2899 3099
87	57.9234 1535	55.3031 4549	52.8529 7688	48.4124 5571	44.5109 8869
88	58.3400 1520	55.6767 8169	53.1881 2531	48.6822 2237	44.7282 4441
89	58.7524 9030	56.0462 6126	53.5191 3611	48.9480 0234	44.9417 6355
90	59.1608 8148	56.4116 3041	53.8460 6035	49.2098 5452	45.1516 1037
91	59.5652 2919	56.7729 3490	54.1689 4850	49.4678 3696	45.3578 4803
92	59.9655 7346	57.1302 1992	54.4878 5037	49.7220 0686	45 5605 3860
93	60.3619 5392	57.4835 3021	54.8028 1518	49.9724 2055	45.7597 4310
94	60.7544 0982	57.8329 0997	55.1138 9154	50.2191 3355	45.9555 2147
95	61.1429 8002	58.1784 0294	55.4211 2744	50.4622 0054	46.1479 3265
96	61.5277 0299	58.5200 5235	55.7245 7031	50.7016 7541	46.3370 3455
97	61.9086 1682	58.8579 0096	56.0242 6698	50.9376 1124	46.5228 8408
98	62.2857 5923	59.1919 9106	56.3202 6368	51.1700 6034	46.7055 3718
99	62.6591 6755	59.5223 6446	56.6126 0610	51.3990 7422	46.8850 4882
100	63.0288 7877	59.8490 6251	56.9013 3936	51.6247 0367	47.0614 7304

ΠΙΝΑΚΑΣ IV. $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1-U^n}{i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Αρχική (παρούσα) αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.02 (2%)	.0225 (2¼%)	.025 (2½%)	.0275 (2¾%)	.03 (3%)
1	0.9803 9216	0.9779 9511	0.9756 0976	0.9732 3601	0.9708 7379
2	1.9415 6094	1.9344 6955	1.9274 2415	1.9204 2434	1.9134 6970
3	2.8838 8327	2.8698 9687	2.8560 2356	2.8422 6213	2.8286 1135
4	3.8077 2870	3.7847 4021	3.7619 7421	3.7394 2787	3.7170 9840
5	4.7134 5951	4.6794 5253	4.6458 2850	4.6125 8186	4.5797 0719
6	5.6014 3089	5.5544 7680	5.5081 2536	5.4623 6678	5.4171 9144
7	6.4719 9107	6.4102 4626	6.3493 9060	6.2894 0806	6.2302 8296
8	7.3254 8144	7.2471 8461	7.1701 3717	7.0943 1441	7.0196 9219
9	8.1622 3671	8.0657 0622	7.9708 6553	7.8776 7826	7.7861 0892
10	8.9825 8501	8.8662 1635	8.7520 6393	8.6400 7616	8.5302 0284
11	9.7868 4805	9.6491 1134	9.5142 0871	9.3820 6926	9.2526 2411
12	10.5753 4122	10.4147 7882	10.2577 6460	10.1042 0366	9.9540 0399
13	11.3483 7375	11.1635 9787	10.9831 8497	10.8070 1086	10.6349 5533
14	12.1062 4877	11.8959 3924	11.6909 1217	11.4910 0814	11.2960 7314
15	12.8492 6350	12.6121 6551	12.3813 7773	12.1566 9892	11.9379 3509
16	13.5777 0931	13.3126 3131	13.0550 0266	12.8045 7315	12.5611 0203
17	14.2918 7188	13.9976 8343	13.7121 9772	13.4351 0769	13.1661 1847
18	14.9920 3125	14.6676 6106	14.3533 6363	14.0487 6661	13.7535 1308
19	15.6784 6201	15.3228 9590	14.9788 9134	14.6460 0157	14.3237 9911
20	16.3514 3334	15.9637 1237	15.5891 6229	15.2272 5213	14.8774 7486
21	17.0112 0916	16.5904 2775	16.1845 4857	15.7929 4612	15.4150 2414
22	17.6580 4820	17.2033 5232	16.7654 1324	16.3434 9987	15.9369 1664
23	18.2922 0412	17.8027 8955	17.3321 1048	16.8793 1861	16.4436 0839
24	18.9139 2560	18.3890 3624	17.8849 8583	17.4007 9670	16.9355 4212
25	19.5234 5647	18.9623 8263	18.4243 7642	17.9083 1795	17.4131 4769
26	20.1210 3576	19.5231 1260	18.9506 1114	18.4022 5592	17.8768 4242
27	20.7068 9780	20.0715 0376	19.4640 1087	18.8829 7413	18.3270 3147
28	21.2812 7236	20.6078 2764	19.9648 8866	19.3508 2640	18.7641 0823
29	21.8443 8466	21.1323 4977	20.4535 4991	19.8061 5708	19.1884 5459
30	22.3964 5555	21.6453 2985	20.9302 9259	20.2493 0130	19.6004 4135
31	22.9377 0152	22.1470 2186	21.3954 0741	20.6805 8520	20.0004 2849
32	23.4683 3482	22.6376 7419	21.8491 7796	21.1003 2623	20.3887 6553
33	23.9885 6355	23.1175 2977	22.2918 8094	21.5088 2332	20.7657 9178
34	24.4985 9172	23.5868 2618	22.7237 8628	21.9064 0712	21.1318 3668
35	24.9986 1933	24.0457 9577	23.1451 5734	22.2933 4026	21.4872 2007
36	25.4888 4248	24.4946 6579	23.5562 5107	22.6699 1753	21.8322 5250
37	25.9694 5341	24.9336 5848	23.9573 1812	23.0364 1609	22.1672 3544
38	26.4406 4060	25.3629 9118	24.3486 0304	23.3931 0568	22.4924 6159
39	26.9025 8883	25.7828 7646	24.7303 4443	23.7402 4884	22.8082 1513
40	27.3554 7924	26.1935 2221	25.1027 7505	24.0781 0106	23.1147 7197
41	27.7994 8945	26.5951 3174	25.4661 2200	24.4069 1101	23.4123 9997
42	28.2347 9358	26.9879 0390	25.8206 0683	24.7269 2069	23.7013 5920
43	28.6615 6233	27.3720 3316	26.1664 4569	25.0383 6563	23.9819 0213
44	29.0799 6307	27.7477 0969	26.5038 4945	25.3414 7507	24.2542 7392
45	29.4901 5987	28.1151 1950	26.8330 2386	25.6364 7209	24.5187 1254
46	29.8923 1360	28.4744 4450	27.1541 6962	25.9235 7381	24.7754 4907
47	30.2865 8196	28.8258 6259	27.4674 8255	26.2029 9154	25.0247 0783
48	30.6731 1957	29.1695 4777	27.7731 5371	26.4749 3094	25.2667 0664
49	31.0520 7801	29.5056 7019	28.0713 6947	26.7395 9215	25.5016 5693
50	31.4236 0589	29.8343 9627	28.3623 1168	26.9971 6998	25.7297 6401

ΠΙΝΑΚΑΣ IV. $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1 - U^n}{i} = \dfrac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$

Αρχική (παρούσα) αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.02 (2%)	.0225 (2¼%)	.025 (2½%)	.0275 (2¾%)	.03 (3%)
50	31.4236 0589	29.8343 9627	28.3623 1168	26.9971 6998	25.7297 6401
51	31.7878 4892	30.1558 8877	28.6461 5774	27.2478 5400	25.9512 2719
52	32.1449 4992	30.4703 0687	28.9230 8072	27.4918 2871	26.1662 3999
53	32.4950 4894	30.7778 0623	29.1932 4948	27.7292 7368	26.3749 9028
54	32.8382 8327	31.0785 3910	29.4568 2876	27.9603 6368	26.5776 6047
55	33.1747 8752	31.3726 5438	29.7139 7928	28.1852 6879	26.7744 2764
56	33.5046 9365	31.6602 9768	29.9648 5784	28.4041 5454	26.9654 6373
57	33.8281 3103	31.9416 1142	30.2096 1740	28.6171 8203	27.1509 3566
58	34.1452 2650	32.2167 3489	30.4484 0722	28.8245 0806	27.3310 0549
59	34.4561 0441	32.4858 0429	30.6813 7290	29.0262 8522	27.5058 3058
60	34.7608 8668	32.7489 5285	30.9086 5649	29.2226 6201	27.6755 6367
61	35.0596 9282	33.0063 1086	31.1303 9657	29.4137 8203	27.8403 5307
62	35.3526 4002	33.2580 0573	31.3467 2836	29.5997 8879	28.0003 4279
63	35.6398 4316	33.5041 6208	31.5577 8377	29.7808 1634	28.1556 7261
64	35.9214 1486	33.7449 0179	31.7636 9148	29.9560 9887	28.3064 7826
65	36.1974 6555	33.9803 4405	31.9645 7705	30.1284 6605	28.4528 9152
66	36.4681 0348	34.2106 0543	32.1605 6298	30.2953 4409	28.5950 4031
67	36.7334 3478	34.4357 9993	32.3517 6876	30.4577 5581	28.7330 4884
68	36.0935 6351	34.6560 3905	32.5383 1099	30.6158 2074	28.8670 3771
69	37.2485 9168	34.8714 3183	32.7203 0340	30.7696 5522	28.9971 2399
70	37.4986 1929	35.0820 8492	32.8978 5698	30.9193 7247	29.1234 2135
71	37.7437 4441	35.2881 0261	33.0710 7998	31.0650 8270	29.2460 4015
72	37.0840 6314	35.4895 8691	33.2400 7803	31.2068 9314	29.3650 8752
73	38.2196 6975	35.6866 3756	33.4049 5417	31.3449 0816	29.4806 6750
74	38.4506 5662	35.8793 5214	33.5658 0895	31.4792 2936	29.5928 8107
75	38.6771 1433	36.0678 2605	33.7227 4044	31.6099 5558	29.7018 2628
76	38.8991 3170	36.2521 5262	33.8758 4433	31.7371 8304	29.8075 9833
77	39.1167 9578	36.4324 2310	34.0252 1398	31.8610 0540	29.9102 8964
78	39.3301 9194	36.6087 2675	34.1709 4047	31.9815 1377	30.0099 8994
79	39.5394 0386	36.7811 5085	34.3131 1265	32.0987 9685	30.1067 8635
80	39.7445 1359	36.9497 8079	34.4518 1722	32.2129 4098	30.2007 6345
81	39.9456 0156	37.1147 0004	34.5871 3875	32.3240 3015	30.2920 0335
82	40.1427 4663	37.2759 9026	34.7191 5976	32.4321 4613	30.3805 8577
83	40.3360 2611	37.4337 3130	34.8479 6074	32.5373 6850	30.4665 8813
84	40.5255 1579	37.5880 0127	34.9736 2023	32.6397 7469	30.5500 8556
85	40.7112 8999	37.7388 7655	35.0962 1486	32.7394 4009	30.6311 5103
86	40.8934 2156	37.8864 3183	35.2158 1938	32.8364 3804	30.7098 5537
87	41.0719 8192	38.0307 4018	35.3325 0671	32.9308 3994	30.7862 6735
88	41.2470 4110	38.1718 7304	35.4463 4801	33.0227 1527	30.8604 5374
89	41.4186 6774	38.3099 0028	35.5574 1269	33.1121 3165	30.9324 7936
90	41.5869 2916	38.4448 9025	35.6657 6848	33.1991 5480	31.0024 0714
91	41.7518 9133	38.5769 0978	35.7714 8144	33.2838 4905	31.0702 9820
92	41.9136 1895	38.7060 2423	35.8746 1604	33.3662 7644	31.1362 1184
93	42.0721 7545	38.8322 9754	35.9752 3516	33.4464 9776	31.2002 0567
94	42.2276 2299	38.9557 9221	36.0734 0016	33.5245 7202	31.2623 3560
95	42.3800 2254	39.0765 6940	36.1691 7089	33.6005 5671	31.3226 5592
96	42.5294 3386	39.1946 8890	36.2626 0574	33.6745 0775	31.3812 1934
97	42.6759 1555	39.3102 0920	36.3537 6170	33.7464 7956	31.4380 7703
98	42.8195 2505	39.4231 8748	36.4426 9434	33.8165 2512	31.4932 7867
99	42.9603 1867	39.5336 7968	36.5294 5790	33.8846 9598	31.5468 7250
100	43.0983 5164	39.6417 4052	36.6141 0526	33.9510 4232	31.5989 0534

ΠΙΝΑΚΑΣ IV. $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1 - U^n}{i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Αρχική (παρούσα) αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.035 (3½%)	.04 (4%)	.045 (4½%)	.05 (5%)	.055 (5½%)
1	0.9661 8357	0.9615 3846	0.9569 3780	0.9523 8095	0.9478 6730
2	1.8996 9428	1.8860 9467	1.8726 6775	1.8594 1043	1.8463 1971
3	2.8016 3698	2.7750 9103	2.7489 6435	2.7232 4803	2.6979 3338
4	3.6730 7921	3.6298 9522	3.5875 2570	3.5459 5050	3.5051 5012
5	4.5150 5238	4.4518 2233	4.3899 7674	4.3294 7667	4.2702 8448
6	5.3285 5302	5.2421 3686	5.1578 7248	5.0756 9207	4.9955 3031
7	6.1145 4398	6.0020 5467	5.8927 0094	5.7863 7340	5.6829 6712
8	6.8739 5554	6.7327 4487	6.5958 8607	6.4632 1276	6.3345 6599
9	7.6076 8651	7.4353 3161	7.2687 9050	7.1078 2168	6.9521 9525
10	8.3166 0532	8.1108 9578	7.9127 1818	7.7217 3493	7.5376 2583
11	9.0015 5104	8.7604 7671	8.5289 1692	8.3064 1422	8.0925 3633
12	9.6633 3433	9.3850 7376	9.1185 8078	8.8632 5164	8.6185 1785
13	10.3027 3849	9.9856 4785	9.6828 5242	9.3935 7299	9.1170 7853
14	10.9205 2028	10.5631 2293	10.2228 2528	9.8986 4094	9.5896 4790
15	11.5174 1090	11.1183 8743	10.7395 4573	10.3796 5804	10.0375 8094
16	12.0941 1681	11.6522 9561	11.2340 1505	10.8377 6956	10.4621 6203
17	12.6513 2059	12.1656 6885	11.7071 9143	11.2740 6625	10.8646 0856
18	13.1896 8173	12.6592 9697	12.1599 9180	11.6895 8690	11.2460 7447
19	13.7098 3742	13.1339 3940	12.5932 9359	12.0853 2086	11.6076 5352
20	14.2124 0330	13.5903 2634	13.0079 3645	12.4622 1034	11.9503 8248
21	14.6979 7420	14.0291 5995	13.4047 2388	12.8211 5271	12.2752 4406
22	15.1671 2484	14.4511 1533	13.7844 2476	13.1630 0258	12.5831 6973
23	15.6204 1047	14.8568 4167	14.1477 7489	13.4885 7388	12.8750 4239
24	16.0583 6760	15.2469 6314	14.4954 7837	13.7986 4179	13.1516 9895
25	16.4815 1459	15.6220 7994	14.8282 0896	14.0939 4457	13.4139 3266
26	16.8903 5226	15.9827 6918	15.1466 1145	14.3751 8530	13.6624 9541
27	17.2853 6451	16.3295 8575	15.4513 0282	14.6430 3362	13.8980 9991
28	17.6670 1885	16.6630 6322	15.7428 7351	14.8981 2726	14.1214 2172
29	18.0357 6700	16.9837 1463	16.0218 8853	15.1410 7358	14.3331 0116
30	18.3920 4541	17.2920 3330	16.2888 8854	15.3724 5103	14.5337 4517
31	18.7362 7576	17.5884 9356	16.5443 9095	15.5928 1050	14.7239 2907
32	19.0688 6547	17.8735 5150	16.7888 9086	15.8026 7667	14.9041 9817
33	19.3902 0818	18.1476 4567	17.0228 6207	16.0025 4921	15.0750 6936
34	19.7006 8423	18.4111 9776	17.2467 5796	16.1929 0401	15.2370 3257
35	20.0006 6110	18.6646 1323	17.4610 1240	16.3741 9429	15.3905 5220
36	20.2904 9381	18.9082 8195	17.6660 4058	16.5468 5171	15.5360 6843
37	20.5705 2542	19.1425 7880	17.8622 3979	16.7112 8734	15.6739 9851
38	20.8410 8736	19.3678 6423	18.0499 9023	16.8678 9271	15.8047 3793
39	21.1024 9987	19.5844 8484	18.2296 5572	17.0170 4067	15.9286 6154
40	21.3550 7234	19.7927 7388	18.4015 8442	17.1590 8635	16.0461 2469
41	21.5991 0371	19.9930 5181	18.5661 0949	17.2943 6796	16.1574 6416
42	21.8348 8281	20.1856 2674	18.7235 4975	17.4232 0758	16.2629 9920
43	22.0626 8870	20.3707 9494	18.8742 1029	17.5459 1198	16.3630 3242
44	22.2827 9102	20.5488 4129	19.0183 8305	17.6627 7331	16.4578 5063
45	22.4954 5026	20.7200 3970	19.1563 4742	17.7740 6982	16.5477 2572
46	22.7009 1813	20.8846 5356	19.2883 7074	17.8800 6650	16.6329 1537
47	22.8994 3780	21.0429 3612	19.4147 0884	17.9810 1571	16.7136 6386
48	23.0912 4425	21.1951 3088	19.5356 0654	18.0771 5782	16.7902 0271
49	23.2765 6450	21.3414 7200	19.6512 9813	18.1687 2173	16.8627 5139
50	23.4556 1787	21.4821 8462	19.7620 0778	18.2559 2546	16.9315 1790

ΠΙΝΑΚΑΣ IV. $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1 - U^n}{i} = \dfrac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$

Αρχική (παρούσα) αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.06 (6%)	.065 (6½%)	.07 (7%)	.075 (7½%)	.08 (8%)
1	0.9433 9623	0.9389 6714	0.9345 7944	0.9302 3256	0.9259 2593
2	1.8333 9267	1.8206 2642	1.8080 1817	1.7955 6517	1.7832 6475
3	2.6730 1195	2.6484 7551	2.6243 1604	2.6005 2574	2.5770 9699
4	3.4651 0561	3.4257 9860	3.3872 1126	3.3493 2627	3.3121 2684
5	4.2123 6379	4.1556 7944	4.1001 9744	4.0458 8490	3.9927 1004
6	4.9173 2433	4.8410 1356	4.7665 3966	4.6938 4642	4.6228 7966
7	5.5823 8144	5.4845 1977	5.3892 8940	5.2966 0132	5.2063 7006
8	6.2097 9381	6.0887 5096	5.9712 9851	5.8573 0355	5.7466 3894
9	6.8016 9227	6.6561 0419	6.5152 3225	6.3788 8703	6.2468 8791
10	7.3600 8705	7.1888 3022	7.0235 8154	6.8640 8096	6.7100 8140
11	7.8868 7458	7.6890 4246	7.4986 7434	7.3154 2415	7.1389 6426
12	8.3838 4394	8.1587 2532	7.9426 8630	7.7352 7827	7.5360 7802
13	8.8526 8296	8.5997 4208	8.3576 5074	8.1258 4026	7.9037 7594
14	9.2949 8393	9.0138 4233	8.7454 6799	8.4891 5373	8.2442 3698
15	9.7122 4899	9.4026 6885	9.1079 1401	8.8271 1975	8.5594 7869
16	10.1058 9527	9.7677 6418	9.4466 4860	9.1415 0674	8.8513 6916
17	10.4772 5969	10.1105 7670	9.7632 2299	9.4339 5976	9.1216 3811
18	10.8276 0348	10.4324 6638	10.0590 8691	9.7060 0908	9.3718 8714
19	11.1581 1649	10.7347 1022	10.3355 9524	9.9590 7821	9.6035 9920
20	11.4699 2122	11.0185 0725	10.5940 1425	10.1944 9136	9.8181 4741
21	11.7640 7662	11.2849 8333	10.8355 2733	10.4134 8033	10.0168 0316
22	12.0415 8172	11.5351 9562	11.0612 4050	10.6171 9101	10.2007 4366
23	12.3033 7898	11.7701 3673	11.2721 8738	10.8066 8931	10.3710 5895
24	12.5503 5753	11.9907 3871	11.4693 3400	10.9829 6680	10.5287 5828
25	12.7833 5616	12.1978 7673	11.6535 8318	11.1469 4586	10.6747 7619
26	13.0031 6619	12.3923 7251	11.8257 7867	11.2994 8452	10.8099 7795
27	13.2105 3414	12.5749 9766	11.9867 0904	11.4413 8095	10.9351 6477
28	13.4061 6428	12.7464 7668	12.1371 1125	11.5733 7763	11.0510 7849
29	13.5907 2102	12.9074 8984	12.2776 7407	11.6961 6524	11.1584 0601
30	13.7648 3115	13.0586 7591	12.4090 4118	11.8103 8627	11.2577 8334
31	13.9290 8599	13.2006 3465	12.5318 1419	11.9166 3839	11.3497 9939
32	14.0840 4339	13.3339 2925	12.6465 5532	12.0154 7757	11.4349 9944
33	14.2302 2961	13.4590 8850	12.7537 9002	12.1074 2099	11.5138 8837
34	14.3681 4114	13.5766 0892	12.8540 0936	12.1929 4976	11.5869 3367
35	14.4982 4636	13.6869 5673	12.9476 7230	12.2725 1141	11.6545 6822
36	14.6209 8713	13.7905 6970	13.0352 0776	12.3465 2224	11.7171 9279
37	14.7367 8031	13.8878 5887	13.1170 1660	12.4153 6952	11.7751 7851
38	14.8460 1916	13.9792 1021	13.1934 7345	12.4794 1351	11.8288 6899
39	14.9490 7468	14.0649 8611	13.2649 2846	12.5389 8931	11.8785 8240
40	15.0462 9687	14.1455 2687	13.3317 0884	12.5944 0866	11.9246 1333
41	15.1380 1592	14.2211 5199	13.3941 2041	12.6459 6155	11.9672 3457
42	15.2245 4332	14.2921 6149	13.4524 4898	12.6939 1772	12.0066 9867
43	15.3061 7294	14.3588 3708	13.5069 6167	12.7385 2811	12.0432 3951
44	15.3831 8202	14.4214 4327	13.5579 0810	12.7800 2615	12.0770 7362
45	15.4558 3209	14.4802 2842	13.6055 2159	12.8186 2898	12.1084 0150
46	15.5243 6990	14.5354 2575	13.6500 2018	12.8545 3858	12.1374 0880
47	15.5890 2821	14.5872 5422	13.6916 0764	12.8879 4287	12.1642 6741
48	15.6500 2661	14.6359 1946	13.7304 7443	12.9190 1662	12.1891 3649
49	15.7075 7227	14.6816 1451	13.7667 9853	12.9479 2244	12.2121 6341
50	15.7618 6064	14.7245 2067	13.8007 4629	12.9748 1157	12.2334 8464

ΠΙΝΑΚΑΣ V. $s_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.0025 (¼ %)	.004167 (5/12 %)	.005 (½ %)	.005833 (7/12 %)	.0075 (¾ %)
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000
2	2.0025 0000	2.0041 6667	2.0050 0000	2.0058 3333	2.0075 0000
3	3.0075 0625	3.0125 1736	3.0150 2500	3.0175 3403	3.0225 5625
4	4.0150 2502	4.0250 6952	4.0301 0013	4.0351 3631	4.0452 2542
5	5.0250 6258	5.0418 4064	5.0502 5063	5.0586 7460	5.0755 6461
6	6.0376 2523	6.0628 4831	6.0755 0188	6.0881 8354	6.1136 3135
7	7.0527 1930	7.0881 1018	7.1058 7939	7.1236 9794	7.1594 8358
8	8.0703 5110	8.1176 4397	8.1414 0879	8.1652 5285	8.2131 7971
9	9.0905 2697	9.1514 6749	9.1821 1583	9.2128 8349	9.2747 7856
10	10.1132 5329	10.1895 9860	10.2280 2641	10.2666 2531	10.3443 3940
11	11.1385 3642	11.2320 5526	11.2791 6654	11.3265 1396	11.4219 2194
12	12.1663 8277	12.2788 5549	12.3355 6237	12.3925 8529	12.5075 8636
13	13.1967 9872	13.3300 1739	13.3972 4018	13.4648 7537	13.6013 9325
14	14.2297 9072	14.3855 5913	14.4642 2639	14.5434 2048	14.7034 0370
15	15.2653 6520	15.4454 9896	15.5365 4752	15.6282 5710	15.8136 7923
16	16.3035 2861	16.5098 5520	16.6142 3026	16.7194 2193	16.9322 8183
17	17.3442 8743	17.5786 4627	17.6973 0141	17.8169 5189	18.0592 7394
18	18.3876 4815	18.6518 9063	18.7857 8791	18.9208 8411	19.1947 1849
19	19.4336 1727	19.7296 0684	19.8797 1685	20.0312 5593	20.3386 7888
20	20.4822 0131	20.8118 1353	20.9791 1544	21.1481 0493	21.4912 1897
21	21.5334 0682	21.8985 2942	22.0840 1101	22.2714 6887	22.6524 0312
22	22.5872 4033	22.9897 7330	23.1944 3107	23.4013 8577	23.8222 9614
23	23.6437 0843	24.0855 6402	24.3104 0323	24.5378 9386	25.0009 6336
24	24.7028 1770	25.1859 2053	25.4319 5524	25.6810 3157	26.1884 7059
25	25.7645 7475	26.2908 6187	26.5591 1502	26.8308 3759	27.3848 8411
26	26.8289 8619	27.4004 0713	27.6919 1059	27.9873 5081	28.5902 7075
27	27.8960 5865	28.5145 7549	28.8303 7015	29.1506 1036	29.8046 9778
28	28.9657 9880	29.6333 8622	29.9745 2200	30.3206 5558	31.0282 3301
29	30.0382 1330	30.7568 5866	31.1243 9461	31.4975 2607	32.2609 4476
30	31.1133 0883	31.8850 1224	32.2800 1658	32.6812 6164	33.5029 0184
31	32.1910 9210	33.0178 6646	33.4414 1666	33.8719 0233	34.7541 7361
32	33.2715 6983	34.1554 4090	34.6086 2375	35.0694 8843	36.0148 2991
33	34.3547 4876	35.2977 5524	35.7816 6686	36.2740 6045	37.2849 4113
34	35.4406 3563	36.4448 2922	36.9605 7520	37.4856 5913	38.5645 7819
35	36.5292 3722	37.5966 8268	38.1453 7807	38.7043 2548	39.8538 1253
36	37.6205 6031	38.7533 3552	39.3361 0497	39.9301 0071	41.1527 1612
37	38.7146 1171	39.9148 0775	40.5327 8549	41.1630 2630	42.4613 6149
38	39.8113 9824	41.0811 1945	41.7354 4942	42.4031 4395	43.7798 2170
39	40.9109 2674	42.2522 9078	42.9441 2666	43.6504 9562	45.1081 7037
40	42.0132 0405	43.4283 4199	44.1588 4730	44.9051 2352	46.4464 8164
41	43.1182 3706	44.6092 9342	45.3796 4153	46.1670 7007	47.7948 3026
42	44.2260 3265	45.7951 6547	46.6065 3974	47.4363 7798	49.1532 9148
43	45.3365 9774	46.9859 7866	47.8395 7244	48.7130 9018	50.5219 4117
44	46.4499 3923	48.1817 5357	49.0787 7030	49.9972 4988	51.9008 5573
45	47.5660 6408	49.3825 1088	50.3241 6415	51.2889 0050	53.2901 1215
46	48.6849 7924	50.5882 7134	51.5757 8498	52.5880 8575	54.6897 8799
47	49.8066 9169	51.7990 5581	52.8336 6390	53.8948 4959	56.0999 6140
48	50.9312 0842	53.0148 8521	54.0978 3222	55.2092 3621	57.5207 1111
49	52.0585 3644	54.2357 8056	55.3683 2138	56.5312 9009	58.9521 1644
50	53.1886 8278	55.4617 6298	56.6451 6299	57.8610 5595	60.3942 5732

ΠΙΝΑΚΑΣ V. $s_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.0025 (¼ %)	.004167 (5/12 %)	.005 (½ %)	.005833 (7/12 %)	.0075 (¾ %)
50	53.1886 828	55.4617 630	56.6451 630	57.8610 559	60.3942 573
51	54.3216 545	56.6928 537	57.9283 888	59.1985 788	61.8472 142
52	55.4574 586	57.9290 739	59.2180 307	60.5439 038	63.3110 684
53	56.5961 023	59.1704 450	60.5141 209	61.8970 766	64.7859 014
54	57.7375 925	60.4169 885	61.8166 915	63.2581 429	66.2717 956
55	58.8819 365	61.6687 260	63.1257 750	64.6271 487	67.7688 341
56	60.0291 413	62.9256 790	64.4414 038	66.0041 404	69.2771 003
57	61.1792 142	64.1878 694	65.7636 109	67.3891 646	70.7966 786
58	62.3321 622	65.4553 188	67.0924 289	68.7822 680	72.3276 537
59	63.4879 926	66.7280 493	68.4278 911	70.1834 979	73.8701 111
60	64.6467 126	68.0060 828	69.7700 305	71.5929 016	75.4241 369
61	65.8083 294	69.2894 415	71.1188 807	73.0105 269	76.9898 180
62	66.9728 502	70.5781 475	72.4744 751	74.4364 216	78.5672 416
63	68.1402 824	71.8722 231	73.8368 474	75.8706 341	80.1564 959
64	69.3106 331	73.1716 907	75.2060 317	77.3132 128	81.7576 696
65	70.4839 096	74.4765 728	76.5820 618	78.7642 065	83.3708 521
66	71.6601 194	75.7868 918	77.9649 721	80.2236 644	84.9961 335
67	72.8392 697	77.1026 706	79.3547 970	81.6916 358	86.6336 045
68	74.0213 679	78.4239 317	80.7515 710	83.1681 703	88.2833 566
69	75.2064 213	79.7506 981	82.1553 288	84.6533 180	89.9454 817
70	76.3944 374	81.0829 926	83.5661 055	86.1471 290	91.6200 729
71	77.5854 235	82.4208 384	84.9839 360	87.6496 539	93.3072 234
72	78.7793 870	83.7642 586	86.4088 557	89.1609 436	95.0070 276
73	79.9763 355	85.1132 753	87.8409 000	90.6810 491	96.7195 803
74	81.1762 763	86.4679 150	89.2801 046	92.2100 219	98.4449 771
75	82.3792 170	87.8281 980	90.7265 050	93.7479 137	100.1833 145
76	83.5851 651	89.1941 488	92.1801 375	95.2947 765	101.9346 893
77	84.7941 280	90.5657 911	93.6410 382	96.8506 627	103.6991 995
78	86.0061 133	91.9431 485	95.1092 434	98.4156 249	105.4769 435
79	87.2211 286	93.3262 450	96.5847 896	99.9897 160	107.2680 206
80	88.4391 814	94.7151 044	98.0677 136	101.5729 894	109.0725 307
81	89.6602 793	96.1097 506	99.5580 521	103.1654 985	110.8905 747
82	90.8844 300	97.5102 079	101.0558 424	104.7672 972	112.7222 540
83	92.1116 411	98.9165 004	102.5611 216	106.3784 398	114.5676 709
84	93.3419 202	100.3286 525	104.0739 272	107.9989 807	116.4269 284
85	94.5752 750	101.7466 886	105.5942 969	109.6289 748	118.3001 304
86	95.8117 132	103.1706 331	107.1222 683	111.2684 771	120.1873 814
87	97.0512 425	104.6005 108	108.6578 797	112.9175 432	122.0887 867
88	98.2938 706	106.0363 462	110.2011 691	114.5762 289	124.0044 526
89	99.5396 053	107.4781 643	111.7521 749	116.2445 902	125.9344 860
90	100.7884 543	108.9259 900	113.3109 358	117.9226 837	127.8789 947
91	102.0404 254	110.3798 483	114.8774 905	119.6105 660	129.8380 871
92	103.2955 265	111.8397 643	116.4518 779	121.3082 943	131.8118 728
93	104.5537 653	113.3057 634	118.0341 373	123.0159 260	133.8004 618
94	105.8151 497	114.7778 707	119.6243 080	124.7335 189	135.8039 653
95	107.0796 876	116.2561 118	121.2224 295	126.4611 311	137.8224 951
96	108.3473 868	117.7405 123	122.8285 417	128.1988 210	139.8561 638
97	109.6182 553	119.2310 978	124.4426 844	129.9466 475	141.9050 850
98	110.8923 009	120.7278 940	126.0648 978	131.7046 696	143.9693 731
99	112.1695 317	122.2309 269	127.6952 223	133.4729 468	146.0491 434
100	113.4499 555	123.7402 224	129.3336 984	135.2515 390	148.1445 120

ΠΙΝΑΚΑΣ V. $s_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.01 (1%)	.01125 (1⅛%)	.0125 (1¼%)	.015 (1½%)	.0175 (1¾%)
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000
2	2.0100 0000	2.0112 5000	2.0125 0000	2.0150 0000	2.0175 0000
3	3.0301 0000	3.0338 7656	3.0376 5625	3.0452 2500	3.0528 0625
4	4.0604 0100	4.0680 0767	4.0756 2695	4.0909 0338	4.1062 3036
5	5.1010 0501	5.1137 7276	5.1265 7229	5.1522 6693	5.1780 8939
6	6.1520 1506	6.1713 0270	6.1906 5444	6.2295 5093	6.2687 0596
7	7.2135 3521	7.2407 2986	7.2680 3762	7.3229 9419	7.3784 0831
8	8.2856 7056	8.3221 8807	8.3588 8809	8.4328 3911	8.5075 3045
9	9.3685 2727	9.4158 1269	9.4633 7420	9.5593 3169	9.6564 1224
10	10.4622 1254	10.5217 4058	10.5816 6637	10.7027 2167	10.8253 9945
11	11.5668 3467	11.6401 1016	11.7139 3720	11.8632 6249	12.0148 4394
12	12.6825 0301	12.7710 6140	12.8603 6142	13.0412 1143	13.2251 0371
13	13.8093 2804	13.9147 3584	14.0211 1594	14.2368 2960	14.4565 4303
14	14.9474 2132	15.0712 7662	15.1963 7988	15.4503 8205	15.7095 3253
15	16.0968 9554	16.2408 2848	16.3863 3463	16.6821 3778	16.9844 4935
16	17.2578 6449	17.4235 3780	17.5911 6382	17.9323 6984	18.2816 7721
17	18.4304 4314	18.6195 5260	18.8110 5336	19.2013 5539	19.6016 0656
18	19.6147 4757	19.8290 2257	20.0461 9153	20.4893 7572	20.9446 3468
19	20.8108 9504	21.0520 9907	21.2967 6893	21.7967 1636	22.3111 6578
20	22.0190 0399	22.2889 3519	22.5629 7854	23.1236 6710	23.7016 1119
21	23.2391 9403	23.5396 8571	23.8450 1577	24.4705 2211	25.1163 8938
22	24.4715 8598	24.8045 0717	25.1430 7847	25.8375 7994	26.5559 2620
23	25.7163 0183	26.0835 5788	26.4573 6695	27.2251 4364	28.0206 5490
24	26.9734 6485	27.3769 9790	27.7880 8403	28.6335 2080	29.5110 1637
25	28.2431 9950	28.6849 8913	29.1354 3508	30.0630 2361	31.0274 5915
26	29.5256 3150	30.0076 9526	30.4996 2802	31.5139 6896	32.5704 3969
27	30.8208 8781	31.3452 8183	31.8808 7337	32.9866 7850	34.1404 2238
28	32.1290 9669	32.6979 1625	33.2793 8429	34.4814 7867	35.7378 7977
29	33.4503 8766	34.0657 6781	34.6953 7659	35.9987 0085	37.3632 9267
30	34.7848 9153	35.4490 0769	36.1290 6880	37.5386 8137	39.0171 5029
31	36.1327 4045	36.8478 0903	37.5806 8216	39.1017 6159	40.6999 5042
32	37.4940 6785	38.2623 4688	39.0504 4069	40.6882 8801	42.4121 9955
33	38.8690 0853	39.6927 9829	40.5385 7120	42.2986 1233	44.1544 1305
34	40.2576 9862	41.1393 4227	42.0453 0334	43.9330 9152	45.9271 1527
35	41.6602 7560	42.6021 5987	43.5708 6963	45.5920 8789	47.7308 3979
36	43.0768 7836	44.0814 3417	45.1155 0550	47.2759 6921	49.5661 2949
37	44.5076 4714	45.5773 5030	46.6794 4932	48.9851 0874	51.4335 3675
38	45.9527 2361	47.0900 9549	48.2629 4243	50.7198 8538	53.3336 2365
39	47.4122 5085	48.6198 5906	49.8662 2921	52.4806 8366	55.2669 6206
40	48.8863 7336	50.1668 3248	51.4895 5708	54.2678 9391	57.2341 3390
41	50.3752 3709	51.7312 0934	53.1331 7654	56.0819 1232	59.2357 3124
42	51.8789 8946	53.3131 8545	54.7973 4125	57.9231 4100	61.2723 5654
43	53.3977 7936	54.9129 5879	56.4823 0801	59.7919 8812	63.3446 2278
44	54.9317 5715	56.5307 2957	58.1883 3686	61.6888 6794	65.4531 5367
45	56.4810 7472	58.1667 0028	59.9156 9108	63.6142 0096	67.5985 8386
46	58.0458 8547	59.8210 7566	61.6646 3721	65.5684 1398	69.7815 5908
47	59.6263 4432	61.4940 6276	63.4354 4518	67.5519 4018	72.0027 3637
48	61.2226 0777	63.1858 7097	65.2283 8824	69.5652 1929	74.2627 8425
49	62.8348 3385	64.8967 1201	67.0437 4310	71.6086 9758	76.5623 8298
50	64.4631 8218	66.6268 0002	68.8817 8989	73.6828 2804	78.9022 2468

ΠΙΝΑΚΑΣ V. $s_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.01 (1 %)	.01125 ($1\frac{1}{8}$ %)	.0125 ($1\frac{1}{4}$ %)	.015 ($1\frac{1}{2}$ %)	.0175 ($1\frac{3}{4}$ %)
50	64.4631 822	66.6268 000	68.8817 899	73.6828 280	78.9022 247
51	66.1078 140	68.3763 515	70.7428 123	75.7880 705	81.2830 136
52	67.7688 921	70.1455 855	72.6270 974	77.9248 915	83.7054 663
53	69.4465 811	71.9347 233	74.5349 361	80.0937 649	86.1703 120
54	71.1410 469	73.7439 890	76.4666 228	82.2951 714	88.6782 925
55	72.8524 573	75.5736 088	78.4224 556	84.5295 989	91.2301 626
56	74.5809 819	77.4238 119	80.4027 363	86.7975 429	93.8266 904
57	76.3267 917	79.2948 298	82.4077 705	89.0995 061	96.4686 575
58	78.0900 597	81.1868 966	84.4378 676	91.4359 987	99.1568 590
59	79.8709 603	83.1002 492	86.4933 410	93.8075 386	101.8921 041
60	81.6696 699	85.0351 270	88.5745 078	96.2146 517	104.6752 159
61	83.4863 666	86.9917 722	90.6816 891	98.6578 715	107.5070 322
62	85.3212 302	88.9704 297	92.8152 102	101.1377 396	110.3884 052
63	87.1744 425	90.9713 470	94.9754 003	103.6548 057	113.3202 023
64	89.0461 869	92.9947 746	97.1625 928	106.2096 277	116.3033 058
65	90.9366 488	95.0409 659	99.3771 253	108.8027 722	119.3386 137
66	92.8460 153	97.1101 767	101.6193 393	111.4348 137	122.4270 394
67	94.7744 755	99.2026 662	103.8895 811	114.1063 359	125.5695 126
68	96.7222 202	101.3186 962	106.1882 008	116.8179 310	128.7669 791
69	98.6894 424	103.4585 315	108.5155 533	119.5701 999	132.0204 012
70	100.6763 368	105.6224 400	110.8719 978	122.3637 529	135.3307 583
71	102.6831 002	107.8106 925	113.2578 977	125.1992 092	138.6990 465
72	104.7099 312	110.0235 628	115.6736 215	128.0771 974	142 1262 798
73	106.7570 305	112.2613 278	118.1195 417	130.9983 553	145.6134 897
74	108.8246 008	114.5242 678	120.5960 360	133.9633 307	149.1617 258
75	110.9128 468	116.8126 658	123.1034 864	136.9727 806	152.7720 560
76	113.0219 753	119.1268 083	125.6422 800	140.0273 723	156.4455 670
77	115.1521 951	121.4669 849	128.2128 085	143.1277 829	160.1833 644
78	117.3037 170	123.8334 885	130.8154 686	146.2746 997	163.9865 733
79	119.4767 542	126.2266 152	133.4506 620	149.4688 202	167.8563 383
80	121.6715 217	128.6466 646	136.1187 953	152.7108 525	171.7938 242
81	123.8882 369	131.0939 396	138.8202 802	156.0015 153	175.8002 162
82	126.1271 193	133.5687 464	141.5555 337	159.3415 380	179.8767 200
83	128.3883 905	136.0713 948	144.3249 779	162.7316 611	184.0245 625
84	130.6722 744	138.6021 980	147.1290 401	166.1726 360	188.2449 924
85	132.9789 971	141.1614 727	149.9681 531	169.6652 255	192.5392 798
86	135.3087 871	143.7495 393	152.8427 550	173.2102 039	196.9087 172
87	137.6618 750	146.3667 216	155.7532 895	176.8083 569	201.3546 197
88	140.0384 937	149.0133 472	158.7002 056	180.4604 823	205.8783 256
89	142.4388 787	151.6897 474	161.6839 581	184 1673 895	210.4811 962
90	144.8632 675	154.3962 571	164.7050 076	187.9299 004	215.1646 172
91	147.3119 001	157.1332 149	167.7638 202	191.7488 489	219.9299 980
92	149.7850 191	159.9009 636	170.8608 680	195.6250 816	224.7787 729
93	152.2828 693	162.6998 495	173.9966 288	199.5594 578	229.7124 015
94	154.8056 980	165.5302 228	177.1715 867	203.5528 497	234.7323 685
95	157.3537 550	168.3924 378	180.3862 315	207.6061 425	239.8401 850
96	159.9272 926	171.2868 527	183.6410 594	211.7202 346	245.0373 882
97	162.5265 655	174.2138 298	186.9365 726	215.8960 381	250.3255 425
98	165.1518 311	177.1737 354	190.2732 798	220.1344 787	255.7062 395
99	167.8033 494	180.1669 399	193.6516 958	224.4364 959	261.1810 987
100	170.4813 829	183.1938 180	197.0723 420	228.8030 433	266.7517 679

ΠΙΝΑΚΑΣ V. $s_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.02 (2%)	.0225 (2¼%)	.025 (2½%)	.0275 (2¾%)	.03 (3%)
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000
2	2.0200 0000	2.0225 0000	2.0250 0000	2.0275 0000	2.0300 0000
3	3.0604 0000	3.0680 0625	3.0756 2500	3.0832 5625	3.0909 0000
4	4.1216 0800	4.1370 3639	4.1525 1563	4.1680 4580	4.1836 2700
5	5.2040 4016	5.2301 1971	5.2563 2852	5.2826 6706	5.3091 3581
6	6.3081 2096	6.3477 9740	6.3877 3673	6.4279 4040	6.4684 0988
7	7.4342 8338	7.4906 2284	7.5474 3015	7.6047 0876	7.6624 6218
8	8.5829 6905	8.6591 6186	8.7361 1590	8.8138 3825	8.8923 3605
9	9.7546 2843	9.8539 9300	9.9545 1880	10.0562 1880	10.1591 0613
10	10.9497 2100	11.0757 0784	11.2033 8177	11.3327 6482	11.4638 7931
11	12.1687 1542	12.3249 1127	12.4834 6631	12.6444 1585	12.8077 9569
12	13.4120 8973	13.6022 2177	13.7955 5297	13.9921 3729	14.1920 2956
13	14.6803 3152	14.9082 7176	15.1404 4179	15.3769 2107	15.6177 9045
14	15.9739 3815	16.2437 0788	16.5189 5284	16.7997 8639	17.0863 2416
15	17.2934 1692	17.6091 9130	17.9319 2666	18.2617 8052	18.5989 1389
16	18.6392 8525	19.0053 9811	19.3802 2483	19.7639 7948	20.1568 8130
17	20.0120 7096	20.4330 1957	20.8647 3045	21.3074 8892	21.7615 8774
18	21.4123 1238	21.8927 6251	22.3863 4871	22.8934 4487	23.4144 3537
19	22.8405 5863	23.3853 4966	23.9460 0743	24.5230 1460	25.1168 6844
20	24.2973 6980	24.9115 2003	25.5446 5761	26.1973 9750	26.8703 7449
21	25.7833 1719	26.4720 2923	27.1832 7405	27.9178 2593	28.6764 8572
22	27.2989 8354	28.0676 4989	28.8628 5590	29.6855 6615	30.5367 8030
23	28.8449 6321	29.6991 7201	30.5844 2730	31.5019 1921	32.4528 8370
24	30.4218 6247	31.3674 0338	32.3490 3798	33.3682 2199	34.4264 7022
25	32.0302 9972	33.0731 6996	34.1577 6393	35.2858 4810	36.4592 6432
26	33.6709 0572	34.8173 1628	36.0117 0803	37.2562 0892	38.5530 4225
27	35.3443 2383	36.6007 0590	37.9120 0073	39.2807 5467	40.7096 3352
28	37.0512 1031	38.4242 2178	39.8598 0075	41.3609 7542	42.9309 2252
29	38.7922 3451	40.2887 6677	41.8562 9577	43.4984 0224	45.2188 5020
30	40.5680 7921	42.1952 6402	43.9027 0316	45.6946 0831	47.5754 1571
31	42.3794 4079	44.1446 5746	46.0002 7074	47.9512 1003	50.0026 7818
32	44.2270 2961	46.1379 1226	48.1502 7751	50.2698 6831	52.5027 5852
33	46.1115 7020	48.1760 1528	50.3540 3445	52.6522 8969	55.0778 4128
34	48.0338 0160	50.2599 7563	52.6128 8531	55.1002 2765	57.7301 7652
35	49.9944 7763	52.3908 2508	54.9282 0744	57.6154 8391	60.4620 8181
36	51.9943 6719	54.5696 1864	57.3014 1263	60.1999 0972	63.2759 4427
37	54.0342 5453	56.7974 3506	59.7339 4794	62.8554 0724	66.1742 2259
38	56.1149 3962	59.0753 7735	62.2272 9664	65.5839 3094	69.1594 4927
39	58.2372 3841	61.4045 7334	64.7829 7906	68.3874 8904	72.2342 3275
40	60.4019 8318	63.7861 7624	67.4025 5354	71.2681 4499	75.4012 5973
41	62.6100 2284	66.2213 6521	70.0876 1737	74.2280 1898	78.6632 9753
42	64.8622 2330	68.7113 4592	72.8398 0781	77.2692 8950	82.0231 9645
43	67.1594 6777	71.2573 5121	75.6608 0300	80.3941 9496	85.4838 9234
44	69.5026 5712	73.8606 4161	78.5523 2308	83.6050 3532	89.0484 0911
45	71.8927 1027	76.5225 0605	81.5161 3116	86.9041 7379	92.7198 6139
46	74.3305 6447	79.2442 6243	84.5540 3443	90.2940 3857	96.5014 5723
47	76.8171 7576	82.0272 5834	87.6678 8530	93.7771 2463	100.3965 0095
48	79.3535 1928	84.8728 7165	90.8595 8243	97.3559 9556	104.4083 9598
49	81.9405 8966	87.7825 1126	94.1310 7199	101.0332 8544	108.5406 4785
50	84.5794 0145	90.7576 1776	97.4843 4879	104.8117 0079	112.7968 6729

ΠΙΝΑΚΑΣ V. $s_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.02 (2 %)	.0225 (2¼ %)	.025 (2½ %)	.0275 (2¾ %)	.03 (3 %)
50	84.5794 015	90.7576 178	97.4843 488	104.8117 008	112.7968 673
51	87.2709 895	93.7996 642	100.9214 575	108.6940 226	117.1807 733
52	90.0164 093	96.9101 566	104.4444 930	112.6831 082	121.6961 965
53	92.8167 375	100.0906 351	108.0556 063	116.7818 937	126.3470 824
54	95.6730 722	103.3426 744	111.7569 965	120.9933 957	131.1374 949
55	98.5865 337	106.6678 846	115.5509 214	125.3207 141	136.0716 197
56	101.5582 643	110.0679 120	119.4396 944	129.7670 337	141.1537 683
57	104.5894 296	113.5444 400	123.4256 868	134.3356 272	146.3883 814
58	107.6812 182	117.0991 899	127.5113 289	139.0298 569	151.7800 328
59	110.8348 426	120.7339 217	131.6991 121	143.8531 780	157.3334 338
60	114.0515 394	124.4504 349	135.9915 900	148.8091 404	163.0534 368
61	117.3325 702	128.2505 697	140.3913 797	153.9013 917	168.9460 399
62	120.6792 216	132.1362 075	144.9011 642	159.1336 800	175.0133 911
63	124.0928 060	136.1092 722	149.5236 933	164.5098 562	181.2637 028
64	127.5746 622	140.1717 308	154.2617 856	170.0338 773	187.7017 066
65	131.1261 554	144.3255 948	159.1183 303	175.7098 089	194.3327 578
66	134.7486 785	148.5729 207	164.0962 885	181.5418 286	201.1627 406
67	138.4436 521	152.9158 114	169.1986 957	187.5342 289	208.1976 228
68	142.2125 251	157.3564 171	174.4286 631	193.6914 202	215.4435 515
69	146.0567 756	161.8969 365	179.7893 797	200.0179 343	222.9068 580
70	149.9779 111	166.5396 176	185.2841 142	206.5184 275	230.5940 637
71	153.9774 694	171.2867 590	190.9162 171	213.1976 842	238.5118 856
72	158.0570 188	176.1407 111	196.6891 225	220.0606 205	246.6672 422
73	162.2181 591	181.1038 771	202.6063 506	227.1122 876	255.0672 595
74	166.4625 223	186.1787 143	208.6715 093	234.3578 755	263.7192 773
75	170.7917 728	191.3677 354	214.8862 970	241.8027 171	272.6308 556
76	175.2076 082	196.6735 094	221.2605 045	249.4522 918	281.8097 813
77	179.7117 604	202.0986 634	227.7920 171	257.3122 298	291.2640 747
78	184.3059 956	207.6458 833	234.4868 175	265.3883 162	301.0019 969
79	188.9921 155	213.3179 157	241.3489 880	273.6864 948	311.0320 568
80	193.7719 578	219.1175 688	248.3827 126	282.2128 735	321.3630 185
81	198.6473 970	225.0477 141	255.5922 805	290.9737 275	332.0039 091
82	203.6203 449	231.1112 876	262.9820 875	299.9755 050	342.9640 264
83	208.6927 518	237.3112 916	270.5566 397	309.2248 314	354.2529 472
84	213.8666 068	243.6507 957	278.3205 557	318.7285 142	365.8805 356
85	219.1439 390	250.1329 386	286.2785 695	328.4935 484	377.8560 517
86	224.5268 178	256.7609 297	294.4355 338	338.5271 209	390.1926 602
87	230.0173 541	263.5380 506	302.7964 221	348.8366 168	402.8084 400
88	235.6177 012	270.4676 567	311.3663 327	359.4296 237	415.9853 932
89	241.3300 552	277.5531 790	320.1504 910	370.3139 384	429.4649 550
90	247.1566 563	284.7981 255	329.1542 533	381.4975 717	443.3489 037
91	253.0997 894	292.2060 834	338.3831 096	392.9887 549	457.6493 708
92	259.1617 852	299.7807 202	347.8426 873	404.7959 457	472.3788 519
93	265.3450 209	307.5257 865	357.5387 545	416.9278 342	487.5502 174
94	271.6519 214	315.4451 166	367.4772 234	429.3933 496	503.1767 240
95	278.0849 598	323.5426 318	377.6641 540	442.2016 667	519.2720 257
96	284.6466 590	331.8223 410	388.1057 578	455.3622 126	535.8501 865
97	291.3395 922	340.2883 437	398.8084 018	468.8846 734	552.9256 920
98	298.1663 840	348.9448 314	409.7786 118	482.7790 019	570.5134 628
99	305.1297 117	357.7960 901	421.0230 771	497.0554 245	588.6288 667
100	312.2323 059	366.8465 021	432.5486 540	511.7244 487	607.2877 327

ΠΙΝΑΚΑΣ V. $s_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.035 (3½ %)	.04 (4 %)	.045 (4½ %)	.05 (5 %)	.055 (5½ %)
1	1.0000 000	1.0000 000	1.0000 000	1.0000 000	1.0000 000
2	2.0350 000	2.0400 000	2.0450 000	2.0500 000	2.0550 000
3	3.1062 250	3.1216 000	3.1370 250	3.1525 000	3.1680 250
4	4.2149 429	4.2464 640	4.2781 911	4.3101 250	4.3422 664
5	5.3624 659	5.4163 226	5.4707 097	5.5256 313	5.5810 910
6	6.5501 522	6.6329 755	6.7168 917	6.8019 128	6.8880 510
7	7.7794 075	7.8982 945	8.0191 518	8.1420 085	8.2668 938
8	9.0516 868	9.2142 263	9.3800 136	9.5491 089	9.7215 730
9	10.3684 958	10.5827 953	10.8021 142	11.0265 643	11.2562 595
10	11.7313 932	12.0061 071	12.2882 094	12.5778 925	12.8753 538
11	13.1419 919	13.4863 514	13.8411 788	14.2067 872	14.5834 982
12	14.6019 616	15.0258 055	15.4640 318	15.9171 265	16.3855 907
13	16.1130 303	16.6268 377	17.1599 133	17.7129 828	18.2867 981
14	17.6769 864	18.2919 112	18.9321 094	19.5986 320	20.2925 720
15	19.2956 809	20.0235 876	20.7840 543	21.5785 636	22.4086 635
16	20.9710 297	21.8245 311	22.7193 367	23.6574 918	24.6411 400
17	22.7050 157	23.6975 124	24.7417 069	25.8403 664	26.9964 027
18	24.4996 913	25.6454 129	26.8550 837	28.1323 847	29.4812 048
19	26.3571 805	27.6712 294	29.0635 625	30.5390 039	32.1026 711
20	28.2796 818	29.7780 786	31.3714 228	33.0659 541	34.8683 180
21	30.2694 707	31.9692 017	33.7831 368	35.7192 518	37.7860 755
22	32.3289 022	34.2479 698	36.3033 780	38.5052 144	40.8643 097
23	34.4604 137	36.6178 886	38.9370 300	41.4304 751	44.1118 467
24	36.6665 282	39.0826 041	41.6891 963	44.5019 989	47.5379 983
25	38.9498 567	41.6459 083	44.5652 101	47.7270 988	51.1525 882
26	41.3131 017	44.3117 446	47.5706 446	51.1134 538	54.9659 805
27	43.7590 602	47.0842 144	50.7113 236	54.6691 264	58.9891 094
28	46.2906 273	49.9675 830	53.9933 332	58.4025 828	63.2335 105
29	48.9107 993	52.9662 863	57.4230 332	62.3227 119	67.7113 535
30	51.6226 773	56.0849 378	61.0070 697	66.4388 475	72.4354 780
31	54.4294 710	59.3283 353	64.7523 878	70.7607 899	77.4194 293
32	57.3345 025	62.7014 687	68.6662 452	75.2988 294	82.6774 979
33	60.3412 101	66.2095 274	72.7562 263	80.0637 708	88.2247 603
34	63.4531 524	69.8579 085	77.0302 565	85.0669 594	94.0771 221
35	66.6740 127	73.6522 249	81.4966 180	90.3203 074	100.2513 638
36	70.0076 032	77.5983 138	86.1639 658	95.8363 227	106.7651 888
37	73.4578 693	81.7022 464	91.0413 443	101.6281 389	113.6372 742
38	77.0288 947	85.9703 363	96.1382 048	107.7095 458	120.8873 242
39	80.7249 060	90.4091 497	101.4644 240	114.0950 231	128.5361 271
40	84.5502 777	95.0255 157	107.0303 231	120.7997 742	136.6056 141
41	88.5095 375	99.8265 363	112.8466 876	127.8397 630	145.1189 228
42	92.6073 713	104.8195 978	118.9247 885	135.2317 511	154.1004 636
43	96.8486 293	110.0123 817	125.2764 040	142.9933 387	163.5759 891
44	101.2383 313	115.4128 770	131.9138 422	151.1430 056	173.5726 685
45	105.7816 729	121.0293 920	138.8499 651	159.7001 559	184.1191 653
46	110.4840 314	126.8705 677	146.0982 135	168.6851 637	195.2457 194
47	115.3509 725	132.9453 904	153.6726 331	178.1194 218	206.9842 339
48	120.3882 566	139.2632 060	161.5879 016	188.0253 929	219.3683 668
49	125.6018 456	145.8337 343	169.8593 572	198.4266 626	232.4336 270
50	130.9979 102	152.6670 837	178.5030 283	209.3479 957	246.2174 764

ΠΙΝΑΚΑΣ V. $s_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.06 (6 %)	.065 (6½ %)	.07 (7 %)	.075 (7½ %)	.08 (8 %)
1	1.0000 000	1.0000 000	1.0000 000	1.0000 000	1.0000 000
2	2.0600 000	2.0650 000	2.0700 000	2.0750 000	2.0800 000
3	3.1836 000	3.1992 250	3.2149 000	3.2306 250	3.2464 000
4	4.3746 160	4.4071 746	4.4399 430	4.4729 219	4.5061 120
5	5.6370 930	5.6936 410	5.7507 390	5.8083 910	5.8666 010
6	6.9753 185	7.0637 276	7.1532 907	7.2440 203	7.3359 290
7	8.3938 376	8.5228 699	8.6540 211	8.7873 219	8.9228 034
8	9.8974 679	10.0768 565	10.2598 026	10.4463 710	10.6366 276
9	11.4913 160	11.7318 522	11.9779 887	12.2298 488	12.4875 578
10	13.1807 949	13.4944 225	13.8164 480	14.1470 875	14.4865 625
11	14.9716 426	15.3715 600	15.7835 993	16.2081 191	16.6454 875
12	16.8699 412	17.3707 114	17.8884 513	18.4237 280	18.9771 265
13	18.8821 377	19.4998 076	20.1406 429	20.8055 076	21.4952 966
14	21.0150 659	21.7672 951	22.5504 879	23.3659 207	24.2149 203
15	23.2759 699	24.1821 693	25.1290 220	26.1183 647	27.1521 139
16	25.6725 281	26.7540 103	27.8880 536	29.0772 421	30.3242 830
17	28.2128 798	29.4930 210	30.8402 173	32.2580 352	33.7502 257
18	30.9056 525	32.4100 674	33.9990 325	35.6773 879	37.4502 437
19	33.7599 917	35.5167 218	37.3789 648	39.3531 919	41.4462 632
20	36.7855 912	38.8253 087	40.9954 923	43.3046 813	45.7619 643
21	39.9927 267	42.3489 537	44.8651 768	47.5525 324	50.4229 214
22	43.3922 903	46.1016 357	49.0057 392	52.1189 724	55.4567 552
23	46.9958 277	50.0982 420	53.4361 409	57.0278 953	60.8932 956
24	50.8155 774	54.3546 278	58.1766 708	62.3049 874	66.7647 592
25	54.8645 120	58.8876 786	63.2490 377	67.9778 615	73.1059 400
26	59.1563 827	63.7153 777	68.6764 704	74.0762 011	79.9544 151
27	63.7057 657	68.8568 772	74.4838 233	80.6319 162	87.3507 684
28	68.5281 116	74.3325 743	80.6976 909	87.6793 099	95.3388 298
29	73.6397 983	80.1641 916	87.3465 293	95.2552 582	103.9659 362
30	79.0581 862	86.3748 640	94.4607 863	103.3994 025	113.2832 111
31	84.8016 774	92.9892 302	102.0730 414	112.1543 577	123.3458 680
32	90.8897 780	100.0335 302	110.2181 543	121.5659 345	134.2135 374
33	97.3431 647	107.5357 096	118.9334 251	131.6833 796	145.9506 204
34	104.1837 546	115.5255 308	128.2587 648	142.5596 331	158.6266 701
35	111.4347 799	124.0346 903	138.2368 784	154.2516 056	172.3168 037
36	119.1208 667	133.0969 451	148.9134 598	166.8204 760	187.1021 480
37	127.2681 187	142.7482 466	160.3374 020	180.3320 117	203.0703 198
38	135.9042 058	153.0268 826	172.5610 202	194.8569 126	220.3159 454
39	145.0584 581	163.9736 300	185.6402 916	210.4711 810	238.9412 210
40	154.7619 656	175.6319 159	199.6351 120	227.2565 196	259.0565 187
41	165.0476 836	188.0479 904	214.6095 698	245.3007 586	280.7810 402
42	175.9505 446	201.2711 098	230.6322 397	264.6983 155	304.2435 234
43	187.5075 772	215.3537 320	247.7764 965	285.5506 891	329.5830 053
44	199.7580 319	230.3517 245	266.1208 513	307.9669 908	356.9496 457
45	212.7435 138	246.3245 866	285.7493 108	332.0645 151	386.5056 174
46	226.5081 246	263.3356 848	306.7517 626	357.9693 537	418.4260 668
47	241.0986 121	281.4525 043	329.2243 860	385.8170 553	452.9001 521
48	256.5645 288	300.7469 170	353.2700 930	415.7533 344	490.1321 643
49	272.9584 006	321.2954 666	378.9989 995	447.9348 345	530.3427 374
50	290.3359 046	343.1796 720	406.5289 295	482.5299 471	573.7701 564

ΠΙΝΑΚΑΣ VI. $P_{\overline{n}|i} = \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

Χρεωλύσιο 1 νομισματικής μονάδας. Ποσό που πρέπει να καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου για να εξοφλείται δάνειο 1 νομισματικής μονάδας.

n	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	n
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1
2	0.4993 7578	0.4991 6805	0.4989 6050	0.4987 5312	0.4985 4591	0.4983 3887	2
3	0.3325 0139	0.3322 2469	0.3319 4829	0.3316 7221	0.3313 9643	0.3311 2095	3
4	0.2490 6445	0.2487 5347	0.2484 4291	0.2481 3279	0.2478 2310	0.2475 1384	4
5	0.1990 0250	0.1986 7110	0.1983 4026	0.1930 0997	0.1976 8024	0.1973 5105	5
6	0.1656 2803	0.1652 8317	0.1649 3898	0.1645 9546	0.1642 5260	0.1639 1042	6
7	0.1417 8928	0.1414 3491	0.1410 8133	0.1407 2854	0.1403 7653	0.1400 2531	7
8	0.1239 1035	0.1235 4895	0.1231 8845	0.1228 2886	0.1224 7018	0.1221 1240	8
9	0.1100 0462	0.1096 3785	0.1092 7209	0.1089 0736	0.1085 4365	0.1081 8096	9
10	0.0988 8015	0.0985 0915	0.0981 3929	0.0977 7057	0.0974 0299	0.0970 3654	10
11	0.0897 7840	0.0894 0402	0.0890 3090	0.0886 5903	0.0882 8842	0.0879 1905	11
12	0.0821 9370	0.0818 1657	0.0814 4082	0.0810 6643	0.0806 9341	0.0803 2176	12
13	0.0757 7595	0.0753 9656	0.0750 1866	0.0746 4224	0.0742 6730	0.0738 9385	13
14	0.0702 7510	0.0698 9383	0.0695 1416	0.0691 3609	0.0687 5962	0.0638 8474	14
15	0.0655 0777	0.0651 2491	0.0647 4378	0.0643 6436	0.0639 8666	0.0636 1067	15
16	0.0613 3642	0.0609 5223	0.0605 6988	0.0601 8937	0.0598 1068	0.0594 3382	16
17	0.0576 5587	0.0572 7056	0.0568 8720	0.0565 0579	0.0561 2632	0.0557 4880	17
18	0.0543 8433	0.0539 9807	0.0536 1387	0.0532 3173	0.0528 5165	0.0524 7363	18
19	0.0514 5722	0.0510 7015	0.0506 8525	0.0503 0253	0.0499 2198	0.0495 4361	19
20	0.0488 2288	0.0484 3511	0.0480 4963	0.0476 6645	0.0472 8556	0.0469 0696	20
21	0.0464 3947	0.0460 5111	0.0456 6517	0.0452 8163	0.0449 0050	0.0445 2176	21
22	0.0442 7278	0.0438 8393	0.0434 9760	0.0431 1380	0.0427 3251	0.0423 5374	22
23	0.0422 9455	0.0419 0528	0.0415 1865	0.0411 3465	0.0407 5329	0.0403 7456	23
24	0.0404 8121	0.0400 9159	0.0397 0472	0.0393 2061	0.0389 3925	0.0385 6062	24
25	0.0388 1298	0.0384 2307	0.0380 3603	0.0376 5186	0.0372 7055	0.0368 9210	25
26	0.0372 7312	0.0368 8297	0.0364 9581	0.0361 1163	0.0357 3043	0.0353 5220	26
27	0.0358 4736	0.0354 5702	0.0350 6978	0.0346 8565	0.0343 0460	0.0339 2664	27
28	0.0345 2347	0.0341 3299	0.0337 4572	0.0333 6167	0.0329 8082	0.0326 0317	28
29	0.0332 9093	0.0329 0033	0.0325 1307	0.0321 2914	0.0317 4853	0.0313 7123	29
30	0.0321 4059	0.0317 4992	0.0313 6270	0.0309 7892	0.0305 9857	0.0302 2166	30
31	0.0310 6449	0.0306 7378	0.0302 8663	0.0299 0304	0.0295 2299	0.0291 4649	31
32	0.0300 5569	0.0296 6496	0.0292 7791	0.0288 9453	0.0285 1482	0.0281 3875	32
33	0.0291 0806	0.0287 1734	0.0283 3041	0.0279 4727	0.0275 6791	0.0271 9231	33
34	0.0282 1620	0.0278 2551	0.0274 3873	0.0270 5586	0.0266 7687	0.0263 0176	34
35	0.0273 7533	0.0269 8470	0.0265 9809	0.0262 1550	0.0258 3691	0.0254 6231	35
36	0.0265 8121	0.0261 9065	0.0258 0423	0.0254 2194	0.0250 4376	0.0246 6970	36
37	0.0258 3004	0.0254 3957	0.0250 5336	0.0246 7139	0.0242 9365	0.0239 2013	37
38	0.0251 1843	0.0247 2808	0.0243 4208	0.0239 6045	0.0235 8316	0.0232 1020	38
39	0.0244 4335	0.0240 5311	0.0236 6736	0.0232 8607	0.0229 0925	0.0225 3687	39
40	0.0238 0204	0.0234 1194	0.0230 2644	0.0226 4552	0.0222 6917	0.0218 9739	40
41	0.0231 9204	0.0228 0209	0.0224 1685	0.0220 3631	0.0216 6046	0.0212 8928	41
42	0.0226 1112	0.0222 2133	0.0218 3637	0.0214 5622	0.0210 8087	0.0207 1031	42
43	0.0220 5724	0.0216 6762	0.0212 8295	0.0209 0320	0.0205 2836	0.0201 5843	43
44	0.0215 2855	0.0211 3912	0.0207 5474	0.0203 7541	0.0200 0110	0.0196 3180	44
45	0.0210 2339	0.0206 3415	0.0202 5008	0.0198 7117	0.0194 9740	0.0191 2875	45
46	0.0205 4022	0.0201 5118	0.0197 6743	0.0193 8894	0.0190 1571	0.0186 4772	46
47	0.0200 7762	0.0196 8880	0.0193 0537	0.0189 2733	0.0185 5465	0.0181 8732	47
48	0.0196 3433	0.0192 4572	0.0188 6263	0.0184 8503	0.0181 1291	0.0177 4626	48
49	0.0192 0915	0.0188 2077	0.0184 3801	0.0180 6087	0.0176 8932	0.0173 2334	49
50	0.0188 0099	0.0184 1285	0.0180 3044	0.0176 5376	0.0172 8278	0.0169 1749	50

ΠΙΝΑΚΑΣ VI. $P_{\overline{n}|i} = \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

Χρεωλύσιο 1 νομισματικής μονάδας. Ποσό που πρέπει να καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου για να εξοφλείται δάνειο 1 νομισματικής μονάδας.

n	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	n
51	0.0184 0886	0.0180 2096	0.0176 3891	0.0172 6269	0.0168 9230	0.0165 2770	51
52	0.0180 3184	0.0176 4418	0.0172 6249	0.0168 8675	0.0165 1694	0.0161 5304	52
53	0.0176 6906	0.0172 8165	0.0169 0033	0.0165 2507	0.0161 5585	0.0157 9266	53
54	0.0173 1974	0.0169 3259	0.0165 5164	0.0161 7686	0.0158 0824	0.0154 4576	54
55	0.0169 8314	0.0165 9625	0.0162 1567	0.0158 4139	0.0154 7337	0.0151 1160	55
56	0.0166 5858	0.0162 7196	0.0158 9176	0.0155 1797	0.0151 5056	0.0147 8951	56
57	0.0163 4542	0.0159 5907	0.0155 7927	0.0152 0598	0.0148 3918	0.0144 7885	57
58	0.0160 4308	0.0156 5701	0.0152 7760	0.0149 0481	0.0145 3863	0.0141 7903	58
59	0.0157 5101	0.0153 6522	0.0149 8620	0.0146 1392	0.0142 4836	0.0138 8949	59
60	0.0154 6869	0.0150 8319	0.0147 0457	0.0143 3280	0.0139 6787	0.0136 0973	60
61	0.0151 9564	0.0148 1043	0.0144 3221	0.0140 6096	0.0136 9666	0.0133 3926	61
62	0.0149 3142	0.0145 4650	0.0141 6869	0.0137 9796	0.0134 3428	0.0130 7763	62
63	0.0146 7561	0.0142 9098	0.0139 1358	0.0135 4337	0.0131 8033	0.0128 2442	63
64	0.0144 2780	0.0140 4348	0.0136 6649	0.0132 9681	0.0129 3440	0.0125 7923	64
65	0.0141 8764	0.0138 0361	0.0134 2704	0.0130 5789	0.0126 9612	0.0123 4171	65
66	0.0139 5476	0.0135 7105	0.0131 9489	0.0128 2627	0.0124 6515	0.0121 1149	66
67	0.0137 2886	0.0133 4545	0.0129 6972	0.0126 0163	0.0122 4116	0.0118 8825	67
68	0.0135 0961	0.0131 2652	0.0127 5121	0.0123 8366	0.0120 2383	0.0116 7168	68
69	0.0132 9674	0.0129 1395	0.0125 3906	0.0121 7206	0.0118 1289	0.0114 6150	69
70	0.0130 8996	0.0127 0749	0.0123 3304	0.0119 6657	0.0116 0805	0.0112 5742	70
71	0.0128 8902	0.0125 0687	0.0121 3285	0.0117 6693	0.0114 0906	0.0110 5919	71
72	0.0126 9368	0.0123 1185	0.0119 3827	0.0115 7289	0.0112 1567	0.0108 6657	72
73	0.0125 0370	0.0121 2220	0.0117 4905	0.0113 8422	0.0110 2766	0.0106 7933	73
74	0.0123 1887	0.0119 3769	0.0115 6498	0.0112 0070	0.0108 4481	0.0104 9725	74
75	0.0121 3898	0.0117 5813	0.0113 8586	0.0110 2214	0.0106 6690	0.0103 2011	75
76	0.0119 6385	0.0115 8332	0.0112 1150	0.0108 4832	0.0104 9375	0.0101 4773	76
77	0.0117 9327	0.0114 1308	0.0110 4170	0.0106 7908	0.0103 2517	0.0099 7993	77
78	0.0116 2708	0.0112 4722	0.0108 7629	0.0105 1423	0.0101 6099	0.0098 1652	78
79	0.0114 6511	0.0110 8559	0.0107 1510	0.0103 5360	0.0100 0103	0.0096 5733	79
80	0.0113 0721	0.0109 2802	0.0105 5798	0.0101 9704	0.0098 4514	0.0095 0222	80
81	0.0111 5321	0.0107 7436	0.0104 0477	0.0100 4439	0.0096 9316	0.0093 5102	81
82	0.0110 0298	0.0106 2447	0.0102 5534	0.0098 9552	0.0095 4496	0.0092 0360	82
83	0.0108 5639	0.0104 7822	0.0101 0954	0.0097 5028	0.0094 0040	0.0090 5982	83
84	0.0107 1330	0.0103 3547	0.0099 6724	0.0096 0855	0.0092 5935	0.0089 1955	84
85	0.0105 7359	0.0101 9610	0.0098 2833	0.0094 7021	0.0091 2168	0.0087 8266	85
86	0.0104 3714	0.0100 6000	0.0096 9268	0.0093 3513	0.0089 8727	0.0086 4904	86
87	0.0103 0384	0.0099 2704	0.0095 6018	0.0092 0320	0.0088 5602	0.0085 1857	87
88	0.0101 7357	0.0097 9713	0.0094 3073	0.0090 7431	0.0087 2781	0.0083 9115	88
89	0.0100 4625	0.0096 7015	0.0093 0422	0.0089 4837	0.0086 0255	0.0082 6667	89
90	0.0099 2177	0.0095 4602	0.0091 8055	0.0088 2527	0.0084 8013	0.0081 4504	90
91	0.0098 0004	0.0094 2464	0.0090 5962	0.0087 0493	0.0083 6047	0.0080 2616	91
92	0.0096 8096	0.0093 0592	0.0089 4136	0.0085 8724	0.0082 4346	0.0079 0994	92
93	0.0095 6446	0.0091 8976	0.0088 2568	0.0084 7213	0.0081 2903	0.0077 9629	93
94	0.0094 5044	0.0090 7610	0.0087 1248	0.0083 5950	0.0080 1709	0.0076 8514	94
95	0.0093 3884	0.0089 6485	0.0086 0170	0.0082 4930	0.0079 0757	0.0075 7641	95
96	0.0092 2957	0.0088 5594	0.0084 9325	0.0081 4143	0.0078 0038	0.0074 7001	96
97	0.0091 2257	0.0087 4929	0.0083 8707	0.0080 3583	0.0076 9547	0.0073 6588	97
98	0.0090 1776	0.0086 4484	0.0082 8309	0.0079 3242	0.0075 9275	0.0072 6394	98
99	0.0089 1508	0.0085 4252	0.0081 8124	0.0078 3115	0.0074 9216	0.0071 6415	99
100	0.0088 1446	0.0084 4226	0.0080 8145	0.0077 3194	0.0073 9363	0.0070 6642	100

ΠΙΝΑΚΑΣ VI. $P_{\overline{n}|i} = \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

Χρεωλύσιο 1 νομισματικής μονάδας. Ποσό που πρέπει να καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου για να εξοφλείται δάνειο 1 νομισματικής μονάδας.

n	$\frac{1}{4}$%	$\frac{1}{3}$%	$\frac{5}{12}$%	$\frac{1}{2}$%	$\frac{7}{12}$%	$\frac{2}{3}$%	n
101	0.0087 1584	0.0083 4460	0.0079 8366	0.0076 3473	0.0072 9711	0.0069 7069	101
102	0.0086 1917	0.0082 4769	0.0078 8782	0.0075 3947	0.0072 0254	0.0068 7690	102
103	0.0085 2439	0.0081 5327	0.0077 9387	0.0074 4610	0.0071 0986	0.0067 8501	103
104	0.0084 3144	0.0080 6068	0.0077 0175	0.0073 5457	0.0070 1901	0.0066 9495	104
105	0.0083 4027	0.0079 6987	0.0076 1142	0.0072 6481	0.0069 2994	0.0066 0668	105
106	0.0082 5082	0.0078 8079	0.0075 2281	0.0071 7679	0.0068 4261	0.0065 2013	106
107	0.0081 6307	0.0077 9340	0.0074 3589	0.0070 9045	0.0067 5696	0.0064 3527	107
108	0.0080 7694	0.0077 0764	0.0073 5061	0.0070 0575	0.0066 7294	0.0063 5205	108
109	0.0079 9241	0.0076 2347	0.0072 6691	0.0069 2264	0.0065 9052	0.0062 7042	109
110	0.0079 0942	0.0075 4084	0.0071 8476	0.0068 4107	0.0065 0965	0.0061 9033	110
111	0.0078 2793	0.0074 5972	0.0071 0412	0.0067 6102	0.0064 3028	0.0061 1175	111
112	0.0077 4791	0.0073 8007	0.0070 2495	0.0066 8242	0.0063 5237	0.0060 3464	112
113	0.0076 6932	0.0073 0184	0.0069 4720	0.0066 0526	0.0062 7590	0.0059 5895	113
114	0.0075 9211	0.0072 2500	0.0068 7083	0.0065 2948	0.0062 0081	0.0058 8465	114
115	0.0075 1626	0.0071 4952	0.0067 9582	0.0064 5506	0.0061 2708	0.0058 1171	115
116	0.0074 4172	0.0070 7535	0.0067 2213	0.0063 8195	0.0060 5466	0.0057 4008	116
117	0.0073 6846	0.0070 0246	0.0066 4973	0.0063 1013	0.0059 8353	0.0056 6974	117
118	0.0072 9646	0.0069 3082	0.0065 7857	0.0062 3956	0.0059 1365	0.0056 0065	118
119	0.0072 2567	0.0068 6041	0.0065 0863	0.0061 7021	0.0058 4499	0.0055 3278	119
120	0.0071 5607	0.0067 9118	0.0064 3988	0.0061 0205	0.0057 7751	0.0054 6609	120
121	0.0070 8764	0.0067 2311	0.0063 7230	0.0060 3505	0.0057 1120	0.0054 0057	121
122	0.0070 2033	0.0066 5617	0.0063 0584	0.0059 6918	0.0056 4602	0.0053 3618	122
123	0.0069 5412	0.0065 9034	0.0062 4049	0.0059 0441	0.0055 8194	0.0052 7289	123
124	0.0068 8899	0.0065 2558	0.0061 7621	0.0058 4072	0.0055 1894	0.0052 1067	124
125	0.0068 2491	0.0064 6188	0.0061 1298	0.0057 7808	0.0054 5700	0.0051 4951	125
126	0.0067 6186	0.0063 9919	0.0060 5078	0.0057 1647	0.0053 9607	0.0050 8937	126
127	0.0066 9981	0.0063 3751	0.0059 8959	0.0056 5586	0.0053 3615	0.0050 3024	127
128	0.0066 3873	0.0062 7681	0.0059 2937	0.0055 9623	0.0052 7721	0.0049 7208	128
129	0.0065 7861	0.0062 1707	0.0058 7010	0.0055 3755	0.0052 1922	0.0049 1488	129
130	0.0065 1942	0.0061 5825	0.0058 1177	0.0054 7981	0.0051 6216	0.0048 5861	130
131	0.0064 6115	0.0061 0035	0.0057 5435	0.0054 2298	0.0051 0602	0.0048 0325	131
132	0.0064 0376	0.0060 4334	0.0056 9782	0.0053 6703	0.0050 5077	0.0047 4878	132
133	0.0063 4725	0.0059 8720	0.0056 4216	0.0053 1197	0.0049 9639	0.0046 9518	133
134	0.0062 9159	0.0059 3191	0.0055 8736	0.0052 5775	0.0049 4286	0.0046 4244	134
135	0.0062 3675	0.0058 7745	0.0055 3339	0.0052 0436	0.0048 9016	0.0045 9052	135
136	0.0061 8274	0.0058 2381	0.0054 8023	0.0051 5179	0.0048 3828	0.0045 3942	136
137	0.0061 2952	0.0057 7097	0.0054 2787	0.0051 0002	0.0047 8719	0.0044 8911	137
138	0.0060 7707	0.0057 1890	0.0053 7628	0.0050 4902	0.0047 3688	0.0044 3959	138
139	0.0060 2539	0.0056 6760	0.0053 2546	0.0049 9879	0.0046 8733	0.0043 9082	139
140	0.0059 7446	0.0056 1704	0.0052 7539	0.0049 4930	0.0046 3853	0.0043 4280	140
141	0.0059 2425	0.0055 6721	0.0052 2604	0.0049 0055	0.0045 9046	0.0042 9551	141
142	0.0058 7476	0.0055 1809	0.0051 7741	0.0048 5250	0.0045 4311	0.0042 4893	142
143	0.0058 2597	0.0054 6968	0.0051 2948	0.0048 0516	0.0044 9645	0.0042 0305	143
144	0.0057 7787	0.0054 2195	0.0050 8224	0.0047 5850	0.0044 5048	0.0041 5786	144
145	0.0057 3043	0.0053 7489	0.0050 3566	0.0047 1252	0.0044 0518	0.0041 1333	145
146	0.0056 8365	0.0053 2849	0.0049 8975	0.0046 6718	0.0043 6053	0.0040 6947	146
147	0.0056 3752	0.0052 8273	0.0049 4447	0.0046 2250	0.0043 1653	0.0040 2624	147
148	0.0055 9201	0.0052 3760	0.0048 9983	0.0045 7844	0.0042 7316	0.0039 8364	148
149	0.0055 4712	0.0051 9309	0.0048 5580	0.0045 3500	0.0042 3040	0.0039 4166	149
150	0.0055 0284	0.0051 4919	0.0048 1238	0.0044 9217	0.0041 8825	0.0039 0029	150

ΠΙΝΑΚΑΣ VI. $P_{\overline{n}|i} = \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

Χρεωλύσιο 1 νομισματικής μονάδας. Ποσό που πρέπει να καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου για να εξοφλείται δάνειο 1 νομισματικής μονάδας.

n	$\frac{3}{4}\%$	1%	$1\frac{1}{4}\%$	$1\frac{1}{2}\%$	$1\frac{3}{4}\%$	2%	n
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1
2	0.4981 3200	0.4975 1244	0.4968 9441	0.4962 7792	0.4956 6295	0.4950 4950	2
3	0.3308 4579	0.3300 2211	0.3292 0117	0.3283 8296	0.3275 6746	0.3267 5467	3
4	0.2472 0501	0.2462 8109	0.2453 6102	0.2444 4479	0.2435 3237	0.2426 2375	4
5	0.1970 2242	0.1960 3980	0.1950 6211	0.1940 8932	0.1931 2142	0.1921 5839	5
6	0.1635 6891	0.1625 4837	0.1615 3381	0.1605 2521	0.1595 2256	0.1585 2581	6
7	0.1396 7488	0.1386 2828	0.1375 8872	0.1365 5616	0.1355 3059	0.1345 1196	7
8	0.1217 5552	0.1206 9029	0.1196 3314	0.1185 8402	0.1175 4292	0.1165 0980	8
9	0.1078 1929	0.1067 4036	0.1056 7055	0.1046 0982	0.1035 5813	0.1025 1544	9
10	0.0966 7123	0.0955 8208	0.0945 0307	0.0934 3418	0.0923 7534	0.0913 2653	10
11	0.0875 5094	0.0864 5408	0.0853 6839	0.0842 9384	0.0832 3038	0.0821 7794	11
12	0.0799 5148	0.0788 4879	0.0777 5831	0.0766 7999	0.0756 1377	0.0745 5960	12
13	0.0735 2188	0.0724 1482	0.0713 2100	0.0702 4036	0.0691 7283	0.0681 1835	13
14	0.0680 1146	0.0669 0117	0.0658 0515	0.0647 2332	0.0636 5562	0.0626 0197	14
15	0.0632 3639	0.0621 2378	0.0610 2646	0.0599 4436	0.0588 7739	0.0578 2547	15
16	0.0590 5879	0.0579 4460	0.0568 4672	0.0557 6508	0.0546 9958	0.0536 5013	16
17	0.0553 7321	0.0542 5806	0.0531 6023	0.0520 7966	0.0510 1623	0.0499 6984	17
18	0.0520 9766	0.0509 8205	0.0498 8479	0.0488 0578	0.0477 4492	0.0467 0210	18
19	0.0491 6740	0.0480 5175	0.0469 5548	0.0458 7847	0.0448 2061	0.0437 8177	19
20	0.0465 3063	0.0454 1531	0.0443 2039	0.0432 4574	0.0421 9122	0.0411 5672	20
21	0.0441 4543	0.0430 3075	0.0419 3749	0.0408 6550	0.0398 1464	0.0387 8477	21
22	0.0419 7748	0.0408 6372	0.0397 7238	0.0387 0332	0.0376 5638	0.0366 3140	22
23	0.0399 9846	0.0388 8584	0.0377 9666	0.0367 3075	0.0356 8796	0.0346 6810	23
24	0.0381 8474	0.0370 7347	0.0359 8665	0.0349 2410	0.0338 8565	0.0328 7110	24
25	0.0365 1650	0.0354 0675	0.0343 2247	0.0332 6345	0.0322 2952	0.0312 2044	25
26	0.0349 7693	0.0338 6888	0.0327 8729	0.0317 3196	0.0307 0269	0.0296 9923	26
27	0.0335 5176	0.0324 4553	0.0313 6677	0.0303 1527	0.0292 9079	0.0282 9309	27
28	0.0322 2871	0.0311 2444	0.0300 4863	0.0290 0108	0.0279 8151	0.0269 8967	28
29	0.0309 9723	0.0298 9502	0.0288 2228	0.0277 7878	0.0267 6424	0.0257 7836	29
30	0.0298 4816	0.0287 4811	0.0276 7854	0.0266 3919	0.0256 2975	0.0246 4992	30
31	0.0287 7352	0.0276 7573	0.0266 0942	0.0255 7430	0.0245 7005	0.0235 9635	31
32	0.0277 6634	0.0266 7089	0.0256 0791	0.0245 7710	0.0235 7812	0.0226 1061	32
33	0.0268 2048	0.0257 2744	0.0246 6786	0.0236 4144	0.0226 4779	0.0216 8653	33
34	0.0259 3053	0.0248 3997	0.0237 8387	0.0227 6189	0.0217 7363	0.0208 1867	34
35	0.0250 9170	0.0240 0368	0.0229 5111	0.0219 3363	0.0209 5082	0.0200 0221	35
36	0.0242 9973	0.0232 1431	0.0221 6533	0.0211 5240	0.0201 7507	0.0192 3285	36
37	0.0235 5082	0.0224 6805	0.0214 2270	0.0204 1437	0.0194 4257	0.0185 0678	37
38	0.0228 4157	0.0217 6150	0.0207 1983	0.0197 1613	0.0187 4990	0.0178 2057	38
39	0.0221 6893	0.0210 9160	0.0200 5365	0.0190 5463	0.0180 9399	0.0171 7114	39
40	0.0215 3016	0.0204 5560	0.0194 2141	0.0184 2710	0.0174 7209	0.0165 5575	40
41	0.0209 2276	0.0198 5102	0.0188 2063	0.0178 3106	0.0168 8170	0.0159 7188	41
42	0.0203 4452	0.0192 7563	0.0182 4906	0.0172 6426	0.0163 2057	0.0154 1729	42
43	0.0197 9338	0.0187 2737	0.0177 0466	0.0167 2465	0.0157 8666	0.0148 8993	43
44	0.0192 6751	0.0182 0441	0.0171 8557	0.0162 1038	0.0152 7810	0.0143 8794	44
45	0.0187 6521	0.0177 0505	0.0166 9012	0.0157 1976	0.0147 9321	0.0139 0962	45
46	0.0182 8495	0.0172 2775	0.0162 1675	0.0152 5125	0.0143 3043	0.0134 5342	46
47	0.0178 2532	0.0167 7111	0.0157 6406	0.0148 0342	0.0138 8836	0.0130 1792	47
48	0.0173 8504	0.0163 3384	0.0153 3075	0.0143 7500	0.0134 6569	0.0126 0184	48
49	0.0169 6292	0.0159 1474	0.0149 1563	0.0139 6478	0.0130 6124	0.0122 0396	49
50	0.0165 5787	0.0155 1273	0.0145 1763	0.0135 7168	0.0126 7391	0.0118 2321	50

ΠΙΝΑΚΑΣ VI. $P_{\overline{n}|i} = \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

Χρεωλύσιο 1 νομισματικής μονάδας. Ποσό που πρέπει να καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου για να εξοφλείται δάνειο 1 νομισματικής μονάδας.

n	$\frac{3}{4}$%	1%	$1\frac{1}{4}$%	$1\frac{1}{2}$%	$1\frac{3}{4}$%	2%	n
51	0.0161 6888	0.0151 2680	0.0141 3571	0.0131 9469	0.0123 0269	0.0114 5856	51
52	0.0157 9503	0.0147 5603	0.0137 6897	0.0128 3287	0.0119 4665	0.0111 0909	52
53	0.0154 3546	0.0143 9956	0.0134 1653	0.0124 8537	0.0116 0492	0.0107 7392	53
54	0.0150 8938	0.0140 5658	0.0130 7760	0.0121 5138	0.0112 7672	0.0104 5226	54
55	0.0147 5605	0.0137 2637	0.0127 5145	0.0118 3018	0.0109 6129	0.0101 4337	55
56	0.0144 3478	0.0134 0824	0.0124 3739	0.0115 2106	0.0106 5795	0.0098 4656	56
57	0.0141 2496	0.0131 0156	0.0121 3478	0.0112 2341	0.0103 6606	0.0095 6120	57
58	0.0138 2597	0.0128 0573	0.0118 4303	0.0109 3661	0.0100 8503	0.0092 8667	58
59	0.0135 3727	0.0125 2020	0.0115 6158	0.0106 6012	0.0098 1430	0.0090 2243	59
60	0.0132 5836	0.0122 4445	0.0112 8993	0.0103 9343	0.0095 5336	0.0087 6797	60
61	0.0129 8873	0.0119 7800	0.0110 2758	0.0101 3604	0.0093 0172	0.0085 2278	61
62	0.0127 2795	0.0117 2041	0.0107 7410	0.0098 8751	0.0090 5892	0.0082 8643	62
63	0.0124 7560	0.0114 7125	0.0105 2904	0.0096 4741	0.0088 2455	0.0080 5848	63
64	0.0122 3127	0.0112 3013	0.0102 9203	0.0094 1534	0.0085 9821	0.0078 3855	64
65	0.0119 9460	0.0109 9667	0.0100 6268	0.0091 9094	0.0083 7952	0.0076 2624	65
66	0.0117 6524	0.0107 7052	0.0098 4065	0.0089 7386	0.0081 6813	0.0074 2122	66
67	0.0115 4286	0.0105 5136	0.0096 2560	0.0087 6376	0.0079 6372	0.0072 2316	67
68	0.0113 2716	0.0103 3889	0.0094 1724	0.0085 6033	0.0077 6597	0.0070 3173	68
69	0.0111 1785	0.0101 3280	0.0092 1527	0.0083 6329	0.0075 7459	0.0068 4665	69
70	0.0109 1464	0.0099 3282	0.0090 1941	0.0081 7235	0.0073 8930	0.0066 6765	70
71	0.0107 1728	0.0097 3870	0.0088 2941	0.0079 8727	0.0072 0985	0.0064 9446	71
72	0.0105 2554	0.0095 5019	0.0086 4501	0.0078 0779	0.0070 3600	0.0063 2683	72
73	0.0103 3917	0.0093 6706	0.0084 6600	0.0076 3368	0.0068 6750	0.0061 6454	73
74	0.0101 5796	0.0091 8910	0.0082 9215	0.0074 6473	0.0067 0413	0.0060 0736	74
75	0.0099 8170	0.0090 1609	0.0081 2325	0.0073 0072	0.0065 4570	0.0058 5508	75
76	0.0098 1020	0.0088 4784	0.0079 5910	0.0071 4146	0.0063 9200	0.0057 0751	76
77	0.0096 4328	0.0086 8416	0.0077 9953	0.0069 8676	0.0062 4285	0.0055 6447	77
78	0.0094 8074	0.0085 2488	0.0076 4436	0.0068 3645	0.0060 9806	0.0054 2576	78
79	0.0093 2244	0.0083 6983	0.0074 9341	0.0066 9036	0.0059 5748	0.0052 9123	79
80	0.0091 6821	0.0082 1885	0.0073 4652	0.0065 4832	0.0058 2093	0.0051 6071	80
81	0.0090 1790	0.0080 7179	0.0072 0356	0.0064 1019	0.0056 8828	0.0050 3405	81
82	0.0088 7136	0.0079 2851	0.0070 6437	0.0062 7583	0.0055 5936	0.0049 1110	82
83	0.0087 2847	0.0077 8887	0.0069 2881	0.0061 4509	0.0054 3406	0.0047 9173	83
84	0.0085 8908	0.0076 5273	0.0067 9675	0.0060 1784	0.0053 1223	0.0046 7581	84
85	0.0084 5308	0.0075 1998	0.0066 6808	0.0058 9396	0.0051 9375	0.0045 6321	85
86	0.0083 2034	0.0073 9050	0.0065 4267	0.0057 7333	0.0050 7850	0.0044 5381	86
87	0.0081 9076	0.0072 6418	0.0064 2041	0.0056 5584	0.0049 6636	0.0043 4750	87
88	0.0080 6423	0.0071 4089	0.0063 0119	0.0055 4138	0.0048 5724	0.0042 4416	88
89	0.0079 4064	0.0070 2056	0.0061 8491	0.0054 2984	0.0047 5102	0.0041 4370	89
90	0.0078 1989	0.0069 0306	0.0060 7146	0.0053 2113	0.0046 4760	0.0040 4602	90
91	0.0077 0190	0.0067 8832	0.0059 6076	0.0052 1516	0.0045 4690	0.0039 5101	91
92	0.0075 8657	0.0066 7624	0.0058 5272	0.0051 1182	0.0044 4882	0.0038 5859	92
93	0.0074 7382	0.0065 6673	0.0057 4724	0.0050 1104	0.0043 5327	0.0037 6868	93
94	0.0073 6356	0.0064 5971	0.0056 4425	0.0049 1273	0.0042 6017	0.0036 8118	94
95	0.0072 5571	0.0063 5511	0.0055 4366	0.0048 1681	0.0041 6944	0.0035 9602	95
96	0.0071 5020	0.0062 5284	0.0054 4541	0.0047 2321	0.0040 8101	0.0035 1313	96
97	0.0070 4696	0.0061 5284	0.0053 4941	0.0046 3186	0.0039 9480	0.0034 3242	97
98	0.0069 4592	0.0060 5503	0.0052 5560	0.0045 4268	0.0039 1074	0.0033 5383	98
99	0.0068 4701	0.0059 5936	0.0051 6391	0.0044 5560	0.0038 2876	0.0032 7729	99
100	0.0067 5017	0.0058 6574	0.0050 7428	0.0043 7057	0.0037 4880	0.0032 0274	100

ΠΙΝΑΚΑΣ VI. $P_{\overline{n}|i} = \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

Χρεωλύσιο 1 νομισματικής μονάδας. Ποσό που πρέπει να καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου για να εξοφλείται δάνειο 1 νομισματικής μονάδας.

n	$2\frac{1}{2}\%$	3%	$3\frac{1}{2}\%$	4%	$4\frac{1}{2}\%$	5%	n
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1
2	0.4938 2716	0.4926 1084	0.4914 0049	0.4901 9608	0.4889 9756	0.4878 0488	2
3	0.3251 3717	0.3235 3036	0.3219 3418	0.3203 4854	0.3187 7336	0.3172 0856	3
4	0.2408 1788	0.2390 2705	0.2372 5114	0.2354 9005	0.2337 4365	0.2320 1183	4
5	0.1902 4686	0.1883 5457	0.1864 8137	0.1846 2711	0.1827 9164	0.1809 7480	5
6	0.1565 4997	0.1545 9750	0.1526 6821	0.1507 6190	0.1488 7839	0.1470 1747	6
7	0.1324 9543	0.1305 0635	0.1285 4449	0.1266 0961	0.1247 0147	0.1228 1982	7
8	0.1144 6735	0.1124 5639	0.1104 7665	0.1085 2783	0.1066 0965	0.1047 2181	8
9	0.1004 5689	0.0984 3386	0.0964 4601	0.0944 9299	0.0925 7447	0.0906 9008	9
10	0.0892 5876	0.0872 3051	0.0852 4137	0.0832 9094	0.0813 7882	0.0795 0457	10
11	0.0801 0596	0.0780 7745	0.0760 9197	0.0741 4904	0.0722 4818	0.0703 8889	11
12	0.0724 8713	0.0704 6209	0.0684 8395	0.0665 5217	0.0646 6619	0.0628 2541	12
13	0.0660 4827	0.0640 2954	0.0620 6157	0.0601 4373	0.0582 7535	0.0564 5577	13
14	0.0605 3652	0.0585 2634	0.0565 7073	0.0546 6897	0.0528 2032	0.0510 2397	14
15	0.0557 6646	0.0537 6658	0.0518 2507	0.0499 4110	0.0481 1381	0.0463 4229	15
16	0.0515 9899	0.0496 1085	0.0476 8483	0.0458 2000	0.0440 1537	0.0422 6991	16
17	0.0479 2777	0.0459 5253	0.0440 4313	0.0421 9852	0.0404 1758	0.0386 9914	17
18	0.0446 7008	0.0427 0870	0.0408 1684	0.0389 9333	0.0372 3690	0.0355 4622	18
19	0.0417 6062	0.0398 1388	0.0379 4033	0.0361 3862	0.0344 0734	0.0327 4501	19
20	0.0391 4713	0.0372 1571	0.0353 6108	0.0335 8175	0.0318 7614	0.0302 4259	20
21	0.0367 8733	0.0348 7178	0.0330 3659	0.0312 8011	0.0296 0057	0.0279 9611	21
22	0.0346 4661	0.0327 4739	0.0309 3207	0.0291 9881	0.0275 4565	0.0259 7051	22
23	0.0326 9638	0.0308 1390	0.0290 1880	0.0273 0906	0.0256 8249	0.0241 3682	23
24	0.0309 1282	0.0290 4742	0.0272 7283	0.0255 8683	0.0239 8703	0.0224 7090	24
25	0.0292 7592	0.0274 2787	0.0256 7404	0.0240 1196	0.0224 3903	0.0209 5246	25
26	0.0277 6875	0.0259 3829	0.0242 0540	0.0225 6738	0.0210 2137	0.0195 6432	26
27	0.0263 7687	0.0245 6421	0.0228 5241	0.0212 3854	0.0197 1946	0.0182 9186	27
28	0.0250 8793	0.0232 9323	0.0216 0265	0.0200 1298	0.0185 2081	0.0171 2253	28
29	0.0238 9127	0.0221 1467	0.0204 4538	0.0188 7993	0.0174 1461	0.0160 4551	29
30	0.0227 7764	0.0210 1926	0.0193 7133	0.0178 3010	0.0163 9154	0.0150 5144	30
31	0.0217 3900	0.0199 9893	0.0183 7240	0.0168 5535	0.0154 4345	0.0141 3212	31
32	0.0207 6831	0.0190 4662	0.0174 4150	0.0159 4859	0.0145 6320	0.0132 8042	32
33	0.0198 5938	0.0181 5612	0.0165 7242	0.0151 0357	0.0137 4453	0.0124 9004	33
34	0.0190 0675	0.0173 2196	0.0157 5966	0.0143 1477	0.0129 8191	0.0117 5545	34
35	0.0182 0558	0.0165 3929	0.0149 9835	0.0135 7732	0.0122 7045	0.0110 7171	35
36	0.0174 5158	0.0158 0379	0.0142 8416	0.0128 8688	0.0116 0578	0.0104 3446	36
37	0.0167 4090	0.0151 1162	0.0136 1325	0.0122 3957	0.0109 8402	0.0098 3979	37
38	0.0160 7012	0.0144 5934	0.0129 8214	0.0116 3192	0.0104 0169	0.0092 8423	38
39	0.0154 3615	0.0138 4385	0.0123 8775	0.0110 6083	0.0098 5567	0.0087 6462	39
40	0.0148 3623	0.0132 6238	0.0118 2728	0.0105 2349	0.0093 4315	0.0082 7816	40
41	0.0142 6786	0.0127 1241	0.0112 9822	0.0100 1738	0.0088 6158	0.0078 2229	41
42	0.0137 2876	0.0121 9167	0.0107 0828	0.0095 4020	0.0084 0868	0.0073 9471	42
43	0.0132 1688	0.0116 9811	0.0103 2539	0.0090 8989	0.0079 8235	0.0069 9333	43
44	0.0127 3037	0.0112 2985	0.0098 7768	0.0086 6454	0.0075 8071	0.0066 1625	44
45	0.0122 6751	0.0107 8518	0.0094 5343	0.0082 6246	0.0072 0202	0.0062 6173	45
46	0.0118 2676	0.0103 6254	0.0090 5108	0.0078 8205	0.0068 4471	0.0059 2820	46
47	0.0114 0669	0.0099 6051	0.0086 6919	0.0075 2189	0.0065 0734	0.0056 1421	47
48	0.0110 0599	0.0095 7777	0.0083 0646	0.0071 8065	0.0061 8858	0.0053 1843	48
49	0.0106 2348	0.0092 1314	0.0079 6167	0.0068 5712	0.0058 8722	0.0050 3965	49
50	0.0102 5806	0.0088 6549	0.0076 3371	0.0065 5020	0.0056 0215	0.0047 7674	50

ΠΙΝΑΚΑΣ VI. $P_{\overline{n}|i} = \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

Χρεωλύσιο 1 νομισματικής μονάδας. Ποσό που πρέπει να καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου για να εξοφλείται δάνειο 1 νομισματικής μονάδας.

n	$2\frac{1}{2}\%$	3%	$3\frac{1}{2}\%$	4%	$4\frac{1}{2}\%$	5%	n
51	0.0099 0870	0.0085 3382	0.0073 2156	0.0062 5885	0.0053 3232	0.0045 2867	51
52	0.0095 7446	0.0082 1718	0.0070 2429	0.0059 8212	0.0050 7679	0.0042 9450	52
53	0.0092 5449	0.0079 1471	0.0067 4100	0.0057 1915	0.0048 3469	0.0040 7334	53
54	0.0089 4799	0.0076 2558	0.0064 7090	0.0054 6910	0.0046 0519	0.0038 6438	54
55	0.0086 5419	0.0073 4907	0.0062 1323	0.0052 3124	0.0043 8754	0.0036 6686	55
56	0.0083 7243	0.0070 8447	0.0059 6730	0.0050 0487	0.0041 8105	0.0034 8010	56
57	0.0081 0204	0.0068 3114	0.0057 3245	0.0047 8932	0.0039 8506	0.0033 0343	57
58	0.0078 4244	0.0065 8848	0.0055 0810	0.0045 8401	0.0037 9897	0.0031 3626	58
59	0.0075 9307	0.0063 5593	0.0052 9366	0.0043 8836	0.0036 2221	0.0029 7802	59
60	0.0073 5340	0.0061 3296	0.0050 8862	0.0042 0185	0.0034 5426	0.0028 2818	60
61	0.0071 2294	0.0059 1908	0.0048 9249	0.0040 2398	0.0032 9462	0.0026 8627	61
62	0.0069 0126	0.0057 1385	0.0047 0480	0,0038 5430	0.0031 4284	0.0025 5183	62
63	0.0066 8790	0.0055 1682	0.0045 2513	0.0036 9237	0.0029 9848	0.0024 2442	63
64	0.0064 8249	0.0053 2760	0.0043 5308	0.0035 3780	0.0028 6115	0.0023 0365	64
65	0.0062 8463	0.0051 4581	0.0041 8826	0.0033 9019	0.0027 3047	0.0021 8915	65
66	0.0060 9398	0.0049 7110	0.0040 3031	0.0032 4921	0.0026 0608	0.0020 8057	66
67	0.0059 1021	0.0048 0313	0.0038 7892	0.0031 1451	0.0024 8765	0.0019 7758	67
68	0.0057 3300	0.0046 4159	0.0037 3375	0.0029 8578	0.0023 7487	0.0018 7986	68
69	0.0055 6206	0.0044 8618	0.0035 9453	0.0028 6272	0.0022 6745	0.0017 8715	69
70	0.0053 9712	0.0043 3663	0.0034 6095	0.0027 4506	0.0021 6511	0.0016 9915	70
71	0.0052 3790	0.0041 9266	0.0033 3277	0.0026 3253	0.0020 6759	0.0016 1563	71
72	0.0050 8417	0.0040 5404	0.0032 0973	0.0025 2489	0.0019 7465	0.0015 3633	72
73	0.0049 3568	0.0039 2053	0.0030 9160	0.0024 2190	0.0018 8606	0.0014 6103	73
74	0.0047 9222	0.0037 9191	0.0029 7816	0.0023 2334	0.0018 0159	0.0013 8953	74
75	0.0046 5358	0.0036 6796	0.0028 6919	0.0022 2900	0.0017 2104	0.0013 2161	75
76	0.0045 1956	0.0035 4849	0.0027 6450	0.0021 3869	0.0016 4422	0.0012 5709	76
77	0.0043 8997	0.0034 3331	0.0026 6390	0.0020 5221	0.0015 7094	0.0011 9580	77
78	0.0042 6463	0.0033 2224	0.0025 6721	0.0019 6939	0.0015 0104	0.0011 3756	78
79	0.0041 4338	0.0032 1510	0.0024 7426	0.0018 9007	0.0014 3434	0.0010 8222	79
80	0.0040 2605	0.0031 1175	0.0023 8489	0.0018 1408	0.0013 7069	0.0010 2962	80
81	0.0039 1248	0.0030 1201	0.0022 9894	0.0017 4127	0.0013 0995	0.0009 7963	81
82	0.0038 0254	0.0029 1576	0.0022 1628	0.0016 7150	0.0012 5197	0.0009 3211	82
83	0.0036 9608	0.0028 2284	0.0021 3676	0.0016 0463	0.0011 9663	0.0008 8694	83
84	0.0035 9298	0.0027 3313	0.0020 6025	0.0015 4054	0.0011 4379	0.0008 4399	84
85	0.0034 9310	0.0026 4650	0.0019 8662	0.0014 7909	0.0010 9334	0.0008 0316	85
86	0.0033 9633	0.0025 6284	0.0019 1576	0.0014 2018	0.0010 4516	0.0007 6433	86
87	0.0033 0255	0.0024 8202	0.0018 4756	0.0013 6370	0.0009 9915	0.0007 2740	87
88	0.0032 1165	0.0024 0393	0.0017 8190	0.0013 0953	0.0009 5522	0.0006 9228	88
89	0.0031 2353	0.0023 2848	0.0017 1868	0.0012 5758	0.0009 1325	0.0006 5888	89
90	0.0030 3809	0.0022 5556	0.0016 5781	0.0012 0775	0.0008 7316	0.0006 2711	90
91	0.0029 5523	0.0021 8508	0.0015 9919	0.0011 5995	0.0008 3486	0.0005 9689	91
92	0.0028 7486	0.0021 1694	0.0015 4273	0.0011 1410	0.0007 9827	0.0005 6815	92
93	0.0027 9690	0.0020 5107	0.0014 8834	0.0010 7010	0.0007 6331	0.0005 4080	93
94	0.0027 2126	0.0019 8737	0.0014 3594	0.0010 2789	0.0007 2991	0.0005 1478	94
95	0.0026 4786	0.0019 2577	0.0013 8546	0.0009 8738	0.0006 9799	0.0004 9003	95
96	0.0025 7662	0.0018 6619	0.0013 3682	0.0009 4850	0.0006 6749	0.0004 6648	96
97	0.0025 0747	0.0018 0856	0.0012 8996	0.0009 1119	0.0006 3834	0.0004 4407	97
98	0.0024 4034	0.0017 5281	0.0012 4478	0.0008 7538	0.0006 1048	0.0004 2274	98
99	0.0023 7517	0.0016 9886	0.0012 0124	0.0008 4100	0.0005 8385	0.0004 0245	99
100	0.0023 1188	0.0016 4667	0.0011 5927	0.0008 0800	0.0005 5839	0.0003 8314	100

ΠΙΝΑΚΑΣ VI. $P_{\overline{n}|i} = \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

Χρεωλύσιο 1 νομισματικής μονάδας. Ποσό που πρέπει να καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου για να εξοφλείται δάνειο 1 νομισματικής μονάδας.

n	$5\frac{1}{2}\%$	6%	$6\frac{1}{2}\%$	7%	$7\frac{1}{2}\%$	8%	n
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1
2	0.4866 1800	0.4854 3689	0.4842 6150	0.4830 9179	0.4819 2771	0.4807 6923	2
3	0.3156 5407	0.3141 0981	0.3125 7570	0.3110 5167	0.3095 3763	0.3080 3351	3
4	0.2302 9449	0.2285 9149	0.2269 0274	0.2252 2812	0.2235 6751	0.2219 2080	4
5	0.1791 7644	0.1773 9640	0.1756 3454	0.1738 9069	0.1721 6472	0.1704 5645	5
6	0.1451 7895	0.1433 6263	0.1415 6831	0.1397 9580	0.1380 4489	0.1363 1539	6
7	0.1209 6442	0.1191 3502	0.1173 3137	0.1155 5322	0.1138 0032	0.1120 7240	7
8	0.1028 6401	0.1010 3594	0.0992 3730	0.0974 6776	0.0957 2702	0.0940 1476	8
9	0.0888 3946	0.0870 2224	0.0852 3803	0.0834 8647	0.0817 6716	0.0800 7971	9
10	0.0776 6777	0.0758 6796	0.0741 0469	0.0723 7750	0.0706 8593	0.0690 2949	10
11	0.0685 7065	0.0667 9294	0.0650 5521	0.0633 5690	0.0616 9747	0.0600 7634	11
12	0.0610 2923	0.0592 7703	0.0575 6817	0.0559 0199	0.0542 7783	0.0526 9502	12
13	0.0546 8426	0.0529 6011	0.0512 8256	0.0496 5085	0.0480 6420	0.0465 2181	13
14	0.0492 7912	0.0475 8491	0.0459 4048	0.0443 4494	0.0427 9737	0.0412 9685	14
15	0.0446 2560	0.0429 6276	0.0413 5278	0.0397 9462	0.0382 8724	0.0368 2954	15
16	0.0405 8254	0.0389 5214	0.0373 7757	0.0358 5765	0.0343 9116	0.0329 7687	16
17	0.0370 4197	0.0354 4480	0.0339 0633	0.0324 2519	0.0310 0003	0.0296 2943	17
18	0.0339 1992	0.0323 5654	0.0308 5461	0.0294 1260	0.0280 2896	0.0267 0210	18
19	0.0311 5006	0.0296 2086	0.0281 5575	0.0267 5301	0.0254 1090	0.0241 2763	19
20	0.0286 7933	0.0271 8456	0.0257 5640	0.0243 9293	0.0230 9219	0.0218 5221	20
21	0.0264 6478	0.0250 0455	0.0236 1333	0.0222 8900	0.0210 2937	0.0198 3225	21
22	0.0244 7123	0.0230 4557	0.0216 9120	0.0204 0577	0.0191 8687	0.0180 3207	22
23	0.0226 6965	0.0212 7848	0.0199 6078	0.0187 1393	0.0175 3528	0.0164 2217	23
24	0.0210 3580	0.0196 7900	0.0183 9770	0.0171 8902	0.0160 5008	0.0149 7796	24
25	0.0195 4935	0.0182 2672	0.0169 8148	0.0158 1052	0.0147 1067	0.0136 7878	25
26	0.0181 9307	0.0169 0435	0.0156 9480	0.0145 6103	0.0134 9961	0.0125 0713	26
27	0.0169 5228	0.0156 9717	0.0145 2288	0.0134 2573	0.0124 0204	0.0114 4810	27
28	0.0158 1440	0.0145 9255	0.0134 5305	0.0123 9193	0.0114 0520	0.0104 8891	28
29	0.0147 6857	0.0135 7961	0.0124 7440	0.0114 4865	0.0104 9811	0.0096 1654	29
30	0.0138 0539	0.0126 4891	0.0115 7744	0.0105 8640	0.0096 7124	0.0088 2743	30
31	0.0129 1665	0.0117 9222	0.0107 5393	0.0097 9691	0.0089 1628	0.0081 0728	31
32	0.0120 9519	0.0110 0234	0.0099 9665	0.0090 7292	0.0082 2599	0.0074 5081	32
33	0.0113 3469	0.0102 7293	0.0092 9924	0.0084 0807	0.0075 9397	0.0068 5163	33
34	0.0106 2958	0.0095 9843	0.0086 5610	0.0077 9674	0.0070 1461	0.0063 0411	34
35	0.0099 7493	0.0089 7386	0.0080 6226	0.0072 3396	0.0064 8291	0.0058 0326	35
36	0.0093 6635	0.0083 9483	0.0075 1332	0.0067 1531	0.0059 9447	0.0053 4467	36
37	0.0087 9993	0.0078 5743	0.0070 0534	0.0062 3685	0.0055 4533	0.0049 2440	37
38	0.0082 7217	0.0073 5812	0.0065 3480	0.0057 9505	0.0051 3197	0.0045 3894	38
39	0.0077 7991	0.0068 9377	0.0060 9854	0.0053 8676	0.0047 5124	0.0041 8513	39
40	0.0073 2034	0.0064 6154	0.0056 9373	0.0050 0914	0.0044 0031	0.0038 6016	40
41	0.0068 9090	0.0060 5886	0.0053 1779	0.0046 5962	0.0040 7663	0.0035 6149	41
42	0.0064 8927	0.0056 8342	0.0049 6842	0.0043 3591	0.0037 7789	0.0032 8684	42
43	0.0061 1337	0.0053 3312	0.0046 4352	0.0040 3590	0.0035 0201	0.0030 3414	43
44	0.0057 6128	0.0050 0606	0.0043 4119	0.0037 5769	0.0032 4710	0.0028 0152	44
45	0.0054 3127	0.0047 0050	0.0040 5968	0.0034 9957	0.0030 1146	0.0025 8728	45
46	0.0051 2175	0.0044 1485	0.0037 9743	0.0032 5996	0.0027 9354	0.0023 8991	46
47	0.0048 3129	0.0041 4768	0.0035 5300	0.0030 3744	0.0025 9190	0.0022 0799	47
48	0.0045 5854	0.0038 9765	0.0033 2505	0.0028 3070	0.0024 0527	0.0020 4027	48
49	0.0043 0230	0.0036 6356	0.0031 1240	0.0026 3853	0.0022 3247	0.0018 8557	49
50	0.0040 6145	0.0034 4429	0.0029 1393	0.0024 5985	0.0020 7241	0.0017 4286	50

ΠΙΝΑΚΑΣ VII.

Αριθμός ημερών του έτους, για τον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών.

ΗΜΕΡΑ	Ι	Φ	Μ	Α	Μ	Ι	Ι	Α	Σ	Ο	Ν	Δ	ΗΜΕΡΑ
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	1
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	2
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	3
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	4
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	5
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	6
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	7
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	8
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	9
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	10
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	11
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	12
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	13
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	14
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	15
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	16
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	17
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	18
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	19
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	20
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	21
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	22
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	23
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	24
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	25
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	26
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	27
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	28
29	29	..	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	29
30	30	..	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	30
31	31	..	90	...	151	...	212	243	...	304	...	365	31

Σημείωση: Για τα δίσεκτα έτη, κάθε αριθμός του πίνακα, από την 1η Μαρτίου και έπειτα, πρέπει να αυξάνεται κατά μία μονάδα.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

Εισαγωγή

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Η μέθοδος των τριών — Ποσοστά

Απλή μέθοδος των τριών

Σύνθετη μέθοδος των τριών

Ποσοστά

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

Μερισμός σε μέρη ανάλογα

Α. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΡΙΣΜΟΥ

Β. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

Απλός τόκος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

Προεξόφληση με απλό τόκο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

Γραμμάτια ισοδύναμα – Κοινή και μέση λήξη

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

Σύνθετος τόκος ή ανατοκισμός

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ

Ράντες

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ

ΔΑΝΕΙΑ ΕΝΙΑΙΑ

ΟΜΟΛΟΓΙΑΚΑ ΔΑΝΕΙΑ