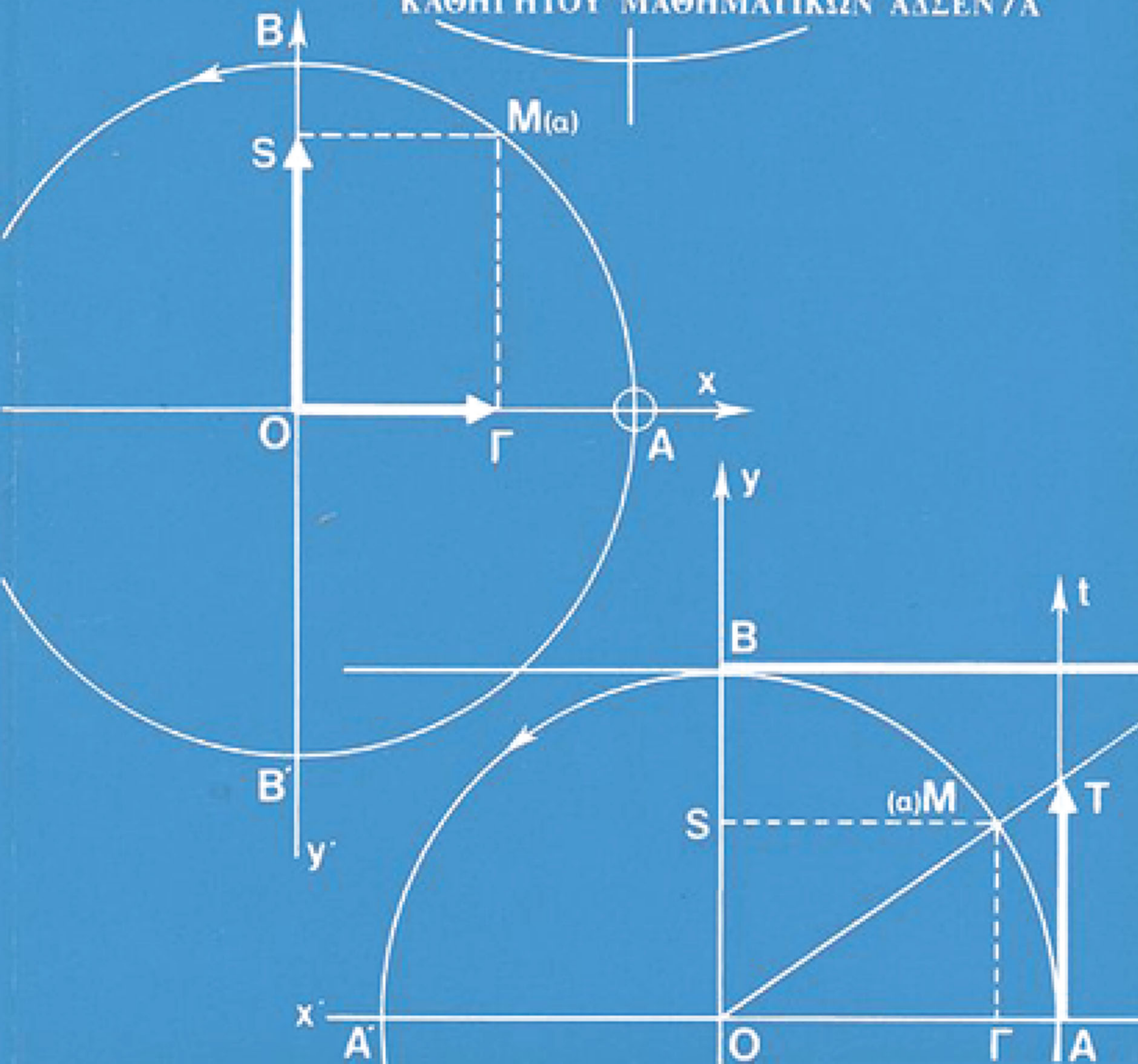
ΑΝΩΤΕΡΕΣ ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΣΧΟΛΕΣ
ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΔΣΕΝ - ΠΛΟΙΑΡΧΩΝ

Χρήστου Ι. Πέππα

ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΑΔΣΕΝ/Α



ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ

Α.Δ.Σ.Ε.Ν.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΕΜΠΟΡΙΚΗΣ ΝΑΥΤΙΛΙΑΣ

Το ίδρυμα Ευγενίδου, μετά τα υπ' αρ. 2117.2/1/91 της 2.7.91, 2117.1/4/91 της 1.10.91 και 2117.1/5/91 της 22.10.91 έγγραφα του ΥΕΝ και προκειμένου να βοηθήσει τους σπουδαστές των ΑΔΣΕΝ στη μελέτη των μαθημάτων τους, απεφάσισε κατ' εξαίρεση να προβεί στην προσωρινή εκτύπωση του βιβλίου Ανώτερα Μαθηματικά ΑΔΣΕΝ/Πλοιάρχων, όπως αυτό παραδόθηκε από το συγγραφέα.

Είναι προφανές ότι, εφ' όσον δεν έχει τηρηθεί η πάγια διαδικασία συγγραφής, ελέγχου και εκδόσεως του βιβλίου, η οποία ακολουθείται απαρεγκλίτως από την Επιτροπή Εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδου, τόσο η έκταση της ύλης του βιβλίου, όσο το περιεχόμενο και η στάθμη του, δεν εκφράζουν τις απόψεις της επιτροπής, αλλά μόνον του συγγραφέα.

Ι Δ Ρ Υ Μ Α   Ε Υ Γ Ε Ν Ι Δ Ο Υ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΔΣΕΝ - ΠΛΟΙΑΡΧΩΝ

ΧΡΗΣΤΟΥ Ι. ΠΕΠΠΑ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΑΔΣΕΝ - ΠΛΟΙΑΡΧΩΝ

ΑΘΗΝΑ
2006

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν σύγγραμμα αποτελεί υλοποίηση της από 2-7-91 διαταγής του Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας με την οποία μου ανατέθηκε η συγγραφή του, για να χρησιμοποιηθεί από το Ακαδημαϊκό Έτος 1991-92. Η διαταγή αυτή εξεδόθη λόγω της ελλείψεως καταλλήλου συγγράμματος Μαθηματικών γιά τους σπουδαστές-Πλοιάρχους των ΑΔΣΕΝ της χώρας μας, καί γιά τον πρόσθετο λόγο ότι έπρεπε να καλυφθεί νέα ύλη που προέκυπτε εκ της αλλαγής του τρόπου φοιτήσεως των σπουδαστών σε νέα προοδευτικότερα συστήματα σπουδών (σάντουιτς-κόρσες).

Η έλλειψη επαρκούς χρόνου για την συγγραφή ενός τέτοιου εκπαιδευτικού κειμένου ήταν ασφυκτική, όμως η υπερδεκαετής πείρα μου από την διδασκαλία των Μαθηματικών στους σπουδαστές Πλοιάρχους των ΑΔΣΕΝ με βοήθησε να ξεπεράσω το μεγάλο αυτό εμπόδιο και νομίζω ότι είμαι σε θέση να το παραδώσω πλέον στους σπουδαστές-Πλοιάρχους, έχοντας την βεβαιότητα ότι εξυπηρετεί πλήρως τους λόγους γιά τούς οποίους εξεδόθη. Αυτό θα το παρατηρήσει ο αναγνώστης από το πλήθος των εφαρμογών και παραδειγμάτων πάνω σε μαθηματικά θέματα που αφορούν τον Πλοίαρχο, αλλά και της προσπάθειας που έχει καταβληθεί ώστε να μην παύει να είναι ένα αυστηρό Μαθηματικό κείμενο που να καλύπτει τις ανάγκες ενός σπουδαστή-Πλοιάρχου Ανωτέρων Σχολών που επιθυμεί συνέχιση των σπουδών του σε Πανεπιστήμια ή Πολυτεχνεία της χώρας μας ή του εξωτερικού.

Επειδή το σύγγραμμα αυτό, λόγω των υπερβολικά στενών χρονικών περιθωρίων ήταν τεχνικώς αδύνατο να εκτυπωθεί εφέτος σε βιβλίο, αναγκάσθηκα καί να το καθαρογράψω και γι' αυτό ζητώ την επιείκεια του αναγνώστη για τυχόν παραλείψεις και αβλεψίες που πιθανόν να διαπιστωθούν σ' αυτό.

Ο συγγραφέας

Σεπτέμβριος 1991

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

1. ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

1.1. ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΤΕΡΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ

1.1.1 ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Λογάριθμος ενός θετικού αριθμού A, ως προς βάση τον αριθμό 10, λέγεται η δύναμη (ο εκθέτης) στην οποία πρέπει να υψωθεί η βάση 10 γιά να δώσει τον αριθμό A.

π.χ. Γνωρίζουμε ότι $10^3 = 1.000$. Άρα λογάριθμος του θετικού αριθμού 1.000 ως πρός βάση το 10, λέγεται ο εκθέτης 3 στον οποίο πρέπει να υψωθεί το 10 γιά να μας δώσει το 1.000. Συνεπώς:

$$10^3 = 1.000 \iff \log_{10} 1.000 = 3.$$

Επίσης:

$$\log_{10} 1 = 0 \quad \text{διότι} \quad 10^0 = 1$$

$$\log_{10} 10 = 1 \quad \text{διότι} \quad 10^1 = 10$$

$$\log_{10} 0{,}001 = -3 \quad \text{διότι} \quad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001.$$

Γενικά λοιπόν έχουμε:

$$10^k = A \iff \log_{10} A = k.$$

1.1.2 ΒΑΣΕΙΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

Σαν βάση των λογαρίθμων μπορεί να ληφθεί οποιοσδήποτε θετικός αριθμός π.χ. $5^2 = 25 \iff \log_5 25 = 2$

Συνήθως όμως σαν βάση των λογαρίθμων χρησιμοποιείται είτε ο ασύμμετρος αριθμός $e = 2{,}71828\ldots$, είτε ο αριθμός 10.

Εαν ληφθεί σαν βάση των λογαρίθμων ο αριθμός e τότε έχουμε το λεγόμενο "Νεπέρειο Λογαριθμικό Σύστημα" και οι λογάριθμοι λέγονται "Νεπέρειοι Λογάριθμοι", προς τιμήν του John Nappier (1550-1617) που πρώτος επενόησε τους λογαρίθμους. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\ln$ χωρίς να υποσημειώνουμε την βάση e (δηλαδή δεν γράφουμε $\ln_e = A$) π.χ.

Εάν $e^k = A \Leftrightarrow \ln A = k$.

Μέ τό σύστημα αυτό δέν θα ασχοληθούμε, διότι δεν το χρησιμοποιούν οι Ναυτιλόμενοι. Χρησιμοποιείται συνήθως στα Ανώτερα Μαθηματικά.

Εαν ληφθεί σαν βάση των λογαρίθμων ο αριθμός 10, τότε έχουμε το λεγόμενο "Δεκαδικό Σύστημα Λογαρίθμων" και οι λογάριθμοι λέγονται "δεκαδικοί λογάριθμοι" ή "κοινοί".

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε το σύμβολο log χωρίς να υποσημειώνουμε την βάση 10 (δηλαδή δεν γράφουμε $\log_{10} A$) π.χ.

Εάν $10^k = A \Leftrightarrow \log A = k$.

Το σύστημα αυτό ως πλέον πρακτικό και εύχρηστο, χρησιμοποιείται από τους Ναυτιλομένους και γι' αυτό θα το επεξηγήσουμε παρακάτω με κάθε λεπτομέρεια. (Τό σύστημα αυτό τό χρησιμοποίησε πρώτος, ο Άγγλος Henry Briggs (1.556-1630)).

1.1.3. ΥΠΑΡΞΗ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ.

Με τα Μαθηματικά αποδεικνύεται ότι:

α') Όλοι οι θετικοί αριθμοί έχουν λογάριθμο. Αυτός είναι πραγματικός αριθμός θετικός, αρνητικός ή μηδέν.

β') Αντιστρόφως, κάθε πραγματικός αριθμός είναι λογάριθμος ενός μόνο θετικού αριθμού.

γ') Στο δεκαδικό λογαριθμικό σύστημα, οι αριθμοί οι μεγαλύτεροι της μονάδος, έχουν θετικό λογάριθμο. Οι αριθμοί οι μικρότεροι της μονάδος (και βέβαια μεγαλύτεροι του 0) έχουν αρνητικό λογάριθμο (π.χ $\log \frac{1}{1000} = -3$ διότι $\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$)

δ') Οι μη θετικοί αριθμοί (δηλαδή οι αρνητικοί και το μηδέν) δεν έχουν λογάριθμο.

ε') Αυξανομένου του αριθμού αυξάνεται και ο λογάριθμος και αντιστρόφως.

στ') Ο λογάριθμος οποιουδήποτε αριθμού (εκτός των συμμέτρων δυνάμεων του 10) έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία μη περιοδικά. Προσεγγιστικά λαμβάνουμε τα πέντε πρώτα δεκαδικά ψηφία.

1.1.4. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

Αναφέρουμε εδώ τις ιδιότητες των λογαρίθμων, χωρίς την απόδειξή τους, αφού αυτή δεν ενδιαφέρει τους Ναυτιλομένους.

I. Ο λογάριθμος του γινομένου δύο ή περισσοτέρων θετικών αριθμών, ισούται με το άθροισμα των λογαρίθμων των αριθμών αυτών. Δηλαδή

$$\log A\cdot B = \log A + \log B$$
$$\log A\cdot B\cdot \Gamma = \log A + \log B + \log \Gamma \quad \text{κ.λ.π.}$$

II. Ο λογάριθμος του πηλίκου δύο θετικών αριθμών ισούται με τον λογάριθμο του διαιρετέου μείον τον λογάριθμο του διαιρέτη. Δηλαδή

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B.$$

III. Ο λογάριθμος μιάς δυνάμεως ενός θετικού αριθμού ισούται με το γινόμενο του εκθέτη επί τον λογάριθμο του αριθμού π.χ.

$$\log A^k = k\cdot \log A$$

IV. Ο λογάριθμος μιάς ρίζας θετικού αριθμού, ισούται με το πηλίκο του λογαρίθμου του αριθμού δια του δείκτη της ρίζας.

Δηλαδή
$$\log \sqrt[k]{A} = \frac{\log A}{k} = \frac{1}{k}\cdot \log A.$$

1.1.5. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ.

Χαρακτηριστικό ενός λογαρίθμου λέγεται το ακέραιο μέρος αυτού.

Γιά το χαρακτηριστικό ενός λογαρίθμου ισχύουν οι εξής δύο κανόνες:

1ο: Όταν ο αριθμός είναι μεγαλύτερος της μονάδας τότε το χαρακτηριστικό του λογαρίθμου του ισούται με το πλήθος των ψηφίων του αριθμού που βρίσκονται αριστερά της υποδιαστολής, ελαττωμένο κατά 1 π.χ.

$$\log 451{,}27 = 2{,}65444$$

διότι αριστερά της υποδιαστολής έχουμε τρία ψηφία. Άρα 3−1= = χαρακτηριστικό 2.

επίσης $\log 6457 = 3{,}81003$.

2ο: Όταν ο αριθμός είναι μικρότερος της μονάδας (αλλά βεβαίως θετικός) τότε το χαρακτηριστικό του λογαρίθμου του, βρίσκεται ως εξής: Αφαιρούμε τον αριθμό των μηδενικών που βρίσκονται αμέσως δεξιά της υποδιαστολής, από τον αριθμό 9 προσθέτοντας συγχρόνως στον λογάριθμο −10 π.χ.

$$\log 0{,}2 = 9{,}30103 - 10 = -0{,}69897$$

$$\log 0{,}04 = 8{,}60206 - 10 = -1{,}39794$$

<u>Σημείωση 1η:</u> Τα παραπάνω πρέπει να τα γνωρίζουμε καλά όταν ψάχνουμε τον λογάριθμο ενός αριθμού από τους λογαριθμικούς πίνακες. Εκεί βρίσκουμε το δεκαδικό μέρος των λογαρίθμων, το δε χαρακτηριστικό το υπολογίζουμε εμείς βάσει των παραπάνω κανόνων. Η προσπάθεια αυτή είναι επίπονος και δεν μας δίνει ακριβή αποτελέσματα.

Η σύγχρονη τεχνολογία μας έδωσε τα κομπιούτερ τσέπης από τα οποία υπολογίζουμε σε δευτερόλεπτα και το χαρακτηριστικό του λογαρίθμου και το δεκαδικό του μέρος συγχρόνως. Τα αποτελέσματα πού μας δίνουν οι υπολογιστές τσέπης, είναι απολύτου ακριβείας και δεν απαιτούνται παρά κλάσματα του δευτερολέπτου.

<u>Σημείωση 2η:</u> Οι αριθμοί 0,2 και 0,04 πού πήραμε σαν παράδειγμα πιό πάνω, αφού είναι μικρότεροι της μονάδας θα έχουν λογάριθμο αρνητικό (§1.1.3γ)

Πράγματι: $\log 0{,}2 = -0{,}69897$.

$$\log 0{,}04 = -1{,}39794$$

Επειδή όμως τα παλαιότερα χρόνια οι πλοίαρχοι δεν ήξεραν καλά μαθηματικά, για να μη μπερδεύονται με τους αρνητικούς αριθμούς και τις Αλγεβρικές πράξεις, το Αγγλικό Ναυαρχείο καθιέρωσε την πρόσθεση (με δανεισμό) του αριθμού 10 σε κάθε αρνητικό αποτέλεσμα και έτσι οι πράξεις διευκολύνονται κατά πολύ, αφού οι αριθμοί θετικοποιούνται. Το σύστημα αυτό παρέμεινε μέχρι σήμερα στους Ναυτιλομένους επειδή δεν αμφισβητείται η πρακτικότητά του λόγω της άνετης διεξαγωγής των οποιωνδήποτε πράξεων μόνο με θετικούς αριθμούς. Έτσι για τους λογαρίθμους των παραπάνω αριθμών με το σύστημα αυτό γράφουμε:

$$\log 0{,}2 = -0{,}69897 + 10 \text{ (δανεικά 10)} = 9{,}30103 - 10.$$

$$\log 0{,}04 = -1{,}39794 + 10 \text{ (δανεικά 10)} = 8{,}60206 - 10.$$

Έτσι όταν έχουμε να κάνουμε μία οποιαδήποτε πράξη μεταξύ των λογαρίθμων των αριθμών αυτών, π.χ. πρόσθεση, θα έχουμε (προσέξτε τον δανεισμό των 10):

$$\log 0{,}2 + \log 0{,}04 = (9{,}30103 - 10) + (8{,}60206 - 10) =$$

$$= (9{,}30103 + 8{,}60206) - 20 = 17{,}90309 - 20 \quad (= -2{,}09691).$$

Στο ίδιο βεβαίως αποτέλεσμα θα φθάσουμε εκτελώντας τις πράξεις αλγεβρικά:

$$\log 0{,}2 + \log 0{,}04 = (-0{,}69897) + (-1{,}39794) =$$

$$= -0{,}69897 - 1{,}39794 = -2{,}09691$$

Αντιστρόφως:

Για το αντίστροφο ισχύουν οι εξής δύο κανόνες:

1ος: Εάν το χαρακτηριστικό του λογαρίθμου είναι θετικό (όχι βέβαια πάνω από 6 γιατί στην Ναυτιλία, εν αντιθέσει με την Αστρονομία, δεν χρησιμοποιούμε τόσο τεράστιους αριθμούς) ή 0, ο αντίστοιχος αριθμός θα έχει τόσα ακέραια ψηφία, όσες μονάδες έχει το χαρακτηριστικό του συν ένα.

π.χ. $2{,}52755 = \log 337{,}09321$

$2^{ος}$: Εαν το χαρακτηριστικό του λογαρίθμου είναι θετικό, αλλά πολύ μεγάλο π.χ. 7, 8, 9 τότε σαφώς φαίνεται ότι του έχουμε δανείσει 10 μονάδες (και ότι δεν πρόκειται για τεράστιο αριθμό). Ο αντίστοιχος λοιπόν αριθμός θα είναι οπωσδήποτε μικρότερος της μονάδας και θα έχει τόσα μηδενικά αμέσως δεξιά της υποδιαστολής, όσο είναι το χαρακτηριστικό του, αφαιρουμένου από το 9. π.χ. $\log x = 9,30103 \Rightarrow x = 0,2$

(9-9=0 άρα κανένα μηδενικό αμέσως μετά την υποδιαστολή)

$$\log y = 8,60206 \Rightarrow y = 0,04$$

(9-8=1 μηδενικό αμέσως μετά την υποδιαστολή)

(Τα υπόλοιπα ψηφία βρίσκονται από τους πίνακες ή τον επιστημονικό υπολογιστή τσέπης).

1.2. ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ ΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ.

Μέχρι πρίν από λίγα μόλις χρόνια η εύρεση των λογαρίθμων γινόταν από ειδικούς πίνακες λογαρίθμων, τους λεγόμενους πίνακες Dupuis. Στην Ναυτιλία ειδικώς, χρησιμοποιούνται ακόμη και σήμερα οι πίνακες Nories. Στούς πίνακες αυτούς μπορεί να βρεί κανείς τις οδηγίες χρήσεώς τους, προκειμένου να τους χρησιμοποιήσει για την εύρεση των λογαρίθμων των αριθμών ή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Όπως όμως προαναφέραμε, η τεχνολογία σήμερα, μας έχει προσφέρει ένα πρώτης τάξεως εργαλείο, τους επιστημονικούς υπολογιστές τσέπης, με την βοήθεια των οποίων μπορούμε τάχιστα και χωρίς παρεμβολές να βρίσκουμε με σχεδόν απόλυτη ακρίβεια τους λογαρίθμους των αριθμών καί των τριγωνομετρικών αριθμών και αντιστρόφως.

Στο τέλος του βιβλίου αυτού υπάρχουν κατάλληλες οδηγίες και προγράμματα γιά την ταχύτατη εύρεση οποιουδήποτε στοιχείου.

Σημείωση: Για τους λογαρίθμους των τριγωνομετρικών αριθμών πρέπει να έχουμε υπ' όψη μας τα εξής:

Επειδή τα ημίτονα και συνημίτονα είναι μικρότερα της μονάδας, οι αντίστοιχοι λογάριθμοι θα είναι αρνητικοί. Εφαρμόζουμε τότε και σ' αυτή την περίπτωση την πρόσθεση (με δανεισμό) των 10 μονάδων. π.χ.

$$\log \eta\mu(40^\circ\ 25{,}4') = -0{,}18814 + 10 - 10 = 9{,}81186 - 10$$

$$\log \sigma\upsilon\nu(27^\circ\ 50{,}2') = -0{,}05341 + 10 - 10 = 9{,}94659 - 10.$$

Ενώ $\log \varepsilon\varphi(72^\circ\ 31{,}4') = 0{,}50189$

1.3. ΧΡΗΣΗ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΓΙΝΟΜΕΝΩΝ, ΠΗΛΙΚΩΝ, ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΚΑΙ ΡΙΖΩΝ.

Παράδειγμα 1: Να βρεθεί με την χρήση λογαρίθμων η παράσταση:

$$x = \frac{2423 \cdot 17^4 \cdot \sqrt[5]{23{,}257}}{35^3 \cdot \sqrt[4]{4.253^3}}$$

Λύση:

Λογαριθμίζουμε αμφότερα τα μέλη της εξισώσεως:

$$\log x = \log \frac{2423 \cdot 17^4 \sqrt[5]{23{,}257}}{35^3 \cdot \sqrt[4]{4253^3}}$$

και συνεχίζουμε εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων:

$$\log x = \log 2423 \cdot 17^4 \cdot \sqrt[5]{23{,}257} - \log 35^3 \sqrt[4]{4253^3} =$$

$$= \left(\log 2423 + \log 17^4 + \log \sqrt[5]{23{,}257}\right) - \left(\log 35^3 + \log \sqrt[4]{4253^3}\right) =$$

$$= \log 2423 + 4\log 17 + \frac{1}{5}\log 23{,}257 - 3\log 35 - \frac{3}{4}\log 4253$$

Έχουμε:

$$\log 2423 = \qquad = 3{,}38435$$

$$4\log 17 = 4 \cdot 1{,}23045 = 4{,}92180.$$

$$\frac{1}{5}\log 23{,}257 = \frac{1}{5} \cdot 1{,}36655 = 0{,}27331$$

$$3\log 35 = 3 \cdot 1{,}54407 = 4{,}63221$$

$$\frac{3}{4}\log 4253 = \frac{3}{4} \cdot 3{,}62870 = 2{,}72153$$

Άρα $\log x = (3{,}38435 + 4{,}92180 + 0{,}27331) - (4{,}63221 + 2{,}72153) \Longrightarrow$

$\log x = 8{,}57946 - 7{,}35374 \Rightarrow$

$\log x = 1{,}22572 \Rightarrow$

$\boxed{x = 16{,}816}$

Παράδειγμα 2: Να υπολογισθεί η παράσταση

$$k = \frac{\sqrt{28}\cdot\sqrt{65{,}2}\cdot 7{,}82\cdot \sigma\upsilon\nu(35°27')}{\sqrt[3]{742}\,\sqrt{671}}$$

Λύση:

Λογαριθμίζουμε αμφότερα τα μέλη της εξισώσεως:

$$\log k = \log\frac{\sqrt{28\cdot 65{,}2}\cdot 7{,}82\cdot\sigma\upsilon\nu(35°27')}{\sqrt[3]{742}\cdot\sqrt{671}} = \log\frac{\sqrt{1825{,}6}\cdot 7{,}82\,\sigma\upsilon\nu(35°27')}{\sqrt[3]{742}\cdot\sqrt{671}} =$$

$$= \log\sqrt{1825{,}6}\cdot 7{,}82\,\sigma\upsilon\nu\,(35°\,27') - \log\sqrt[3]{742}\cdot\sqrt{671} =$$

$$= \log\sqrt{1825{,}6} + \log 7{,}82 + \log\sigma\upsilon\nu(35°\,27') - \left(\log\sqrt[3]{742} + \log\sqrt{671}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\log 1825{,}6 + \log 7{,}82 + \log\sigma\upsilon\nu\,(35°\,27') - \frac{1}{3}\log 742 - \frac{1}{2}\log 671.$$

Έχουμε τώρα:

$$\frac{1}{2}\log 1825{,}6 = \frac{1}{2}\cdot 3{,}26141 = 1{,}63070$$

$$\log 7{,}82 = \;= 0{,}89321$$

$$\log\sigma\upsilon\nu(35°\,27') = \;= -0{,}08904$$

$$\frac{1}{3}\log 742 = \frac{1}{3}\cdot 2{,}87040 = 0{,}95680$$

$$\frac{1}{2}\log 671 = \frac{1}{2}\cdot 2{,}82672 = 1{,}41336$$

Άρα $\log k = 1{,}63070 + 0{,}89321 - 0{,}08904 - 0{,}95680 - 1{,}41336 =$

$= 2{,}52391 - 2{,}45920 = 0{,}06471.$

και $\boxed{k = 1{,}16}$

1.4. ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: κάθε εξίσωση που έχει τον άγνωστο σαν εκθέτη λέγεται <u>εκθετική εξίσωση</u>.

π.χ. η εξίσωση $2^x = 8$ λέγεται εκθετική εξίσωση $(x=3)$

<u>Λύση</u> μιάς εκθετικής εξισώσεως λέγεται η εύρεση των τιμών των αγνώστων που επαληθεύουν την εξίσωση.

<u>Μορφές εκθετικών εξισώσεων:</u>

I. $\alpha^x = \beta \quad (\alpha, \beta \geq 0)$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1η: Ο β είναι δύναμη του α. Έστω $\beta = \alpha^k$, τότε

$$\alpha^x = \alpha^k \Leftrightarrow x = k.$$

Παράδειγμα: $4^x = 4.096$

Επειδή $4.096 = 4^6 \Leftrightarrow 4^x = 4^6 \Leftrightarrow x = 6.$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2η: Ο β δεν είναι δύναμη του α. Τότε λογαριθμίζουμε και τα δύο μέλη της $\alpha^x = \beta$ και έχουμε:

$$\log \alpha^x = \log \beta \Leftrightarrow$$
$$x \log \alpha = \log \beta \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{\log \beta}{\log \alpha}$$

Παράδειγμα: $2{,}48^x = 42{,}7 \Leftrightarrow$

$$\log 2{,}48^x = \log 42{,}7 \Leftrightarrow$$
$$x \log 2{,}48 = \log 42{,}7 \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{\log 42{,}7}{\log 2{,}48} \Leftrightarrow x = \frac{1{,}63043}{0{,}39445} \Leftrightarrow x = 4{,}13$$

II. $\alpha^{f(x)} = \beta$

Οι εκθετικές εξισώσεις αυτής της μορφής λύνονται όπως οι εξισώσεις της μορφής I.

Παράδειγμα 1ο: Να λυθεί η εξίσωση $5^{x^2-2x+2} = 625$

Επειδή $625 = 5^4 \Leftrightarrow$

$$5^{x^2-2x+2} = 5^4 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 2x + 2 = 4 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

και λύνοντας την δευτεροβάθμια αυτή εξίσωση βρίσκουμε: $x_1 = 2{,}73205$ και $x_2 = -0{,}73205$

Παράδειγμα 2ο: Να λυθεί η εξίσωση:

$$\left(7^{5-x}\right)^{3-x} = 1$$

Λύση:

Λογαριθμίζουμε και τα δύο μέλη της εξισώσεως:

$$\log\left(7^{5-x}\right)^{3-x} = \log 1 \Leftrightarrow$$

$$(3-x)\log 7^{5-x} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

ή $\quad 3-x=0 \Leftrightarrow x=3$

ή $\quad \log 7^{5-x}=0 \Leftrightarrow (5-x)\log 7 = 0$ και επειδή $\log 7 \neq 0$

$\Leftrightarrow 5-x=0 \Leftrightarrow x=5$

III. $\alpha k^{2x}+\beta k^{x}+\gamma=0$

Για την λύση αυτής της μορφής θέτουμε $k^x = y$

οπότε η εξίσωση παίρνει την μορφή:

$\alpha y^2+\beta y+\gamma=0$ η οποία είναι κλασική μορφή δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση: $7\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^{x}-4=0$.

Λύση:

Αυτή γράφεται: $7\cdot(2^x)^2-3\cdot(2^x)-4=0$

Θέτουμε $2^x=y$ και έχουμε:

$$7\cdot y^2-3y-4=0$$

η οποία έχει ρίζες: $y_1=1$, $y_2=-0{,}5714$

Άρα $2^x=1 \Leftrightarrow 2^x=2^0 \Leftrightarrow x=0$

και $2^x=-0{,}5714$ η οποία δεν έχει λύση

Συνεπώς η ρίζα της εξισώσεως είναι η $x=0$.

IV: $\alpha k^{x\pm\rho}\pm\beta k^{x\pm\sigma}\pm\ldots=0$

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση:

$$3^{x+2}+5\cdot 3^{x}+3^{x-1}-3^{x-2}=128$$

Λύση:

Αυτή γράφεται:

$$3^x\cdot 3^2+5\cdot 3^x+3^x\cdot 3^{-1}-3^x\cdot 3^{-2}=128 \Leftrightarrow$$

$$9\cdot 3^x+5\cdot 3^x+\frac{3^x}{3}-\frac{3^x}{9}=128 \quad \Leftrightarrow$$

Θέτουμε $3^x = y \Leftrightarrow$

$$9y + 5y + \frac{y}{3} - \frac{y}{9} = 128. \Leftrightarrow$$

$$128y = 1.152 \Leftrightarrow$$

$$y = 9$$

Άρα $3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$.

1.5. ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΕΩΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ.

Έστω ότι ο λογάριθμος ενός αριθμού δίδεται σε ένα σύστημα με βάση α και θέλουμε να υπολογίσουμε τον λογάριθμο του αριθμού αυτού σε ένα νέο σύστημα με βάση β. Ο σχετικός τύπος πού μας δίνει την σχέση αυτή, είναι:

$$\text{λογ}_\beta k = \text{λογ}_\alpha k \cdot \frac{1}{\text{λογ}_\alpha \beta}$$

Ο τύπος αυτός αποδεικνύεται με απλή εφαρμογή του ορισμού του λογαρίθμου ενός αριθμού ως προς μία βάση και αναλυτικά μας λέει ότι:

" Ο λογάριθμος ενός αριθμού k ως πρός μία νέα βάση β, ισούται με το γινόμενο του λογαρίθμου του αριθμού αυτού ως πρός την παλαιά βάση α, επί ένα κλάσμα πού έχει αριθμητή την μονάδα και παρονομαστή τον λογάριθμο της νέας βάσεως ως προς την παλαιά."

<u>Σημείωση:</u> Ο πάρα πάνω τύπος δεν ενδιαφέρει άμεσα τους Ναυτιλομένους, επειδή στην Ναυτιλία γίνεται γενικά χρήση των δεκαδικών λογαρίθμων.

2. ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

2.1. ΜΕΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

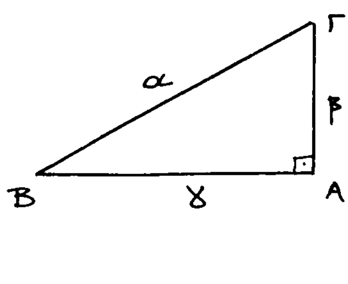
Κρίνουμε εδώ απαραίτητο να υπενθυμίσουμε μερικά στοιχεία από την Επίπεδη Τριγωνομετρία, τα οποία θεωρούνται απαραίτητα γιά διάφορες εφαρμογές της Ναυτιλίας που θα μελετήσουμε στο επίπεδο. Τό μάθημα βεβαίως της Επίπεδης Τριγωνομετρίας διδάσκεται εκτενώς στα Λύκεια, οπότε οι βασικές της γνώσεις θεωρούνται γνωστές.

Στην Ναυτιλία μας ενδιαφέρει κυρίως να γνωρίζουμε να επιλύσουμε ένα επίπεδο τρίγωνο (Επίλυση ενός τριγώνου, επιπέδου ή σφαιρικού, λέγεται ο υπολογισμός των στοιχείων του, όταν δίδονται ορισμένα από αυτά).

2.2. ΤΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΡΙΓΩΝΟ.

Ορθογώνιο επίπεδο τρίγωνο λέγεται εκείνο το οποίο έχει μία γωνία ορθή. Συμβολίζουμε με α, β, γ τις πλευρές του και με Α, Β, Γ τις γωνίες του. (Συνηθίζεται να θεωρείται ορθή η γωνία Α).

2.2.1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΑΒΓ.



Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, εάν Α είναι η ορθή του γωνία, τότε α είναι η υποτείνουσα και ισχύει το <u>θεώρημα του Πυθαγόρα</u>:

$$\boxed{\alpha^2=\beta^2+\gamma^2}$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί (ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη και συνεφαπτομένη) μιάς οξείας γωνίας B ορίζονται ως εξής:

$$ημB = \frac{β}{α} = \frac{\text{μήκος απέναντι κάθετης πλευράς}}{\text{μήκος υποτείνουσας}}$$

$$συνB = \frac{γ}{α} = \frac{\text{μήκος προσκείμενης κάθετης πλευράς}}{\text{μήκος υποτείνουσας.}}$$

$$εφB = \frac{β}{γ} = \frac{\text{μήκος απέναντι κάθετης πλευράς}}{\text{μήκος προσκείμενης κάθ. πλευράς}}$$

$$σφB = \frac{γ}{β} = \frac{\text{μήκος προσκείμενης κάθ. πλευράς}}{\text{μήκος απέναντι κάθετης πλευράς.}}$$

Ορίζονται επίσης η τέμνουσα και η συντέμνουσα της γωνίας B ως εξής:

$$τεμB = \frac{1}{συνB} = \frac{1}{\frac{γ}{α}} = \frac{α}{γ}.$$

$$στεμB = \frac{1}{ημB} = \frac{1}{\frac{β}{α}} = \frac{α}{β}.$$

2.2.2. ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ B ΚΑΙ Γ.

Επειδή $\hat{B}+\hat{Γ}=90^\circ$, οι γωνίες B και Γ είναι συμπληρωματικές, άρα θα ισχύει:

$$ημB = συνΓ$$

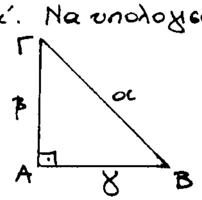
$$συνB = ημΓ$$

$$εφB = σφΓ$$

$$σφB = εφΓ$$

Εφαρμογές:

α΄. Να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 45°.



Θεωρούμε το ισοσκελές ορθογ. τρίγωνο ΑΒΓ. Τούτο θα έχει: $B=Γ=45^\circ$ και $β=γ$. Άρα

$$α = \sqrt{β^2+γ^2} = \sqrt{2β^2} = β\sqrt{2}$$

$$ημB = ημ45^\circ = \frac{β}{α} = \frac{β}{β\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$συνB = συν45^\circ = \frac{γ}{α} = \frac{β}{β\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$εφB = εφ45^\circ = \frac{β}{γ} = \frac{β}{β} = 1$$

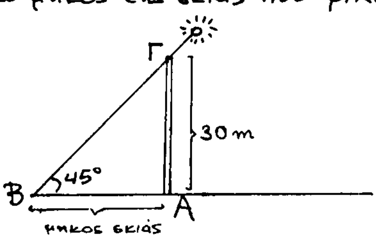
$$σφB = σφ45^\circ = \frac{γ}{β} = \frac{β}{β} = 1.$$

β') Να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° και 60°

Θεωρώντας όπως και παραπάνω ένα ορθογώνιο τρίγωνο με γωνία $B = 30°$, θα έχουμε για την Γ γωνία του, $Γ = 60°$ και εφαρμόζοντας όπως και προηγουμένως μπορούμε να πάρουμε τον παρακάτω πίνακα:

Γωνία θ	ημθ	συνθ	εφθ	σφθ	τεμθ	στεμθ
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}/3$

γ') Όταν ο ήλιος βρίσκεται 45° πάνω από τον ορίζοντα, ποιό είναι το μήκος της σκιάς πού ρίχνει ένα κτίριο 30 μέτρων;

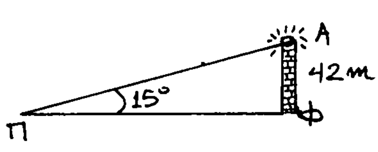


Το μήκος της σκιάς θα είναι το ΑΒ.

Θα έχουμε: $εφB = \dfrac{AΓ}{AB} \Rightarrow$

$$AB = \frac{AΓ}{εφB} = \frac{30}{1} = 30\,m.$$

δ') Ένας φάρος έχει ύψος 42 m από την επιφάνεια της θάλασσας. Από ένα πλοίο υπολογίζουν την κατακόρυφη γωνία της κορυφής του φάρου, ίση με 15°. Σε τι απόσταση από τον φάρο βρίσκεται το πλοίο;



Θα έχουμε $εφ\,15° = \dfrac{42}{ΠΦ} \Rightarrow$

$$ΠΦ = \frac{42}{εφ15°} = \frac{42}{0{,}26795} = 156{,}7\,m.$$

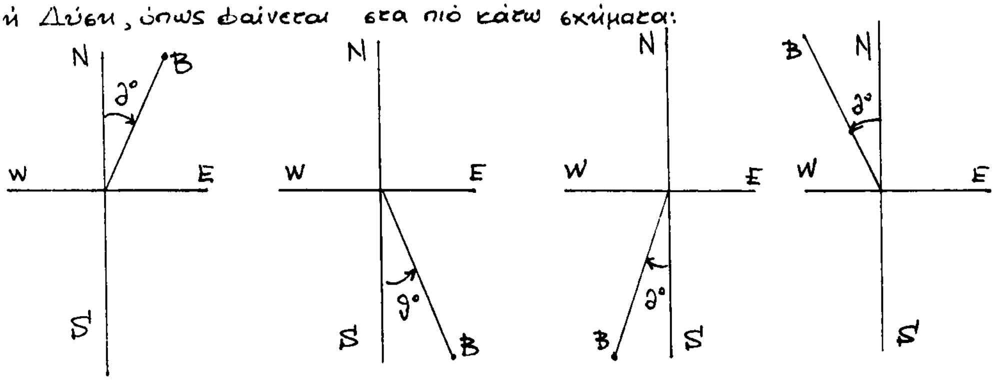
2.3. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΣΤΗΝ ΝΑΥΤΙΛΙΑ.

2.3.1. ΔΙΟΠΤΕΥΣΕΙΣ

Διόπτευση ενός σημείου B από ένα σημείο A:

Ονομάζουμε (τεταρτοκυκλική) διόπτευση ενός σημείου B από ένα σημείο A στο οριζόντιο επίπεδο, την γωνία που σχηματίζεται από την ημιευθεία πού άγεται από το A στο B, με την ευθεία που έχει διεύθυνση Βορράς-Νότος που διέρχεται από το A.

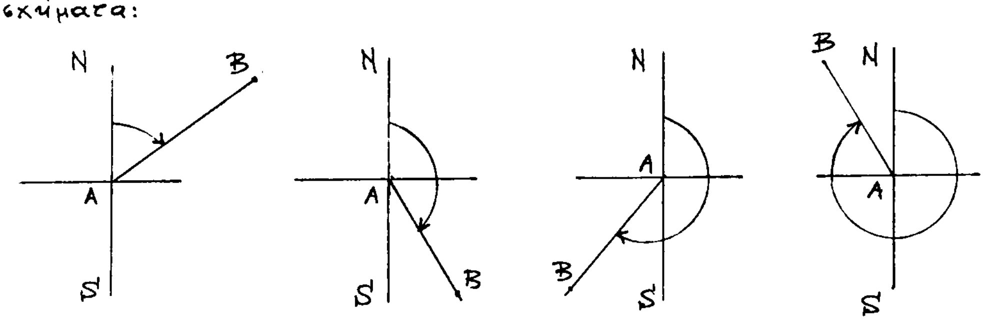
Η διόπτευση λοιπόν ορίζεται με αρχή την ευθεία (που διευθύνεται πρός) Βορρά ή Νότο και πέρας (την διεύθυνση προς) την Ανατολή ή Δύση, όπως φαίνεται στα πιό κάτω σχήματα:



Διόπτευση: Nθ°E   Διόπτευση: Sθ°E   Διόπτευση: Sθ°W   Διόπτευση: Nθ°W.

<u>Σημείωση:</u>

Πολλές φορές (κυρίως στην Αεροπλοΐα) χρησιμοποιείται και η ολοκυκλική διόπτευση όπως φαίνεται στα πάρα κάτω σχήματα:



Διόπτευση: 35°   Διόπτευση: 145°   Διόπτευση: 215°   Διόπτευση: 325°

2.3.2.ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΕΩΣ (Navigation triangle)

Τρίγωνο πλεύσεως ονομάζεται ένα επίπεδο προσανατολισμένο τρίγωνο ΒΕΑ. Η κορυφή του Ε είναι το σημείο Εκκινήσεως, η δε κορυφή Α το σημείο Αφίξεως.

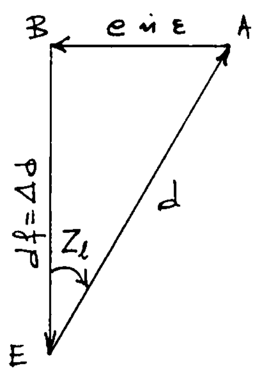
Οι πλευρές του είναι: Η κάθετος πλευρά $\vec{BE}$ πού έχει την διεύθυνση Βορράς-Νότος, η οποία ονομάζεται <u>διαφορά πλάτους</u> και συμβολίζεται $(\vec{BE}) = d\ell = \Delta\phi$.

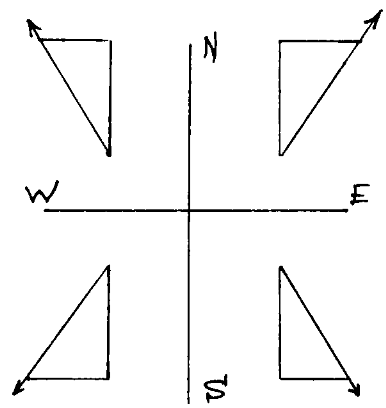
Η κάθετος πλευρά ΑΒ που ονομάζεται <u>αποχώρηση</u> και συμβολίζεται $(\vec{AB}) = e$ (ή ε).

Η υποτείνουσα $\vec{EA}$ που ονομάζεται <u>διάρμα</u> (distance) και συμβολίζεται $(\vec{EA}) = d$.

Από τις γωνίες, η πιό ενδιαφέρουσα είναι η $B\hat{E}A$ που ονομάζεται <u>αληθής πορεία</u> (πλεύση) και συμβολίζεται $B\hat{E}A = Z_\ell$

Το τρίγωνο πλεύσεως έχει εφαρμογή στον λοξοδρομικό πλού.





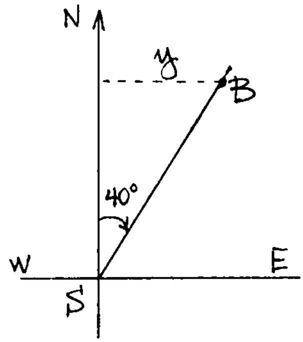
Παραδείγματα:

1. Ένα πλοίο μετατοπίζεται κατά την διεύθυνση N 40° E και ταξιδεύει επί 3 ώρες με ταχύτητα 20 μίλια/ώρα. Κατά πόσο μετατοπίστηκε κατά τον Βορρά και κατά πόσο κατά την Ανατολή;

Λύση

Έστω ότι το πλοίο αναχωρεί από το σημείο Α. Άγουμε την ευθεία ΑΔ που σχηματίζει γωνία 40° με την διεύθυνση N-S.

Εντός 3 ωρών το πλοίο θα έχει διανύσει το διάστημα:



$AB = v \cdot t \Rightarrow$

$AB = 20 \cdot 3 \Rightarrow AB = 60$ μίλια.

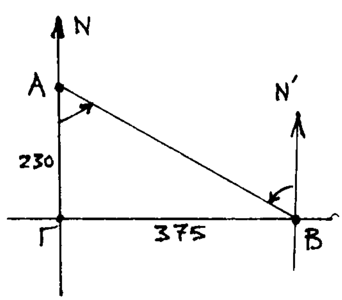
Εκ του Β φέρουμε την ΒΓ κάθετο στην ευθεία N-S. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ θα έχουμε:

$A\Gamma = AB \, \text{συν} A = AB \, \text{συν} 40° = 60 \cdot 0{,}76604 =$
$= 45{,}96$ μίλια.

$B\Gamma = AB \, \text{ημ} A = AB \, \text{ημ} 40° = 60 \cdot 0{,}64279 = 38{,}57$ μίλια.

2. Τρία πλοία είναι τοποθετημένα ως εξής: Το Α βρίσκεται 230 μίλια κατ' ευθείαν προς Βορράν του Γ και το Β 375 μίλια κατ' ευθείαν προς Ανατολάς του Γ. Ποιά είναι η διόπτευση: α') του Β από το Α β') του Α από το Β;

Λύση



Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ.

α') Η διόπτευση του Β από το Α είναι η γωνία ΓΑΒ και προκύπτει από την σχέση:

$$\text{εφ}\, \Gamma A B = \frac{375}{230} = 1{,}63043 \Rightarrow \widehat{\Gamma A B} = 58° 28{,}7'$$

Άρα η ζητουμένη διόπτευση είναι

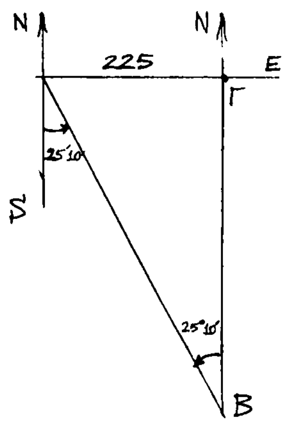
S 58° 28,7′ E.

β') Η διόπτευση του Α από το Β είναι η γωνία Ν′ΒΑ ίση με ΓΑΒ. Άρα η διόπτευση εδώ είναι N 58° 28,7′ W.

3. Τρία πλοία είναι τοποθετημένα ως εξής: Το Α βρίσκεται 225 μίλια δυτικά του Γ, ενώ το Β βρίσκεται Νότια του Γ και διοπτεύεται από το Α, S 25° 10′ E. α') Σε ποιά απόσταση από το Β βρίσκεται το Α; β') Σε ποιά απόσταση από το Γ βρίσκεται το Β; γ') Ποιά είναι η διόπτευση του Α από το Β;

Λύση

α') Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΒ έχουμε:



$$\eta\mu B = \frac{A\Gamma}{AB} \Rightarrow AB = \frac{A\Gamma}{\eta\mu B} = \frac{225}{0{,}42525} = 529{,}14.$$

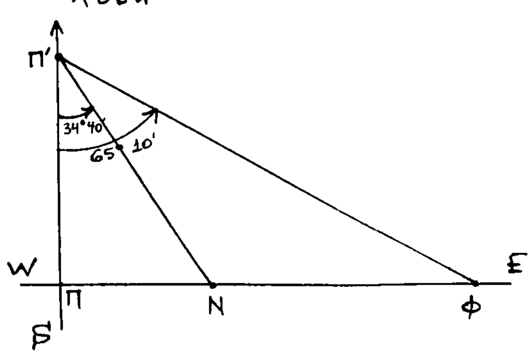
β') $\varepsilon\varphi B = \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma} \Rightarrow$

$$B\Gamma = \frac{A\Gamma}{\varepsilon\varphi B} = \frac{225}{0{,}46985} = 478{,}87 \text{ μίλια}$$

γ') Επειδή $\hat{B} = S\hat{A}B$ η ζητουμένη διόπτευση θα είναι N 25° 10' W.

4. Από ένα πλοίο που κατευθύνεται πρός Βορράν με ταχύτητα 16,5 μίλ/ώρα παρατηρούμε κατ' ευθείαν προς Ανατολάς του ένα ναυάγιο και πιό πέρα ένα φάρο. Μια ώρα αρχύτερα το ναυάγιο και ο φάρος διοπτεύονται S 34° 40' E και S 65° 10' E αντίστοιχα. Να βρεθεί η απόσταση του ναυαγίου από τον φάρο.

Λύση



Στο σχήμα φαίνεται το πλοίο Π, το ναυάγιο N και ο φάρος Φ καθώς βρίσκονται ευθυγραμμισμένα κατά την κατεύθυνση W-E.

Μια ώρα αρχύτερα το πλοίο βρίσκεται στο σημείο Π' που απέχει από το Π 16,5 μίλια.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΠΠ'N έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\, \Pi\Pi'N = \frac{\Pi N}{\Pi\Pi'} \Rightarrow \Pi N = \Pi\Pi' \cdot \varepsilon\varphi\, \Pi\Pi'N \Rightarrow$$

$$\Pi N = 16{,}5\ \varepsilon\varphi(34°\ 40') = 16{,}5 \cdot 0{,}69157 \Rightarrow \Pi N = 11{,}41 \qquad (1)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΠΠ'Φ έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\, \Pi\Pi'\Phi = \frac{\Pi\Phi}{\Pi\Pi'} \Rightarrow \Pi\Phi = \Pi\Pi' \cdot \varepsilon\varphi\,\Pi\Pi'\Phi \Rightarrow \Pi\Phi = 16{,}5 \cdot 2{,}16090 = 35{,}65 \quad (2)$$

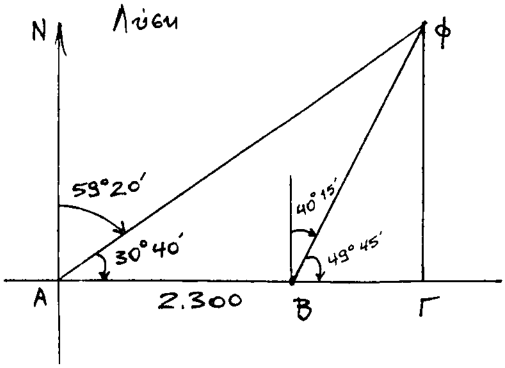
Εκ των (1) και (2) έχουμε: $N\Phi = \Pi\Phi - \Pi N = 35{,}65 - 11{,}41 \Rightarrow$

$N\Phi = 24{,}24$ μίλια.

5. Ένα πλοίο κατευθύνεται προς Ανατολάς, όταν παρατηρείται

μία φωτιά σε διόπτευση N 59° 20′ E. Αφού το πλοίο διανύσει 2.300 μέτρα, η φωτιά διοπτεύεται N 40° 15′ E. Εάν το πλοίο συνεχίσει την πορεία του, σε ποιά θέση η απόστασή του από την φωτιά θα είναι ελαχίστη και πόση είναι η ελαχίστη αυτή απόσταση;

Λύση



Έστω Α η θέση του πλοίου κατά την πρώτη διόπτευση, Β η θέση του κατά την δεύτερη διόπτευση και Γ η θέση του την στιγμή πού η απόστασή του από το πλοίο γίνεται ελαχίστη (τότε βεβαίως η γωνία Γ είναι ορθή).

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΦ έχουμε:

$$A\Gamma = \Gamma\Phi \cdot \text{σφ}\,(30°\ 40') \qquad (1)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΦ έχουμε:

$$B\Gamma = \Gamma\Phi \cdot \text{σφ}\,(49°\ 45') \qquad (2)$$

και επειδή $AB = A\Gamma - B\Gamma$ (3)

εκ των (1), (2), (3) συνεπάγεται:

$$AB = \Gamma\Phi \cdot \text{σφ}(30°\ 40') - \Gamma\Phi \cdot \text{σφ}\,(49°\ 45').$$

$$\Longrightarrow \quad 2.300 = \Gamma\Phi \cdot 1,68643 - \Gamma\Phi \cdot 0,84656$$

$$\Longrightarrow \quad 2.300 = \Gamma\Phi\,(1,68643 - 0,84656)$$

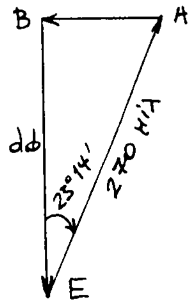
$$\Longrightarrow \quad 2.300 = 0,83987 \cdot \Gamma\Phi$$

$$\Longrightarrow \quad \Gamma\Phi = \frac{2.300}{0,83987} \Longrightarrow \boxed{\Gamma\Phi = 2.738,5\ m}$$ και $B\Gamma = 2.318,3\ m$

6. Ένα πλοίο αναχωρεί από ένα λιμάνι Ε γεωγραφικού πλάτους $\varphi_E = 45°\ 20'$ N και πλέει N 23° 14′ E σε απόσταση 270 μιλίων. Να βρεθεί το πλάτος φ_A του σημείου αφίξεως Α και η αποχώρηση e.

Λύση

α′) Εύρεση του ϕ_A:



Από το ορθογώνιο τρίγωνο πλεύσεως ΕΑΒ έχουμε: $d\phi = 270 \cdot \text{συν}(23°\ 14')$

$\Rightarrow d\phi = 270 \cdot 0{,}91891$

$\Rightarrow d\phi = 248{,}1$ μίλ $= 248{,}1' = 4°\ 8{,}1'$ του μεσημβρινού της γης.

Το πλάτος του Β ισούται με το πλάτος του Α, δηλαδή $\phi_B = \phi_A$.

Αλλά $\phi_B = \phi_E + d\phi \Rightarrow \phi_B = (45°\ 20') + (4°\ 8{,}1') = 49°\ 28{,}1'$

Άρα και $\phi_A = 49°\ 28{,}1'$ N.

β') Εύρεση αποχωρήσεως e:

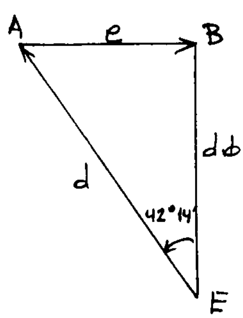
$e = 270° \cdot \text{ημ}\,(23°\ 14')$

$\Rightarrow e = 270° \cdot 0{,}39448$

$\Rightarrow e = 106{,}51$.

7. Ένα πλοίο απέπλευσε από ένα λιμάνι Ε γεωγρ. πλάτους $\phi_E = 24°\ 21'$ S. με πορεία $Z_l = N\ 42°\ 14'\ W$ και έφθασε σε ένα λιμάνι Α γεωγραφικού πλάτους $\phi_A = 6°\ 12'$N. Να υπολογισθεί η διανυθείσα απόσταση d (δίαρμα) και η αποχώρηση e.

Λύση



α') Υπολογισμός d:

Έστω ΕΑΒ το τρίγωνο πλεύσεως.

Έχουμε $\phi_B = \phi_A$ και $d\phi = (24°\ 21') + (6°\ 12') =$

$= 30°\ 33' = 1800' + 33' = 1833' = 1.833$ μίλια.

Συνεπώς $d = \dfrac{1833}{\text{συν}(42°14')} = \dfrac{1833}{0{,}74041} = 2.475{,}66$ μίλια.

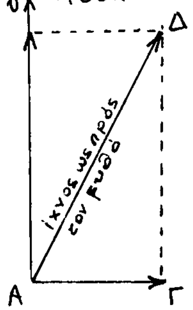
β') Υπολογισμός e:

$e = d\phi \cdot \text{εφ}\,(42°\ 14') \Rightarrow e = 1833 \cdot 0{,}90781 \Rightarrow e = 1.664$ μίλια.

8. Ένα πλοίο πλέει προς Βορρά με ταχύτητα 14 κόμβων, ενώ υπόκειται σε ρεύμα ανατολικής διευθύνσεως και ταχύτητας 3 κόμβων.

Να βρεθεί η διεύθυνση του ίχνους του πλοίου ως προς τον βυθό και η πραγματική του ταχύτητα.

Λύση



Εάν δεν είχαμε την επίδραση του ρεύματος, το πλοίο σε μιά ώρα θα διήνυε 14 μίλια προς Βορρά. Εάν, επίσης, ενεργούσε σε αυτό μόνο το ρεύμα, σε μία ώρα θα διήνυε 3 μίλια πρός Ανατολάς. Επομένως το πλοίο κινείται υπό την επενέργεια δύο δυνάμεων (μηχανών και ρεύματος) άρα θα διευθύνεται ως προς τον βυθό κατά την συνισταμένη τους δηλαδή την ΑΔ.

Έχουμε: $\varepsilon\varphi\, ΒΑΔ = \frac{3}{4} = 0{,}21429$

$$\Longrightarrow \hat{ΒΑΔ} = 12°\ 5{,}7'$$

$$ΑΔ = \frac{ΑΒ}{\sigma\upsilon\nu(12° 5{,}7')} = \frac{14}{0{,}97780} = 14{,}32 \text{ μίλια}$$

Άρα πραγματική ταχύτητα πλοίου, $\upsilon = 14{,}32$ κόμβοι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

9. Ένα πλοίο διανύει κατά την διεύθυνση Ν 28° 14,6΄Ε μία απόσταση 55,375 μιλίων και στην συνέχεια κατά την κατεύθυνση Ν 61° 45,4΄W μία απόσταση 94,625 μιλίων. Ποιά είναι η απόσταση του και η διόπτευσή του από το σημείο αναχωρήσεώς του;

10. Ένα ατμόπλοιο καθώς πλέει προς Ανατολάς διοπτεύει ένα φάρο προς Ν (Βορρά) και λαμβάνει γωνιακό ύψος αυτού 24° 31΄. Μετά από πλού 210 m διοπτεύει τον φάρο Ν 39°40΄ W. Να βρεθεί το ύψος του φάρου.

11. Από ένα λιμάνι αναχωρούν συγχρόνως δύο ατμόπλοια, με πορείες το ένα προς Ν (Βορρά) και το άλλο προς W.

Μετά μία ώρα το δεύτερο διοπτεύει το πρώτο Ν 36° 15΄Ε. Εάν το άθροισμα των ταχυτήτων είναι 28 μίλια, να βρεθεί η ταχύτητα του κάθε ατμοπλοίου.

2.4. ΤΟ ΤΥΧΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

Τυχόν επίπεδο τρίγωνο λέγεται εκείνο που δεν έχει καμία ορθή γωνία.

Συμβολίζουμε σε αυτό με α, β, γ τις πλευρές του και A, B, Γ τις γωνίες του.

Για να επιλυθεί ένα τυχόν τρίγωνο, αρκεί να μας δοθούν τρία στοιχεία του (εκ των οποίων το ένα οπωσδήποτε γραμμικό).

Υπάρχουν τέσσερις περιπτώσεις επιλύσεως ενός τυχόντος επιπέδου τριγώνου:

Περίπτωση I: Δίδονται μία πλευρά και δύο γωνίες.

» II: Δίδονται δύο πλευρές και η περιεχομένη γωνία.

» III: Δίδονται τρεις πλευρές.

» IV: Δίδονται δύο πλευρές και η γωνία η απέναντι σε μία από αυτές.

Οι κυριώτεροι τύποι που χρησιμοποιούνται στις επιλύσεις των τυχόντων επιπέδων τριγώνων είναι:

1. Ο νόμος των ημιτόνων (στο επίπεδο): $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\beta}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$

2. Οι τύποι των ημιπαρημιτόνων γωνιών: $\eta\mu\pi\rho A = \dfrac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}$ (κυκλικά)

   [Εδώ υπενθυμίζουμε ότι $\eta\mu\pi\rho\, \omega = \eta\mu^2 \dfrac{\omega}{2} = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\omega}{2}$. (Βλ. "Σφαιρική Τριγωνομετρία" Χρ. Πέππα, εκδόσεις Ευγενίδου)].

3. Οι τύποι των εφαπτομένων: $\varepsilon\varphi \dfrac{B-\Gamma}{2} = \dfrac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\, \sigma\varphi \dfrac{A}{2}$ (κυκλικά).

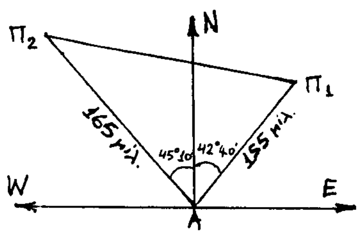
Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει τυποποιημένες μορφές των τεσσάρων περιπτώσεων επιλύσεως ενός τυχόντος επιπέδου τριγώνου και τους τύπους που πρέπει να χρησιμοποιούμε σε κάθε μία περίπτωση με τα δεδομένα στοιχεία. Έτσι καθίσταται ο πίνακας αυτός πάρα πολύ χρήσιμος για αρκετές εφαρμογές επιλύσεων της επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυσιπλοΐα.

<table>
<tr><th></th><th>1η περίπτωση</th><th>2η περίπτωση</th><th>3η περίπτωση</th><th>4η περίπτωση</th></tr>
<tr><td>Δ</td><td>$α, \hat{A}, \hat{B}$</td><td>Δύο πλευρές και μια αντικειμένη γωνία: $α, β, \hat{A}$</td><td>$α, β, γ$</td><td>Δύο πλευρές περιεχόμενη γωνία: $β, γ, \hat{A}$</td></tr>
<tr><td>Ζ</td><td>$\hat{Γ} = 180 - (\hat{A} + \hat{B})$
$\frac{β}{ημΒ} = \frac{α}{ημΑ}$
$β = \frac{αημΒ}{ημΑ}$ και
$β = αημΒστεμΑ$
$\frac{γ}{ημΓ} = \frac{α}{ημΑ}$
$γ = αημΓστεμΑ$</td><td><table><tr><th>2λύσεις</th><th>1λύση</th><th>καμία</th></tr><tr><td>α=105,35</td><td>α=536μ</td><td>α=37,24</td></tr><tr><td>β 110,72</td><td>β=352μ</td><td>β=50,68</td></tr><tr><td>$\hat{A}$=53 53°,84</td><td>$\hat{A}$=71°15</td><td>$\hat{A}$=73°54,3</td></tr></table>Χρησιμοποιούμε
Νόμο ημιτόνων</td><td>Μπορούμε με νόμο συνημιτόνων αλλά: μειονέκτημα: Τα αθροίσματα δεν λογαριθμούνται. Γι' αυτό: Ημιπαρημίτονα.</td><td>Τα $\hat{B}-\hat{Γ}$ και $\hat{B}+\hat{Γ}$ είναι γνωστά διότι $\hat{B}+\hat{Γ} = 180 - \hat{A}$ και
$εφ\frac{B-Γ}{2} = \frac{β-γ}{β+γ} \cdot σφ\frac{A}{2}$</td></tr>
</table>

2.4.1. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΝΑΥΤΙΛΙΑ.

12. Δύο πλοία είναι εφοδιασμένα με όργανα ραδιομεταδόσεως, εμβελείας 200 μιλίων. Το ένα πλοίο βρίσκεται 155 μίλια N 42°40′E και το άλλο 165 μίλια N 45° 10′ W από ένα σημείο A της ακτής. Μπορούν τα δύο πλοία να επικοινωνήσουν απ' ευθείας μεταξύ τους;

Λύση



Έστω ότι $Π_1$ είναι η θέση του ενός πλοίου και $Π_2$ του άλλου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο σχηματιζόμενο τρίγωνο γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία. Άρα είμαστε στην 4η περίπτωση επιλύσεως τυχόντος επιπέδου τριγώνου. Θέλουμε να υπολογίσουμε την $Π_1Π_2$ για να πληροφορηθούμε από το μήκος της αν τα δύο πλοία μπορούν να επικοινωνήσουν απ' ευθείας μεταξύ τους.

Υπολογίζουμε κατ' αρχήν τις γωνίες $Π_1$ και $Π_2$ εκ του αθροίσματος και της διαφοράς τους. Το άθροισμά τους είναι:

$$Π_1 + Π_2 = 180° - (87° 50') \Longrightarrow$$

$$\Pi_1 + \Pi_2 = 42^\circ\ 10' \qquad (1)$$

Η διαφορά τους υπολογίζεται εκ του τύπου:

$$\varepsilon\varphi \frac{\Pi_1-\Pi_2}{2} = \frac{165-155}{165+155} \cdot \sigma\varphi \frac{87^\circ 50'}{2} \Rightarrow$$

$$\varepsilon\varphi \frac{\Pi_1-\Pi_2}{2} = \frac{10}{320}\ \sigma\varphi\ (43^\circ\ 55') \Rightarrow$$

$$\varepsilon\varphi \frac{\Pi_1-\Pi_2}{2} = 0{,}03125 \cdot \sigma\varphi\,(43^\circ\ 55').$$ Λογαριθμίζουμε:

$$\log \varepsilon\varphi \frac{\Pi_1-\Pi_2}{2} = \log 0{,}03125 + \log \sigma\varphi\ (43^\circ\ 55'). \Rightarrow$$

$$\log \varepsilon\varphi \frac{\Pi_1-\Pi_2}{2} = -1{,}50515 + 0{,}01643 \Rightarrow$$

$$\log \varepsilon\varphi \frac{\Pi_1-\Pi_2}{2} = -1{,}48872 \Rightarrow$$

$$\frac{\Pi_1-\Pi_2}{2} = 1^\circ\ 51{,}3' \Rightarrow$$

$$\Pi_1-\Pi_2 = 3^\circ\ 43' \qquad (2)$$

Εκ των (1) και (2) συνεπάγεται:

$$\Pi_1 = 47^\circ\ 56{,}5' \quad \text{και} \quad \Pi_2 = 44^\circ\ 13{,}5'$$

Εφαρμόζουμε τώρα τον Νόμο των ημιτόνων:

$$\frac{\Pi_1\Pi_2}{\eta\mu\,(87^\circ 50')} = \frac{165}{\eta\mu\,(47^\circ\ 56{,}5')} \Rightarrow$$

$$\Pi_1\Pi_2 = 165 \cdot \eta\mu\ (87^\circ 50') \cdot \sigma\tau\varepsilon\mu\ (47^\circ\ 56{,}5') \Rightarrow$$

$$\log \Pi_1\Pi_2 = \log 165 + \log \eta\mu (87^\circ 50') + \log \sigma\tau\varepsilon\mu\ (47^\circ\ 56{,}5') \Rightarrow$$

$$\log \Pi_1\Pi_2 = 2{,}21748 + (9{,}99969 - 10) + 0{,}12933 \Rightarrow$$

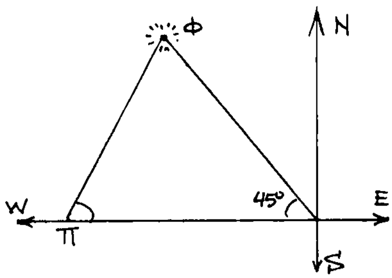
$$\log \Pi_1\Pi_2 = 12{,}34650 - 10 \Rightarrow$$

$$\Pi_1\Pi_2 = 222 \text{ μίλια.}$$

Συμπέρασμα: Τα δύο πλοία δεν μπορούν να επικοινωνήσουν απ' ευθείας μεταξύ τους.

13. Ένας φάρος βρίσκεται 10 μίλια βορειοδυτικά από μία αποβάθρα παραλίας (dock). Ένα πλοίο εγκαταλείπει το dock στις 9 το πρωί και κατευθύνεται Δυτικά με ταχύτητα 12 μίλια/ώρα. Τι ώρα θα βρίσκεται σε απόσταση 8 μιλίων από τον φάρο;

Λύση



Εφαρμόζοντας τον νόμο των ημιτόνων υπολογίζουμε κατ' αρχήν την γωνία Π:

$$\frac{Π Φ}{ημ 45°} = \frac{10}{ημ Π} \Rightarrow \frac{8}{0,70711} = \frac{10}{ημ Π}$$

$$\Rightarrow ημ Π = 0,88388 \Rightarrow Π = 62° \; 6,87'$$

Η γωνία Φ επομένως θα είναι:

$$Φ = 180° - [(62° \; 6,87') + 45] \Rightarrow$$

$$Φ = 72° \; 54,13'$$

Εφαρμόζουμε πάλι τον νόμο των ημιτόνων για να υπολογίσουμε την πλευρά ΠΑ:

$$\frac{8}{ημ 45°} = \frac{ΠΑ}{ημ(72° 54,13')} \Rightarrow \frac{8}{0,70711} = \frac{ΠΑ}{0,95580} \Rightarrow ΠΑ = 10,8 \text{ μίλια}.$$

Άρα όταν το πλοίο θα απέχει από τον φάρο 8 μίλια θα έχει διανύσει 10,8 μίλια. Από τον τύπο $υ = \frac{s}{t}$ βρίσκουμε τον χρόνο t που χρειάστηκε για να διατρέξει την απόσταση αυτή με την ταχύτητα των 12 μιλ/ώρα: $t = \frac{s}{υ} = \frac{10,8}{12} = 0,9 \, h = 54 \, min$.

Συνεπώς το πλοίο θα βρίσκεται σε απόσταση 8 μιλίων από τον φάρο στις 9 h 54 min το πρωί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

14. Ένα πλοίο καθώς πλέει N 70° E αντιλαμβάνεται ένα φως σε διόπτευση N 36° E. Όταν το πλοίο έχει προχωρήσει 6,5 μίλια επί της ίδιας πορείας, η διόπτευση του φωτός ήταν N 49° W. Ποιά ήταν η απόσταση του φωτός από το πλοίο κατά την πρώτη και κατά την δεύτερη διόπτευση;

15. Ένα σημείο επί της ξηράς απέχει από ένα πλοίο 6,7 μίλια και διοπτεύεται απ' αυτό N 49° 20' E. Το πλοίο κατευθύνεται προς Ανατολάς και μετά 1,25 ώρες το σημείο απέχει 8 μίλια. Ποιά είναι η ταχύτητα του πλοίου και η διόπτευση του σημείου από την δεύτερη

θέση του πλοίου;

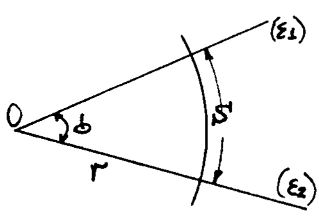
16. Ένας φάρος διοπτεύεται N 15° W από ένα πλοίο που απέχει απ' αυτόν 5 μίλια. Το πλοίο πλέει Βόρειο-Δυτικά και μετά από ταξίδι 8 μιλίων ο φάρος απέχει απ' αυτό 7 μίλια. Να βρεθεί η διόπτευση του φάρου στην δεύτερη θέση του πλοίου.

17. Ένα πλοίο πλέει προς S με ταχύτητα 13 mil/h και διοπτεύει ένα φάρο N 57° E. Μετά από πλου 1h και 15min διοπτεύει τον ίδιο φάρο N 40° E. Να υπολογισθούν οι αποστάσεις του πλοίου από τον φάρο κατά τις δύο παρατηρήσεις.

2.5. ΜΙΚΡΕΣ ΓΩΝΙΕΣ.

Η θεωρία των μικρών γωνιών και οι μέθοδοι υπολογισμού αυτών καθώς και των τριγωνομετρικών τους αριθμών, έχουν τα τελευταία χρόνια σχεδόν εγκαταλειφθεί, διότι οι πάρα πάνω υπολογισμοί γίνονται τώρα με την χρήση των επιστημονικών υπολογιστών τσέπης με απόλυτη σχεδόν ακρίβεια.

Δίνουμε πάντως εδώ ορισμένα θεωρήματα για τις μικρές γωνίες, υπενθυμίζοντας κατ' αρχήν την έννοια του ορισμού της γωνίας γενικά και της μονάδας μετρήσεώς της.



Καλούμε γωνία ϕ το πηλίκο του μήκους s του τόξου που αποκόπτεται από δύο ευθείες τεμνόμενες (ε_1) και (ε_2) στο σημείο O, όταν το τόξο αυτό ανήκει σε περιφέρεια κέντρου O και ακτίνας r, διά του μήκους r της ακτίνας αυτής. Δηλαδή $\phi = \frac{s}{r}$.

Ως μονάδα μετρήσεως της γωνίας χρησιμοποιείται το <u>1 ακτίνιο</u> (<u>1 rad</u>)

Το ακτίνιο ορίζεται σαν εκείνη η επίκεντρη γωνία που σε κύκλο ακτίνας r, αποκόπτει τόξο μήκους ίσου με r.

Κατά συνέπεια η γωνία σε ακτίνια, που αντιστοιχεί σε πλήρη κύκλο

βρίσκεται αν στον τύπο $\phi = \frac{S}{r}$ θέσουμε αντί του S, το μήκος της περιφέρειας του κύκλου, πού είναι $2\pi r$. Άρα $\phi = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ ακτίνια $= 2 \cdot 3{,}14.. \simeq$
$\simeq 6$ ακτίνια.

Μία άλλη μονάδα μετρήσεως των γωνιών είναι η <u>μοίρα</u> (1°) που προκύπτει αν διαιρέσουμε τον κύκλο σε 360 ίσα μέρη.

Σχέση μεταξύ 1 ακτινίου και 1 μοίρας:

Τα 2π ακτίνια αντιστοιχούν σε 360°

το 1 ακτίνιο αντιστοιχεί σε $\frac{360^\circ}{2\pi} = 57{,}3^\circ$.

Η γωνία ϕ είναι καθαρός αριθμός (πηλίκο ομοειδών ποσών) άρα η αριθμητική της τιμή δεν χρειάζεται να ακολουθείται από μονάδα μετρήσεως (η ονομασία rad μπαίνει σε αντιδιαστολή προς την μοίρα).

Αναφέρουμε τώρα μερικά βασικά θεωρήματα, χωρίς απόδειξη, που αφορούν στις μικρές γωνίες:

<u>Θεώρημα 1ο:</u>

Εάν x είναι το μέτρο σε ακτίνια μιας γωνίας θετικής μικρότερης της ορθής, θα ισχύει:

$$ημx < x < εφx.$$

<u>Θεώρημα 2ο:</u>

Εάν x είναι το μέτρο σε ακτίνια μιας γωνίας, ο λόγος $\frac{x}{ημx}$ τείνει πρός την μονάδα, όταν η γωνία αυτή τείνει στο μηδέν.

Όταν λοιπόν η γωνία είναι πολύ μικρή, μπορούμε να λάβουμε αντί του ημιτόνου της, το μέτρο της σε ακτίνια.

Δηλαδή μπορούμε να θέσουμε $ημx = x$.

Φυσικά μπορουμε να θέσουμε και $εφx = x$ και η προσέγγιση θα είναι τόσο μεγαλύτερη, όσο η γωνία θα είναι μικρότερη.

Δίνουμε τώρα και μερικές εφαρμογές πάνω στις μικρές γωνίες:

Εφαρμογή 1η:

Να βρεθούν τα $ημ10'$, $συν10'$, $εφ10'$.

Λύση:

Επειδή $10' = \frac{1^\circ}{6} = \frac{\pi}{180\cdot 6} = \frac{3,14\ldots}{1080} = 0,002908\ldots$

εάν αρκεσθούμε στα πέντε πρώτα δεκαδικά ψηφία, θα έχουμε
$ημ10' = 0,00291$.

Για το συνημίτονο θα έχουμε: $συν10' = \sqrt{1-ημ^2 10'} = 0,999995\ldots$
και αρκούμενοι στα πέντε πρώτα δεκαδικά ψηφία, θα έχουμε: $συν10' = 1$.

Για την εφαπτομένη θα έχουμε:

$$εφ10' = ημ10' = 0,00291$$

<u>Σημείωση:</u> Τα ανωτέρω αποτελέσματα μας τα δίνει αυτομάτως ο επιστημονικός υπολογιστής τσέπης, εάν τον τροφοδοτήσουμε με $10'$ και πατώντας διαδοχικά τα κουμπιά sin, cos, tan.

Εφαρμογή 2η:

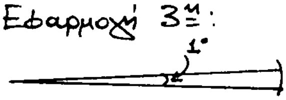
Να βρεθεί το συν, η σφ και η εφ της γωνίας $89^\circ 45'$.

Λύση

Έχουμε $συν(89^\circ\ 45') = ημ15' = \frac{15}{60}\cdot\frac{\pi}{180} = 0,00435 =$
$= εφ15' = σφ(89^\circ\ 45')$.

$εφ(89^\circ\ 45') = \frac{1}{0,00435} = 229,182$.

Εφαρμογή 3η:



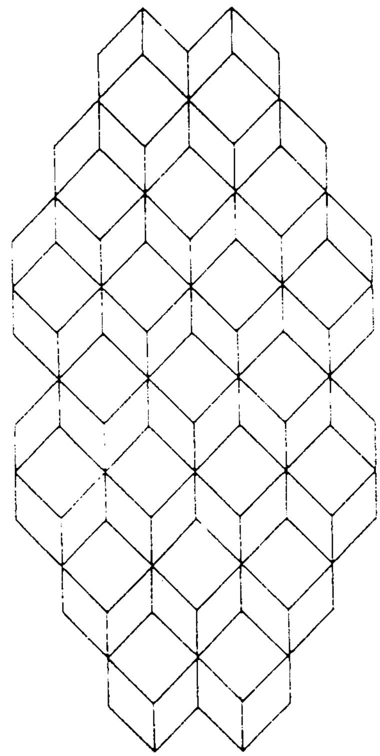
150 ft. Στο σχήμα ποιό θα είναι το λάθος σε πόδια (feet) ανά μίλι του r, εάν η χορδή ληφθεί όσο το αντίστοιχο τόξο και η επίκεντρη γωνία είναι
α') 1°, β') 5°, γ') 10° ;

Λύση

α') 1/4 ft για 1°

β') 6½ ft για 5°

γ') 25 ft για 10°.



3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

3.1. Μονόμετρα και διανυσματικά μεγέθη

Όπως είναι γνωστό, φυσικό μέγεθος λέγεται κάθε μέγεθος που χρησιμοποιείται για την περιγραφή των φυσικών φαινομένων. Η μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους συνίσταται στην σύγκριση αυτού με ένα άλλο ομοειδές του που το δεχόμεθα σαν μονάδα. Από την σύγκριση αυτή προκύπτει ένας αριθμός που λέγεται αριθμητική τιμή του μετρουμένου μεγέθους.

Τα φυσικά τώρα μεγέθη διαιρούνται στα μονόμετρα και στα διανυσματικά.

<u>Μονόμετρο</u> λέγεται το φυσικό μέγεθος που ορίζεται τελείως από την αριθμητική του τιμή και την μονάδα μετρήσεώς του. π.χ. η μάζα (10 gr), η θερμότητα (15 cal) είναι μονόμετρα μεγέθη.

<u>Διανυσματικό</u> λέγεται το μέγεθος που ορίζεται τελείως από την αριθμητική του τιμή, την μονάδα μετρήσεώς του, αλλά ακόμη και από την διεύθυνση και την φορά του. π.χ. η δύναμη, η ταχύτητα, είναι διανυσματικά μεγέθη.

3.2. Διανύσματα

Ονομάζουμε <u>*διανυσμα*</u> κάθε ευθυγραμμο τμημα M_1M_2 που τα άκρα του M_1, M_2 λαμβάνονται με ορισμενη ταξη Συμβολίζεται δε με $\overrightarrow{M_1M_2}$.

$$M_1 \longrightarrow M_2$$

σχ. 1.

Τό πρώτο σημείο M_1 ονομάζεται <u>*αρχη*</u> και το δευτερο <u>*περας*</u> (ή *τελος*) του διανύσματος M_1M_2

Πολλές φορες συμβολίζουμε τα διανύσματα με μικρα γράμματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$,

<u>*Μετρο*</u> του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ονομάζεται το μήκος του ευθύγράμμου τμήματος AB και συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$.

<u>*Μηδενικό*</u> *διανυσμα* ονομαζεται το διάνυσμα που η <u>αρχή</u> του και το τέλος του συμπίπτουν Συμβολίζεται δε με $\vec{0}$.

Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BA}$ θεωρούνται οτι εχουν αντιθετη φορά και δεχομεθα οτι $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

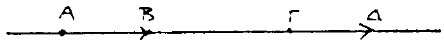
Η φορά του μηδενικού διανύσματος δεν ορίζεται ενώ το μετρο του είναι ο αριθμός 0.

3.2.1. ΙΣΟΤΗΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ που βρισκονται πάνω στην ίδια ευθεία λέγονται ίσα όταν:

1. Εχουν τα ίδια μέτρα, δηλαδη $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

2 Εχουν την ιδια φορα

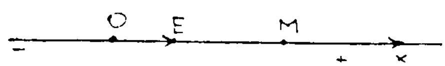


σχ. 2

3.3. Άξονας συντεταγμένων

Αν σε μια ευθεία θεωρήσουμε ένα σταθερό σημείο Ο που το ονομάζουμε αρχή και ένα διάνυσμα $\overrightarrow{OE}$ με αρχή το Ο και μέτρο την μονάδα, τότε την ευθεία αυτή την ονομάζουμε <u>άξονα συντεταγμένων</u>

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{OE}$ $(\overrightarrow{OE} = 1)$ ονομάζεται ακόμη και μονάδα μετρήσεως.



σχ. 3

<u>Θετική</u> φορά του άξονα λέγεται εκείνη που συμπίπτει με την φορά του μοναδιαίου διανύσματος $\overrightarrow{OE}$ και <u>αρνητική</u> η αντίθετή της (σχ. 3)

<u>Συντεταγμένη</u> του σημείου Μ που βρίσκεται πάνω στον άξονα με αρχή το Ο και μοναδιαίο διάνυσμα το $\overrightarrow{OE}$, ονομάζουμε τον πραγματικό αριθμό x που τον συμβολίζουμε με $(\overrightarrow{OM})$ και δίνεται από την ισότητα $(\overrightarrow{OM}) = x = \pm \dfrac{|\overrightarrow{OM}|}{|\overrightarrow{OE}|}$

Το πρόσημο + λαμβάνεται αν τα διανύσματα $\overrightarrow{OM}$ και $\overrightarrow{OE}$ έχουν την ίδια φορά και το − αν τα διανύσματα $\overrightarrow{OM}$ και $\overrightarrow{OE}$ έχουν αντίθετη φορά.

Το σημείο Μ του άξονα στο οποίο αντιστοιχεί συντεταγμένη x το συμβολίζουμε με Μ (x).

Το σημείο Μ έχει συντεταγμένη μηδέν αν αυτό συμπίπτει με την αρχή Ο.

Από τον ορισμό της συντεταγμένης ενός σημείου του άξονα συμπεραίνουμε ότι σε κάθε σημείο αντιστοιχεί ένας και μόνο ένας πραγματικός αριθμός δηλ. η συντεταγμένη του και αντιστρόφως.

Εχουμε έτσι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του συνόλου R των πραγματικών αριθμών προς το σύνολο των σημείων του άξονα

3.3.1. Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων του ίδιου άξονα

Η πρόσθεση και η αφαίρεση δύο διανυσμάτων του ίδιου άξονα δίνεται αντίστοιχα από τους παρακάτω τύπους

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$$
$$\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{AB}. \qquad (1)$$

Η συντεταγμένη διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$ όπου $M_1(x_1)$ και $M_2(x_2)$ συμβολίζεται με $(\overrightarrow{M_1M_2})$ και ορίζεται από τον τύπο

$$(\overrightarrow{M_1M_2}) = x_2 - x_1 \qquad (2)$$

Το μέτρο $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ του διανύσματος $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ η η απόσταση d μεταξύ των σημείων $M_1(x_1)$ και $M_2(x_2)$ ορίζεται από την σχέση:

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = d = |x_2 - x_1| \quad (3)$$

3.3.2. Απλός λόγος τριών σημείων του ίδιου άξονα

Απλός λόγος τριών σημείων A, B, Γ πού βρίσκονται πάνω στον ίδιο άξονα και με την τάξη A, B, Γ ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός λ που συμβολίζεται με $(AB\Gamma)$ και ορίζεται από τη σχέση·

$$(AB\Gamma) = \frac{(\overrightarrow{A\Gamma})}{(\Gamma B)} \qquad (4)$$

Αν έχουμε τρία σημεία $A(x_1)$, $B(x_2)$ και $\Gamma(x_3)$ του ίδιου άξονα τότε από την (4) έχουμε

$$(AB\Gamma) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} \qquad (5)$$

Από τον ορισμό του απλού λόγου τριών σημείων A, B, Γ έχουμε την πρόταση

Ο λόγος $(ΑΒΓ)$ είναι θετικός ή αρνητικός καθόσο το $Γ$ είναι εσωτερικό ή εξωτερικό σημείο του τμήματος $ΑΒ$

Για κάθε $λ \neq -1$ υπάρχει ένα και μοναδικό σημείο $Γ(x)$ που διαιρεί το τμήμα $ΑΒ$ στο λόγο $(ΑΒΓ) = λ$

Αν $Α(x_1)$, $Β(x_2)$, $Γ(x)$ και $(ΑΒΓ) = λ$ τότε από τις (4) και (5) παίρνουμε :

$$x = \frac{x_1 + λ x_2}{1 + λ} \qquad (6)$$

Εάν $λ = 1$ το σημείο $Γ(x)$ είναι μέσο του τμήματος $ΑΒ$ και η συντεταγμένη x του $Γ$ ορίζεται από τον τύπο

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad (6α)$$

Παραδείγματα:

18. Να βρεθούν τα σημεία που οι συντεταγμένες τους ικανοποιούν τις εξισώσεις:

α) $\frac{5x-2}{3} - \frac{2x-1}{7} = \frac{3x+4}{2} - 3$ β) $x^4 - 4 = 0$

Λυση:

Πρέπει τις παραπάνω εξισώσεις να τις λύσουμε ως προς x για να βρούμε τις συντεταγμένες των σημείων

α) $\frac{5x-2}{3} - \frac{2x-1}{7} = \frac{3x+4}{2} - 3 \iff$

$14(5x-2) - 6(2x-1) = 21(3x+4) - 3 \cdot 42$

$\iff x = 4$. Άρα το σημείο είναι το $Α(4)$

β) $x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm 2$ και τα σημεία είναι $Β(2)$ και $Γ(-2)$

19. Να βρεθεί η συντεταγμένη $(\overrightarrow{AB})$ και το μέτρο $|\overrightarrow{AB}|$ του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, όταν α) $Α(2)$, $Β(5)$, β) $Α(-2)$, $Β(4)$ γ) $Α(-5)$, $Β(-4)$, δ) $Α(-2)$, $Β(-4)$

Λύση:

Σύμφωνα με τους τύπους (2) και (3) έχουμε·

α) $(\overrightarrow{AB}) = 5-2 = 3$ και $|\overrightarrow{AB}| = |5-3| = 2$

β) $(\overrightarrow{AB}) = 4-(-2) = 6$ και $|\overrightarrow{AB}| = |4-(-2)| = 6$

γ') $(\overrightarrow{AB}) = -4-(-5) = 1$ και $|\overrightarrow{AB}| = |-4-(-5)| = 1$

δ') $(\overrightarrow{AB}) = +4-(-2) = 6$ και $|\overrightarrow{AB}| = |4-(-2)| = 6$

20. Δίνονται τα σημεία $A(-1)$, $B(5)$ και $\Gamma(3)$. Να βρεθεί ο απλός λόγος που το κάθε σημείο από αυτά διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα των δύο άλλων

Λύση:

Βάσει του τύπου (4), έχουμε·

α') $(AB\Gamma) = \dfrac{(\overrightarrow{A\Gamma})}{(\overrightarrow{\Gamma B})} = \dfrac{3+1}{5-3} = 2$ β') $(A\Gamma B) = \dfrac{(\overrightarrow{AB})}{(\overrightarrow{B\Gamma})} = \dfrac{5+1}{3-5} = -3$

γ') $(BA\Gamma) = \dfrac{(\overrightarrow{B\Gamma})}{(\overrightarrow{\Gamma A})} = \dfrac{3-5}{-1-3} = \dfrac{1}{2}$ δ) $(\Gamma AB) = \dfrac{(\overrightarrow{\Gamma B})}{(\overrightarrow{BA})} = \dfrac{5-3}{-1-5} = -\dfrac{1}{3}$

21. Δίνονται τα σημεία $M_1(7)$ και $M_2(6)$. Να βρεθεί η τετμημένη x του σημείου M που διαιρεί το τμήμα M_1M_2 σε λόγο

α') $\lambda = 3$ β') $\lambda = -\frac{1}{2}$

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι αν $(MMM) = \lambda$ με $M_1(x)$ και $M_2(x_2)$ τότε για το $M(x)$ έχουμε $x = \dfrac{x + \lambda x}{1+\lambda}$. Άρα εδώ έχουμε

$x = \dfrac{7+6\lambda}{1+\lambda}$

Από αυτή τη σχέση τώρα έχουμε

α) $\lambda = 3$ άρα $x = \dfrac{7+6\cdot 3}{1+3} = \dfrac{25}{4}$

β) $\lambda = -\frac{1}{2}$ άρα $x = 8$

22. Έστω $(ABP) = \lambda$ και $(AB\Sigma) = \mu$. Αν T είναι το μέσο του τμήματος $P\Sigma$ να υπολογίσετε τον λόγο (ABT)

Λύση

Μπορούμε να πάρουμε $A(0)$ και $B(1)$. Αν θέσουμε $P(\rho)$ και $\Sigma(\sigma)$ οι σχέσεις που μας δίνονται από την εκφώνηση μας δίνουν

$$\rho = \frac{1}{1+\lambda} \quad \text{και} \quad \sigma = \frac{1}{1+\mu} \qquad (1)$$

Επειδή το $T(\tau)$ είναι μέσο του $P\Sigma$, έχουμε

$$\tau = \frac{\rho+\sigma}{2} = \frac{\frac{1}{1+\lambda} + \frac{1}{1+\mu}}{2} = \frac{\lambda+\mu+2}{2(\lambda+1)(\mu+1)} \qquad (2)$$

$$\text{Άρα } (ABT) = \frac{(\overrightarrow{AT})}{(\overrightarrow{TB})} = \frac{\tau-0}{1-\tau} = \frac{\frac{\lambda+\mu+2}{2(1+\lambda)(1+\mu)}}{1-\frac{\lambda+\mu+2}{2(1+\lambda)(1+\mu)}} = \frac{\lambda+\mu+2}{\mu+2\lambda+\lambda}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

23. Δίνονται τα σημεία $A(2)$, $B(7)$ και $\Gamma(4)$. Να βρείτε την συντεταγμένη του σημείου Δ αν $(AB\Delta) = -\frac{2}{3}$ και αν Δ' είναι το μέσο του τμήματος $\Gamma\Delta$, να βρείτε το λόγο $(AB\Delta')$

24. Να βρείτε την συντεταγμένη του σημείου A αν 1) $B(3)$ και $(\overrightarrow{AB}) = 5$, 2) $B(-1)$ και $(\overrightarrow{BA}) = 2$

25. Αν $(ABM) = \lambda$, να βρείτε το λόγο (ABM'), όπου M' είναι συμμετρικό του σημείου M ως προς το μέσο του τμήματος AB.

26. Πάνω στο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ παίρνουμε σημείο Γ ώστε $(AB\Gamma) = \lambda \neq 1$, το σημείο Δ ώστε $(AB\Delta) = -\lambda$ και το σημείο E που είναι το μέσο του διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. 1) Να βρείτε το λόγο (ABE). 2) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \neq 1$ το σημείο E βρίσκεται έξω από το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$

27. Αν $\frac{(\overrightarrow{AP})}{(\overrightarrow{PB})} = \lambda$, $\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}} = \mu$ και $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \nu$ $(\mu \neq \nu)$, να βρείτε το λόγο (PQR).

3.4. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

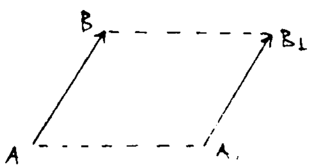
3.4.1. Ισότητα διανυσμάτων

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A_1B_1}$ είναι ίσα (ή ισοδύναμα) όταν:

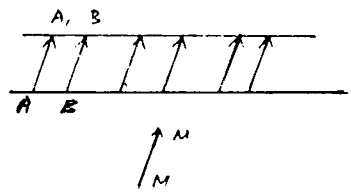
α) Έχουν ίσα μέτρα δηλ. $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{A_1B_1}|$

β) Είναι παράλληλα (δηλαδή βρίσκονται πάνω σε παράλληλες ευθείες)

γ) Έχουν την ίδια φορά.



Σχ 4



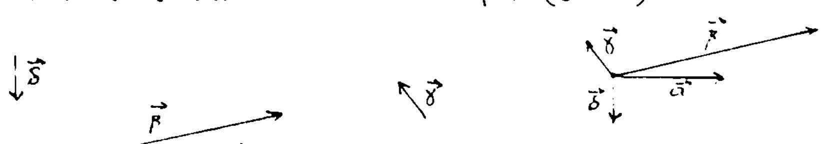
Σχ 5

Από τον ορισμό της ισότητας δύο διανυσμάτων συμπεραίνουμε ότι δύο διανύσματα διαφέρουν μόνο ως πρός το σημείο εφαρμογής τους, δηλαδή το διάνυσμα $\overrightarrow{A_1B_1}$ είναι το ίδιο το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ που μεταφέρθηκε παράλληλα στη θέση $\overrightarrow{A_1B_1}$.

Έτσι όλα τα διανύσματα που είναι ίσα, ανεξάρτητα από το σημείο εφαρμογής τους αποτελούν κλάση διανυσμάτων $\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{AA_1}$

Το σύνολο αυτό θεωρείται μια καινούργια μαθηματική έννοια που ονομάζεται <u>ελεύθερο</u> διάνυσμα και ορίζεται από κάθε ένα από τα ίσα διανύσματα που αποτελούν την δεδομένη κλάση (σχ. 5)

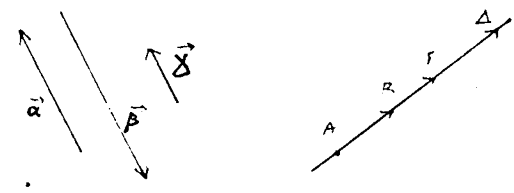
Από τον ορισμό της ισότητας συμπεραίνουμε πως οποιοσδήποτε αριθμό διανυσμάτων μπορούμε να τον μεταφέρουμε παράλληλα έτσι ώστε να έχουν κοινή αρχή (σχ. 6)



σχ 6

3.4.2. Συγγραμμικά διανύσματα

Τα διανύσματα πού είναι παράλληλα (δηλ. βρίσκονται πάνω σε παράλληλες ευθείες ή στην ίδια ευθεία) ονομάζονται <u>συγγραμμικά</u> (σχ 7).



σχ. 7

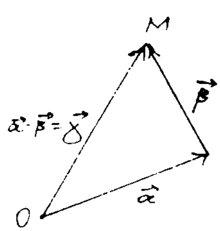
<u>Ομόρροπα</u> ονομάζονται τα συγγραμμικά διανύσματα που έχουν την ίδια φορά π.χ. τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$ (σχ.7).

<u>Αντίρροπα</u> ονομάζονται τα συγγραμμικά διανύσματα που έχουν αντίθετη φορά π.χ. τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ (σχ. 7).

3.4.3. Πρόσθεση διανυσμάτων.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ονομάζεται το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που κατασκευάζεται ως εξής·

Απο τυχόν σημείο O (σχ. 8) χαράσουμε το διανυσμα $\vec{OB}=\vec{\alpha}$ και με αρχη το σημειο B χαρασουμε το διανυσμα $\vec{BM}=\vec{\beta}$



σχ. 8

Το διανυσμα $\vec{\gamma}=\vec{OM}$ ειναι το αθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ (κανόνας τριγώνου). Γράφουμε τότε $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ (I)

Ισχύουν οι ανισώσεις :

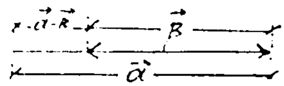
$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leqslant |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \qquad (8)$$

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \geqslant |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| \qquad (9)$$

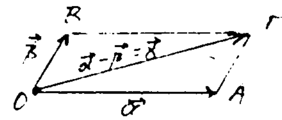
που εκφράζουν τις ιδιότητες της πλευράς $\vec{OM}$ του τριγώνου OMB (σχ8)

Στην σχέση (8) η ισότητα ισχύει όταν τα διανύσματα είναι ομοροπα (σχ 9), στην (9) μονο οταν ειναι αντιροπα (σχ 10)

σχ. 9



σχ. 10



σχ. 11

Κανόνας παραλληλογράμμου: Όταν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικα διανύσματα, τοτε το άθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ μπορούμε να το ορίσουμε ως εξής: Απο τυχον σημειο O σαν αρχή (σχ. 11) κατασκευάζουμε το διάνυσμα $\vec{OA}=\vec{\alpha}$ και το $\vec{OB}=\vec{\beta}$. Με πλευρές OA και OB κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο OAΓB. Το διανυσμα τοτε $\vec{O\Gamma}=\vec{\gamma}$ είναι το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ (διότι $\vec{A\Gamma}=\vec{OB}=\vec{\beta}$ άρα $\vec{O\Gamma}=\vec{OA}+\vec{A\Gamma}$).

Άθροισμα αντιθέτων διανυσματων: Εκ του ορισμου του αθροίσματος συνάγουμε οτι το άθροισμα αντιθέτων διανυσμάτων ισούται με μηδεν, δηλαδή

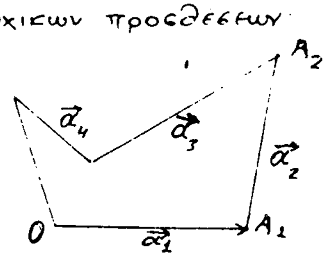
$$\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0} \qquad (\mathrm{II})$$

Ισχύει εδω η αντιμεταθετική ιδιότητα:

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha} \qquad (\mathrm{III})$$

34.4. Άθροισμα πολλων διανυσμάτων

ΟΡΙΣΜΟΣ. Αθροισμα πολλών διανυσματων $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_\nu$ ονομάζεται το διανυσμα που κατασκευάζεται μετα υποσειρά διαδοχικων προσθεσεων: Στο διανυσμα $\vec{\alpha}_1$ προστίθεται το διανυσμα a_2, στο αθροισμα $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$ προστιθεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}_3$ κ.ο.κ. Ετσι συνάγεται ο εξης τροπος κατασκευης του αθροίσματος πολλων διανυσματων (κανόνας πολυγώνου). Απο τυχον σημειο O κατασκευάζουμε το διανυσμα $\vec{OA_1}=\vec{\alpha}_1$, απο το σημειο



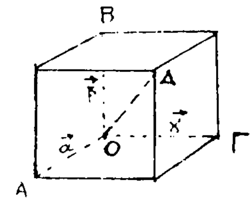
σχ. 12

A_1 φέρουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{\alpha}_2$ κ.λ.π. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OA_\nu}$ είναι το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_\nu$ δηλαδή

$\overrightarrow{OA_\nu} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \dots + \vec{\alpha}_\nu$

Ισχύει η <u>προσεταιριστική</u> ιδιότητα $(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) + \vec{\alpha}_3 = \vec{\alpha}_1 + (\vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3)$

Αν τρία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\chi}$ μετά την μεταφορά τους σε κοινή αρχή, δεν βρίσκονται σε ένα επίπεδο τότε το άθροισμα βρίσκεται με τον κανόνα του παραλληλεπιπέδου (σχ. 13) $\overrightarrow{O\Delta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$



σχ 13

<u>Παραδείγματα</u>

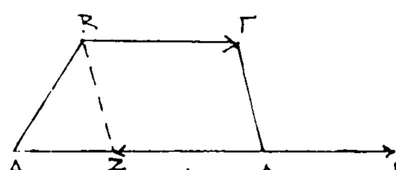
28. Δίδεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με βάσεις ΑΔ=α και ΒΓ=β (α>β). Να κατασκευασθούν τα διανύσματα:

i) $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma}$, ii) $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B}$, iii) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Να βρεθούν κατόπιν τα μέτρα των διανυσμάτων αυτών.

<u>Λύση:</u>

i) Με αρχή το Δ παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{B\Gamma}$. Έχουμε

$\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{AE}$.



σχ.14.

Το μέτρο του $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma}$ είναι:

$|\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma}| = |\overrightarrow{AE}| = \alpha + \beta = |\overrightarrow{A\Delta}| + |\overrightarrow{B\Gamma}|$.

ii) Με αρχή το Δ παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta Z} = \overrightarrow{\Gamma B}$ οπότε:

$\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta Z} = \overrightarrow{AZ}$.

Μέτρο: $|\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B}| = |\overrightarrow{AZ}| = \alpha - \beta = |\overrightarrow{A\Delta}| - |\overrightarrow{\Gamma B}|$.

iii) Έχουμε $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{BZ}$. Άρα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BZ} = \overrightarrow{AZ}$

Μέτρο: $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}| = |\overrightarrow{AZ}| = \alpha - \beta$.

29. Δίδονται 4 σημεία στο επίπεδο Α, Β, Γ, Δ.
Να δειχθεί ότι: i) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{\Delta B}$ ii) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma A} = \vec{0}$.

<u>Λύση</u>

Έχουμε·

$\iota)\ \vec{AB}+\vec{\Delta A}=\vec{\Delta A}+\vec{AB}=\vec{\Delta B}$

$\iota\iota)\ \vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma A}=(\vec{AB}+\vec{B\Gamma})+\vec{\Gamma A}=\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma A}=\vec{AA}=0$

30. Δίνεται το παραλληλεπίπεδο $AB\Gamma\Delta A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$. Να βρείτε το άθροισμα των διανυσμάτων: $i)\ \vec{AB}+\vec{BB_1}+\vec{B_1\Gamma_1}$ $ii)\ \vec{\Gamma B}+\vec{B_1A_1}+\vec{A\Delta_1}$ $iii)\ \vec{A\Gamma_1}+\vec{\Delta_1 A}+\vec{B\Delta_1}$

Λύση

$i)\ \vec{AB}+\vec{BB_1}+\vec{B_1\Gamma_1}=(\vec{AB}+\vec{BB_1})+\vec{B_1\Gamma_1}=\vec{AB_1}+\vec{B_1\Gamma_1}=\vec{A\Gamma_1}$

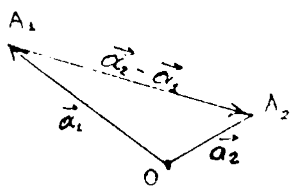
$ii)$ Είναι $\vec{B_1A_1}=\vec{BA}$ διότι έχουμε παράλληλο επίπεδο. Άρα
$\vec{\Gamma B}+\vec{B_1A_1}+\vec{A\Delta_1}=\vec{\Gamma B}+\vec{BA}+\vec{A\Delta_1}=(\vec{\Gamma B}+\vec{BA})+\vec{A\Delta_1}=\vec{\Gamma A}+\vec{A\Delta_1}=\vec{\Gamma\Delta_1}$

$iii)\ \vec{A\Gamma_1}+\vec{\Delta_1A}+\vec{B\Delta_1}=\vec{\Delta_1A}+\vec{A\Gamma_1}+\vec{B\Delta_1}=(\vec{\Delta_1A}+\vec{A\Gamma_1})+\vec{B\Delta_1}=$
$=\vec{\Delta_1\Gamma_1}+\vec{B\Delta_1}=\vec{B\Delta_1}+\vec{\Delta_1\Gamma}=\vec{B\Gamma_1}.$

3.4.5 Αφαίρεση διανυσμάτων

ΟΡΙΣΜΟΣ. Η αφαίρεση διανυσμάτων είναι πράξη αντίστροφη της πρόσθεσης. Έτσι έχουμε

$$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{x}\iff\vec{\alpha}=\vec{\beta}+x$$



σχ. 15

Από τον ορισμό συνάγεται ο παρακάτω τρόπος κατασκευής της διαφοράς δύο διανυσμάτων: Από τυχόν σημείο O (σχ. 15) φέρουμε τα διανύσματα $\vec{OA_1}=\vec{\alpha_1}$, $\vec{OA_2}=\vec{\alpha_2}$. Το διάνυσμα A_1A_2 (που χαράζεται από το τέλος του αφαιρετέου προς το τέλος του μειωτέου) είναι η διαφορά.

$$\vec{A_1A_2}=\vec{OA_2}-\vec{OA_1} \qquad (10)$$

Σημείωση. Ο παραπάνω τύπος γράφεται και στη μορφή

$$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA} \qquad (10')$$

και χρησιμεύει για την λύση ασκήσεων.

Παραδείγματα

31. Θεωρούμε σημείο O που δεν ανήκει στο επίπεδο του τριγώνου ΑΒΓ. Να βρεθούν τα διανύσματα:

i) $\vec{OA}-\vec{OB}$ ii) $-\vec{OA}-\vec{AB}$ iii) $\vec{OA}+\vec{AB}-\vec{O\Gamma}$

Λύση:

Έχουμε:

i) $\vec{OA}-\vec{OB}=\vec{OA}+(-\vec{OB})=\vec{OA}+\vec{BO}=\vec{BO}+\vec{OA}=\vec{BA}$

ii) $-\vec{OA}-\vec{AB}=(-\vec{OA})+(-\vec{AB})=\vec{AO}+\vec{BA}=\vec{BA}+\vec{AO}=\vec{BO}$

iii) $\vec{OA}+\vec{AB}-\vec{O\Gamma}=(\vec{OA}+\vec{AB})-\vec{O\Gamma}=\vec{OB}-\vec{O\Gamma}=\vec{OB}+(-\vec{O\Gamma})=\vec{OB}+\vec{\Gamma O}=$

$=\vec{\Gamma O}+\vec{OB}=\vec{\Gamma B}$

32. Σε κάθε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ να δείξετε ότι: $\vec{OA}+\vec{O\Gamma}=\vec{OB}+\vec{O\Delta}$ όπου O τυχόν σημείο του χώρου

Λύση:

Έχουμε $\vec{\Delta A}=\vec{\Gamma B}$ (το ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο)

$\iff \vec{\Delta O}+\vec{OA}=\vec{\Gamma O}+\vec{OB} \iff -\vec{O\Delta}+\vec{OA}=-\vec{O\Gamma}+\vec{OB} \iff$

$\vec{OA}+\vec{O\Gamma}=\vec{OB}+\vec{O\Delta}$.

33. Να δείξετε ότι αν τα σημεία O, A και B δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία και $\vec{O\Gamma}=\vec{OA}-\vec{OB}$ τότε το τετράπλευρο ΟΒΑΓ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση:

Από την $\vec{O\Gamma}=\vec{OA}-\vec{OB} \iff \vec{O\Gamma}=\vec{OA}+\vec{BO} \iff$

$\vec{O\Gamma}=\vec{BO}+\vec{OA} \iff \vec{O\Gamma}=\vec{BA}$ Από εδώ συνάγεται ότι οι απέναντι πλευρές ΟΓ και ΒΑ είναι παράλληλες και έχουν ίσα μέτρα, άρα το τετράπλευρο ΟΒΑΓ είναι παραλληλόγραμμο.

3.4.6. Πολλαπλασιασμός διανύσματος επί αριθμό

ΟΡΙΣΜΟΣ: Πολλαπλασιασμός διανύσματος $\vec{\alpha}$ επί αριθμό $\lambda \in R$

λέγεται το διάνυσμα που είναι συγγραμμικό με το $\vec{\alpha}$ και έχει μήκος $|\lambda||\vec{\alpha}|$. Αν $\lambda > 0$ η φορά του διανύσματος (γινομένου) θα συμπίπτει με την φορά του διανύσματος $\vec{\alpha}$, ενώ αν $\lambda < 0$ τότε η φορά του θα είναι αντίθετη του $\vec{\alpha}$.

Αν $\lambda = 0$ τότε το γινόμενο είναι μηδενικό διάνυσμα. Το γινόμενο διανύσματος επί αριθμό τό συμβολίζουμε με $\lambda\vec{\alpha}$ ή $\vec{\alpha}\lambda$. και ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

δ') $1 \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$

ε') $\lambda(\mu\vec{\alpha}) = \lambda\mu(\vec{\alpha}) \quad \lambda, \mu \in R$

στ') $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$

ζ') $\vec{\alpha}(\lambda + \mu) = \vec{\alpha}\lambda + \vec{\alpha}\mu$.

Επομένως το σύνολο των διανυσμάτων εφοδιασμένο με τις πράξεις "πρόσθεση διανυσμάτων" και "πολλαπλασιασμός διανύσματος επί αριθμό" που εκπληρώνει τις ιδιότητες α', β', γ', δ', ε', στ' και ζ' αποτελεί <u>διανυσματικό χώρο</u>.

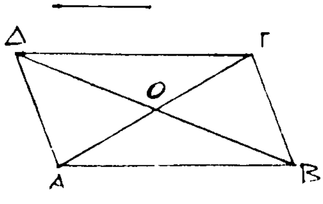
Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ δεν είναι μηδενικό τότε $\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \cdot \vec{\alpha}^{\circ}$ όπου $|\vec{\alpha}^{\circ}| = 1$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Από την παραπάνω σχέση έχουμε $\vec{\alpha}^{\circ} = \dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$.

<u>Συνθήκη συγγραμμικότητας</u> δύο διανυσμάτων είναι η $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ όπου $\lambda = \pm \dfrac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$ όπου το $+$ λαμβάνεται αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα και το $-$ όταν είναι αντίρροπα.

<u>Παραδείγματα:</u>

34. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ κέντρου Ο. Να υπολογισθεί ο x αν: i) $\vec{AB} = x\vec{\Gamma\Delta}$ ii) $\vec{A\Gamma} = x\vec{AO}$ iii) $\vec{OB} = x\vec{B\Delta}$ iv) $\vec{O\Gamma} = x\vec{\Gamma\Delta}$.

<u>Λύση:</u>



i) Έχουμε: $\vec{AB} = \vec{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \vec{AB} = -\vec{\Gamma\Delta}$ $\Leftrightarrow \vec{AB} = (-1)\vec{\Gamma\Delta}$ άρα $x = -1$.

ii) Ισχύει $\vec{A\Gamma} = \vec{AO} + \vec{O\Gamma} = \vec{AO} + \vec{AO} =$

$= 2\vec{AO} \Leftrightarrow x=2.$

iii) Ισχύει $\vec{OB}=2\vec{\Delta B} \Leftrightarrow \vec{OB}=(-2)\vec{B\Delta}$ άρα $x=-2$

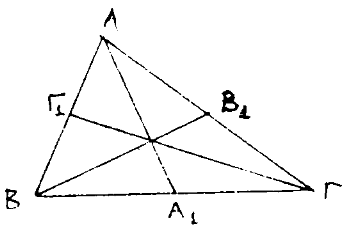
iv) Επειδή τα διανύσματα $\vec{O\Gamma}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ δεν είναι συγγραμμικά δεν υπάρχει x τέτοιο που $\vec{O\Gamma}=x\vec{\Gamma\Delta}$

35. Οι διάμεσοι AA_1, BB_1 και $\Gamma\Gamma_1$ τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνονται στο σημείο M. Να υπολογισθεί ο αριθμός k αν

i) $\vec{A_1\Gamma}=k\vec{B\Gamma}$ ii) $\vec{\Gamma_1B}=k\vec{\Gamma_1A}$, iii) $\vec{AM}=k\vec{MA_1}$

iv) $\vec{\Gamma\Gamma_1}=k\vec{\Gamma_1M}$ v) $\vec{MB_1}=k\vec{B_1B}$ vi) $\vec{MA}=k\vec{AA_1}$

Λύση·



i) $\vec{A_1\Gamma}=\frac{1}{2}\vec{B\Gamma} \Rightarrow k=\frac{1}{2}$

ii) $\vec{\Gamma_1B}=\vec{A\Gamma_1} \Rightarrow \vec{\Gamma_1B}=-\vec{\Gamma_1A} \Rightarrow k=-1$

iii) $\vec{AM}=\frac{2}{3}\vec{AA_1}=2\left(\frac{1}{3}\vec{AA_1}\right)=2\vec{MA_1}$

$\Rightarrow k=2.$

iv) $\vec{\Gamma\Gamma_1}=3\vec{M\Gamma_1} \Rightarrow \vec{\Gamma\Gamma_1}=-3\vec{\Gamma_1M} \Rightarrow k=-3$

v) $\vec{MB_1}=\frac{1}{3}\vec{BB_1} \Rightarrow \vec{MB_1}=-\frac{1}{3}\vec{B_1B} \Rightarrow k=-\frac{1}{3}$

vi) $\vec{MA}=\frac{2}{3}\vec{A_1A} \Rightarrow \vec{MA}=-\frac{2}{3}\vec{AA_1} \Rightarrow k=-\frac{2}{3}$

36. Δίδονται τρία σημεία A, B, Γ για τα οποία έχουμε $\vec{AB}=2\vec{B\Gamma}$. Να δείξετε ότι για τυχόν σημείο O ισχύει: $\vec{OB}=\frac{1}{3}\vec{OA}+\frac{2}{3}\vec{O\Gamma}$.

Λύση:

Επειδή $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$ και $\vec{B\Gamma}=\vec{O\Gamma}-\vec{OB}$ έχουμε·

$\vec{AB}=2\vec{B\Gamma} \Leftrightarrow \vec{OB}-\vec{OA}=2(\vec{O\Gamma}-\vec{OB}) \Leftrightarrow$

$3\vec{OB}=\vec{OA}+2\vec{O\Gamma} \Leftrightarrow \vec{OB}=\frac{1}{3}\vec{OA}+\frac{2}{3}\vec{O\Gamma}$

37. Αν το Β είναι συμμετρικό του Α ως προς το κέντρο Σ και Ο τυχόν σημείο του επιπέδου, δείξετε ότι: $\vec{OB}=2\vec{O\Sigma}-\vec{OA}$

Λύση.

Αφού τα σημεία Α και Β είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο Σ, έχουμε: $\vec{\Sigma B}=-\vec{\Sigma A}$

Οπότε για κάθε σημείο Ο του επιπέδου θα έχουμε:

$$\vec{OB}-\vec{O\Sigma}=\vec{O\Sigma}-\vec{OA} \quad (\text{διότι } \vec{\Sigma B}=\vec{OB}-\vec{O\Sigma} \text{ και } \vec{A\Sigma}=\vec{O\Sigma}-\vec{OA})$$

άρα $\vec{OB}=2\vec{O\Sigma}-\vec{OA}$.

38. Αν Μ το μέσο του ευθ. τμήματος ΑΒ και Ο τυχόν σημείο δείξετε ότι $\vec{OM}=\dfrac{\vec{OA}+\vec{OB}}{2}$.

Λύση:

Επειδή $\vec{AM}=\vec{MB} \Leftrightarrow$

$\vec{AO}+\vec{OM}=\vec{MO}+\vec{OB} \Leftrightarrow \vec{OM}-\vec{MO}=-\vec{AO}+\vec{OB}$

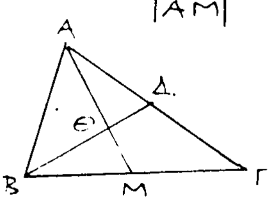
$\Leftrightarrow \vec{OM}+\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{OB}$

$\Leftrightarrow 2\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{OB} \Leftrightarrow \vec{OM}=\dfrac{\vec{OA}+\vec{OB}}{2}$

39. Αν Θ είναι το κέντρο βάρους ενός τριγώνου ΑΒΓ, να δείξετε ότι: $\vec{\Theta A}+\vec{\Theta B}+\vec{\Theta \Gamma}=0$

Λύση:

Έστω ότι η ΑΘ τέμνει την ΒΓ στο Μ. Αφού το Θ είναι σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου και η ΑΜ διάμεσος του θα ισχύει $\dfrac{|\vec{A\Theta}|}{|\vec{AM}|}=\dfrac{2}{3}$, και επειδή τα διανύσματα $\vec{A\Theta}$ και $\vec{AM}$ είναι ομόρροπα, έχουμε: $\dfrac{\vec{A\Theta}}{\vec{AM}}=\dfrac{|\vec{A\Theta}|}{|\vec{AM}|}$



Από τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε

$$\frac{\vec{A\Theta}}{\vec{AM}}=\frac{2}{3} \Longrightarrow \vec{A\Theta}=\frac{2}{3}\vec{AM} \qquad (1)$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι $\vec{AM}=\dfrac{\vec{AB}+\vec{A\Gamma}}{2}$

οπότε η (1) γράφεται $\vec{A\Theta}=\frac{1}{3}(\vec{AB}+\vec{A\Gamma})$ (2)

Ομοίως θα έχουμε $\vec{B\Theta}=\frac{1}{3}(\vec{BA}+\vec{B\Gamma})$, $\vec{\Gamma\Theta}=\frac{1}{3}(\vec{\Gamma A}+\vec{\Gamma B})$ (3)

Προσθέτοντας τις (2) και (3) παίρνουμε

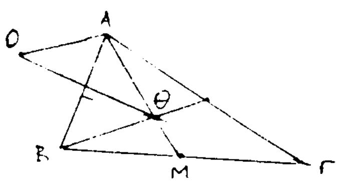
$$\vec{A\Theta}+\vec{B\Theta}+\vec{\Gamma\Theta}=\frac{1}{3}\left[(\vec{AB}+\vec{A\Gamma})+(\vec{BA}+\vec{B\Gamma})+(\vec{\Gamma A}+\vec{\Gamma B})\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left[(\vec{AB}+\vec{BA})+(\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma B})+(\vec{\Gamma A}+\vec{A\Gamma})\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\vec{O}+\vec{O}+\vec{O}\right]=\frac{1}{3}\cdot\vec{O}=\vec{O}$$

40. Αν Θ είναι το κέντρο βάρους ενός τριγώνου ΑΒΓ και Ο τυχόν σημείο, δείξετε ότι: $\vec{O\Theta}=\frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma})$

Λύση:



Έχουμε:

$\vec{O\Theta}=\vec{OA}+\vec{A\Theta}$

$\vec{O\Theta}=\vec{OB}+\vec{B\Theta}$

$\vec{O\Theta}=\vec{O\Gamma}+\vec{\Gamma\Theta}$

Προσθέτοντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη έχουμε

$$3\vec{O\Theta}=(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma})+(\vec{A\Theta}+\vec{B\Theta}+\vec{\Gamma\Theta}) \quad (1)$$

και επειδή από το προηγούμενο παράδειγμα πήραμε $\vec{A\Theta}+\vec{B\Theta}+\vec{\Gamma\Theta}=\vec{O}$, η (1) γίνεται

$$3\vec{O\Theta}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma} \Leftrightarrow \vec{O\Theta}=\frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma})$$

41. Έστω Μ σημείο του επιπέδου ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, δείξετε ότι: $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}+\vec{M\Delta}=4\vec{MO}$

Λύση:

Επειδή το Ο είναι μέσο της διαγωνίου ΑΓ έχομε: $\vec{AO}=\vec{O\Gamma}$

ή $\vec{AM}+\vec{MO}=\vec{OM}+\vec{M\Gamma}$ ή $2\vec{MO}=\vec{MA}+\vec{M\Gamma}$ (1)

Ομοίως επειδή το Ο είναι μέσο της διαγωνίου ΒΔ θα έχομε:

$$2\vec{MO}=\vec{MB}+\vec{M\Delta} \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη θα πάρουμε:

$$4\vec{MO}=\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}+\vec{M\Delta}$$

42. Στις πλευρές $B\Gamma$, ΓA και AB τριγώνου $AB\Gamma$ δίνονται αντίστοιχα τα σημεία Γ_1 , B_1 , A_1 τέτοια ώστε: $\vec{A\Gamma_1} = k\vec{AB}$, $\vec{BA_1} = k\vec{B\Gamma}$, $\vec{\Gamma B_1} = k\vec{\Gamma A}$ Να υπολογίσετε το άθροισμα $\vec{AA_1}+\vec{BB_1}+\vec{\Gamma\Gamma_1}$

Λύση:

Έχουμε $\vec{AA_1} = \vec{AB}+\vec{BA_1} \Leftrightarrow \vec{AA_1} = \vec{AB} + k\vec{B\Gamma}$ (1)

ομοίως παίρνουμε: $\vec{BB_1} = \vec{B\Gamma} + k\vec{\Gamma A}$ (2)

$\vec{\Gamma\Gamma_1} = \vec{\Gamma A} + k\vec{AB}$ (3)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1), (2), (3) και έχουμε:

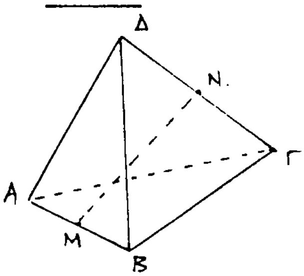
$$\vec{AA_1}+\vec{BB_1}+\vec{\Gamma\Gamma_1} = (1+k)(\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma A})$$

και επειδή $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma A} = 0$ η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\vec{AA_1}+\vec{BB_1}+\vec{\Gamma\Gamma_1} = 0$$

43. Έστω $AB\Gamma\Delta$ ένα τετράεδρο και M, N τα μέσα των ακμών του AB και $\Gamma\Delta$ αντιστοίχως. Να δείξετε ότι $\vec{MN} = \dfrac{\vec{A\Delta}+\vec{B\Gamma}}{2}$

Λύση:



Έστω O τυχόν σημείο στο χώρο. Επειδή τα M και N είναι μέσα των AB και ΓΔ από το παράδειγμα 5 θα έχουμε:

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA}+\vec{OB}}{2} , \vec{ON} = \frac{\vec{O\Gamma}+\vec{O\Delta}}{2}$$

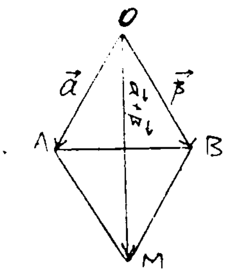
Άρα $\vec{ON}-\vec{OM} = \dfrac{\vec{O\Gamma}+\vec{O\Delta}}{2} - \dfrac{\vec{OA}+\vec{OB}}{2}$

$$\Leftrightarrow \vec{ON}+\vec{MO} = \frac{\vec{O\Gamma}-\vec{OA}+\vec{O\Delta}-\vec{OB}}{2} = \frac{(\vec{AO}+\vec{O\Delta})+(\vec{BO}+\vec{O\Gamma})}{2}$$

$$\Leftrightarrow \vec{MO}+\vec{ON} = \vec{MN} = \frac{\vec{A\Delta}+\vec{B\Gamma}}{2}$$

44. Να δείξετε ότι το άθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, έχει την διεύθυνση της διχοτόμου της γωνίας των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τότε και μόνο τότε όταν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$

Λύση:



1ο: Αν $|\vec{a}|=|\vec{\beta}|$ τότε το παραλληλόγραμμο OAMB είναι ρόμβος και η διαγώνιος OM είναι διχοτόμος της γωνίας O

2ο: Αν η διαγώνιος OM είναι διχοτόμος της γωνίας O, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, συνεπώς

$$|\vec{OA}|=|\vec{OB}| \quad \text{δηλαδή} \quad |\vec{a}|=|\vec{\beta}|$$

45. Εστω O τυχόν σημείο του επιπέδου και A, B, Γ τρία διακεκριμένα συνευθειακά σημεία. Να δείξετε ότι τότε υπάρχει κατάλληλος αριθμός k για τον οποίο να έχουμε $\vec{O\Gamma}=k\vec{OA}+(1-k)\vec{OB}$

Αντιστρόφως: Αν ισχύει η παραπάνω ισότητα για τρία διακεκριμένα σημεία A, B, Γ, τότε αυτά είναι συνευθειακά

Λύση:

Εστω οτι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά. Τότε τα διανύσματα $\vec{B\Gamma}$ και $\vec{BA}$ είναι συγγραμμικά δηλαδή

$$\vec{B\Gamma}=k\,\vec{BA} \qquad (1)$$

Αλλά $\vec{B\Gamma}=\vec{O\Gamma}-\vec{OB}$ και $\vec{BA}=\vec{OA}-\vec{OB}$ άρα η (1) γράφεται

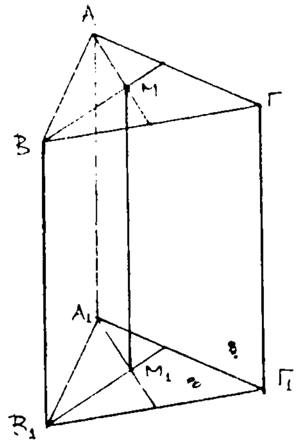
$$\vec{O\Gamma}-\vec{OB}=k\left(\vec{OA}-\vec{OB}\right)\Leftrightarrow \vec{O\Gamma}=k\vec{OA}+(1-k)\vec{OB}.$$

Αντιστρόφως: Εστω οτι ισχύει η $\vec{O\Gamma}=k\,\vec{OA}+(1-k)\,\vec{OB}\Leftrightarrow$

$$\vec{O\Gamma}-\vec{OB}=k\left(\vec{OA}-\vec{OB}\right)\Leftrightarrow \vec{B\Gamma}=k\,\vec{BA}$$ που σημαίνει ότι τα $\vec{B\Gamma}$ και $\vec{BA}$ είναι συγγραμμικά, άρα τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

46. Εστω ότι ένα τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ είναι παράλληλη προβολή στο επίπεδο ενός τριγώνου ΑΒΓ. Αν $|\vec{AA_1}|=\alpha$, $|\vec{BB_1}|=\beta$, $|\vec{\Gamma\Gamma_1}|=\gamma$, να βρεθεί η απόσταση των σημείων τομής των διαμέσων των τριγώνων αυτών

Λύση



Εστω Μ και M_1 τα σημεία τομης των διαμέσων των τριγώνων ΑΒΓ και $A_1B_1\Gamma_1$ και Ο ενα τυχον σημειο του χωρου.

Από το παράδειγμα 7 εχουμε

$$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{O\Gamma_1}\right) - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OB}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{O\Gamma_1}-\overrightarrow{O\Gamma}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\Gamma\Gamma_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{\Gamma\Gamma_1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{MM_1}\right| = \frac{1}{3}\left|\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{\Gamma\Gamma_1}\right|$$

Αν οι κορυφές του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ βρίσκονται προς το αυτο μέρος του επιπεδου προβολης τότε τα διανυσματα αυτα ειναι ομορροπα και $\left|\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{\Gamma\Gamma_1}\right| = \left|\overrightarrow{AA_1}\right|+\left|\overrightarrow{BB_1}\right|+\left|\overrightarrow{\Gamma\Gamma_1}\right| = \alpha+\beta+\gamma$ συνεπώς $\left|\overrightarrow{MM_1}\right| = \frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$.

Αν οι κορυφες Α και Β μαζί και η Γ χωριστα βρισκονται εκατέρωθεν του επιπεδου προβολής τότε το διανυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Gamma_1}$ εχει αντίθετη φορά από τα $\overrightarrow{AA_1}$ και $\overrightarrow{BB_1}$ Τότε $\left|\overrightarrow{MM_1}\right| = \frac{1}{3}\left|\alpha+\beta-\gamma\right|$

47. Εστω δυο μη μηδενικα διανυσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποια $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$. Να δειχθεί οτι τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ ειναι κάθετα μεταξύ τους.

Λύση:

Μεταφερουμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ετσι ωστε να εχουν κοινή αρχή. Τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ ειναι αντιστοίχως οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου με πλευρές $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Εξ υποθέσεως έχουμε $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$ συνεπως το παραλληλόγραμμο αυτο είναι ρόμβος, αρα οι διαγωνιοι του ειναι καθετες

Αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ειναι συγγραμμικα τοτε ένα απο τα διανυσματα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, το οποίο είναι κάθετο σ' οποιοδήποτε διάνυσμα.

48. Αν ΑΜ είναι η εσωτερική διχοτόμος ενός τριγώνου ΑΒΓ τότε: $\vec{AM}=\dfrac{\beta\vec{AB}+\gamma\vec{A\Gamma}}{\beta+\gamma}$ όπου $\beta=|\vec{A\Gamma}|$ και $\gamma=|\vec{AB}|$

Λύση:

Από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:
$$\frac{\vec{BM}}{\vec{M\Gamma}}=\frac{\gamma}{\beta} \iff$$

$$\frac{\vec{BA}+\vec{AM}}{\vec{MA}+\vec{A\Gamma}}=\frac{\gamma}{\beta} \iff \beta\vec{BA}+\beta\vec{AM}=\gamma\vec{MA}+\gamma\vec{A\Gamma}$$

$$\iff \beta\vec{AM}+\gamma\vec{AM}=\beta\vec{AB}+\gamma\vec{A\Gamma}$$

$$\iff \vec{AM}=\frac{\beta\vec{AB}+\gamma\vec{A\Gamma}}{\beta+\gamma}$$

49. Αν $\Gamma\Gamma_1$ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ τότε ισχύει $|\Gamma\Gamma_1|<\dfrac{|\vec{\Gamma A}|+|\vec{\Gamma B}|}{2}$

Λύση:

Έχουμε $\vec{\Gamma\Gamma_1}=\dfrac{\vec{\Gamma A}+\vec{\Gamma B}}{2} \Rightarrow |\vec{\Gamma\Gamma_1}|=\dfrac{|\vec{\Gamma A}+\vec{\Gamma B}|}{2}$

Επειδή τα $\vec{\Gamma A}$ και $\vec{\Gamma B}$ δεν είναι συγγραμμικά ισχύει η τριγωνική ανισότητα:
$$|\vec{\Gamma A}+\vec{\Gamma B}|<|\vec{\Gamma A}|+|\vec{\Gamma B}|$$

Άρα $|\vec{\Gamma\Gamma_1}|<\dfrac{|\vec{\Gamma A}|+|\vec{\Gamma B}|}{2}$

50. Αν Μ είναι το κέντρο βάρους ενός τριγώνου ΑΒΓ και Ο τυχόν σημείο του επιπέδου του τριγώνου να δείξετε ότι $|\vec{OM}|<\frac{1}{3}\left(|\vec{OA}|+|\vec{OB}|+|\vec{O\Gamma}|\right)$.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι (παραδ. 6): $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}=\vec{0}$ και ότι (παράδ. 7): $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}\right)$.

Επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$ δεν είναι συγγραμμικά

$$|\overrightarrow{OM}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}|<\frac{1}{3}\left(|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|+|\overrightarrow{O\Gamma}|\right)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

51. Τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{B\Delta}=\vec{\beta}$ είναι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta A}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

52. Τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{BE}$ και $\overrightarrow{\Gamma Z}$ όπου ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι διάμεσοι τριγώνου ΑΒΓ, να εκφρασθούν συναρτήσει των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

53. Εάν $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{BE}$ και $\overrightarrow{\Gamma Z}$ είναι οι διάμεσοι τριγώνου ΑΒΓ, να βρεθεί το άθροισμα $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{\Gamma Z}$

54. Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ στο οποίο $\overrightarrow{A\Delta}=\lambda\overrightarrow{B\Gamma}$, όπου $\lambda>0$. Να εκφρασθούν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{\Delta A}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Delta}=\vec{\beta}$ και του λ

55. Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τα σημεία Ε και Ζ είναι μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ. Να δειχθεί ότι $\overrightarrow{EZ}=\dfrac{\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{A\Delta}}{2}$ και βάσει αυτού να δειχθεί το θεώρημα για την διάμεσο του τραπεζίου.

3.5. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

3.5.1. Γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία διανυσμάτων

Προτάσσουμε τους παρακάτω ορισμούς που ισχύουν για ένα διανυσματικό χώρο V.

1. Ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του διανυσματικού χώρου V λέγεται <u>γραμμικός συνδυασμός</u> των διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_\nu$ του χώρου V όταν και μόνον όταν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\vec{\alpha} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_\nu \vec{\alpha}_\nu$$

2. Το σύνολο $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_\nu \,|\, \vec{a}_k \in V,\ k = 1,2,\ldots,\nu\}$ λέγεται <u>γραμμικά εξαρτημένο</u>, όταν και μόνο όταν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ από τους οποίους ένας τουλάχιστον είναι διάφορος του μηδενός τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_\nu \vec{a}_\nu = \vec{0}$$

3. Το σύνολο $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_\nu \,|\, \vec{a}_k \in V,\ k = 1,2,\ldots,\nu\}$ λέγεται γραμμικά ανεξάρτητο όταν και μόνον όταν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένο.

4. Το σύνολο $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_\nu \,|\, \vec{a}_k \in V,\ k = 1,2,\ldots,\nu\}$ λέγεται <u>γραμμικά ανεξάρτητο</u> όταν από κάθε ισότητα της μορφής $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda \vec{a}_2 + \cdots + \lambda \vec{a}_\nu = 0$ έπεται ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \ \ = \lambda = 0$

Αν το σύνολο $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_\nu \,|\, \vec{a}_k \in V,\ k = 1,2,\ldots,\nu\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο ή γραμμικά ανεξάρτητο τότε τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, a_\nu$ είναι γραμμικά εξαρτημένα ή γραμμικά ανεξάρτητα.

3.5.2. Συγγραμμικά διανύσματα

Τα διανύσματα που βρίσκονται σε παράλληλους φορείς ονομάζονται <u>συγγραμμικά</u>.

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τετοιος ώστε να ισχυει

$$\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}.$$

Ο λόγος δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ορίζεται τότε και μονο τότε όταν τα διανύσματα αυτα είναι συγγραμμικά και ένα τουλαχιστο απο αυτά είναι διάφορο του μηδενός. Τότε γράφουμε.

$$\lambda = \frac{\vec{\alpha}}{\vec{\beta}}, \quad \text{οπου } \lambda \in R.$$

Ο λόγος λ δύο συγγραμμικων διανυσματων είναι ίσος με $\pm \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$ οπου το + λαμβάνεται αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομορροπα και το − οταν αυτα είναι αντιρροπα. Αρα $\frac{\vec{\alpha}}{\vec{\beta}} = \pm \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$

3.5.3. Συνεπίπεδα διανύσματα

Τα διανύσματα που οι φορείς τους είναι παράλληλοι προς το ίδιο επίπεδο ονομάζονται <u>συνεπίπεδα</u>.

Προφανώς δύο διανύσματα είναι πάντοτε συνεπίπεδα.

Ισχύουν οι προτάσεις:

1. Τρία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα αν και μονο αν αυτά είναι γραμμικα εξαρτημενα. Δηλαδη αν υπαρχουν πραγματικοί αριθμοι k, λ, μ όχι όλοι ίσοι με μηδέν ετσι ώστε να ισχύει

$$k\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma} = \vec{0}$$

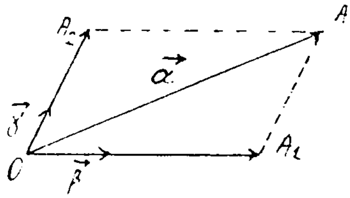
τα διανύσματα τοτε $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα

2. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα και τα $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ όχι συγγραμμικά τότε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ κατα μοναδικό τρόπο.

Υπάρχουν δηλαδη τότε πραγματικοί αριθμοί k, λ ώστε να ισχύει

$$\vec{\alpha} = k\vec{\beta} + \lambda\vec{\gamma}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε ανάλυση του διανύσματος $\vec{\alpha}$ ως προς τα $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, αυτά δέ δηλαδή τα $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ αποτελούν μια <u>βάση</u> στο επίπεδο.



3. Αν έχουμε τέσσερα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ από τα οποία τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ δεν είναι συνεπίπεδα τότε το διάνυσμα $\vec{\delta}$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή:

$$\vec{\delta} = k\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma}$$

Τότε λέμε ότι το διάνυσμα $\vec{\delta}$ αναλύθηκε κατά τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τα οποία αποτελούν μία βάση του χώρου.

3.54. Συντεταγμένες διανύσματος

Αν στο επίπεδο (αντίστοιχα στο χώρο) επιλεχτηκε μία **βαση** τότε σε κάθε διάνυσμα αντιστοιχεί μοναδικό ζευγάρι (αντίστοιχα τριάδα) πραγματικών αριθμών και αντίστροφα (αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση).

Έστω ότι $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ είναι μία βάση και $\vec{\alpha} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$ τότε οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ονομάζονται <u>συντεταγμένες</u> του διανύσματος $\vec{\alpha}$ ως προς τη δεδομένη βάση. Συμβολίζουμε τις συντεταγμένες με $\vec{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ή $\vec{\alpha}(x, y, z)$. Στο επίπεδο γράφουμε $\vec{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2)$ ή $\vec{\alpha}(x, y)$

Αν $\vec{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{\beta}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ τότε:

α) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\vec{e}_3$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)$

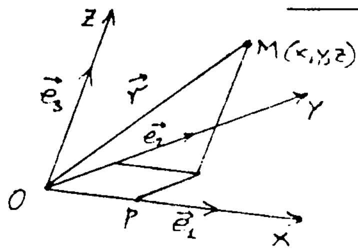
β) $\lambda\vec{\alpha} = (\lambda\alpha_1)\vec{e}_1 + (\lambda\alpha_2)\vec{e}_2 + (\lambda\alpha_3)\vec{e}_3$ και $\lambda\vec{\alpha} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3)$

γ) $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \alpha_1 = \beta_1, \ \alpha_2 = \beta_2, \ \alpha_3 = \beta_3$

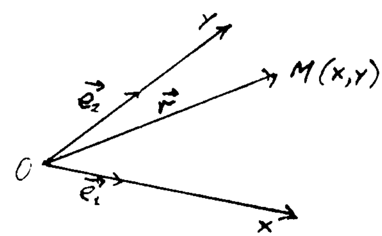
3.5.5. Συστήματα συντεταγμένων

Ονομάζεται __καρτεσιανό__ (πλαγιογώνιο) σύστημα συντεταγμένων στο χώρο το σύστημα ενός σημείου και μιας βάσης.

Το σημείο αυτό ονομάζεται αρχή των συντεταγμένων και οι ευθείες οι διερχόμενες από την αρχή των συντεταγμένων και που έχουν την διεύθυνση των διανυσμάτων της βάσης ονομάζονται __άξονες συντεταγμένων__



σχ. α



σχ. β'

Ο ένας άξονας ονομάζεται άξονας των __τετμημένων__. ο άλλος άξονας των __τεταγμένων__ και ο τρίτος άξονας των __κατηγμένων__

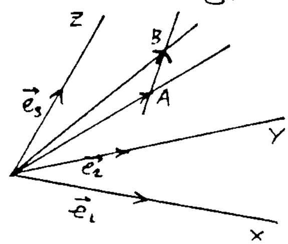
Τα επίπεδα που ορίζουν ανά δύο οι άξονες των συντεταγμένων ονομάζονται __συντεταγμένα επίπεδα__

Αν M είναι ένα σημείο στο χώρο τότε το διάνυσμα $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ έχει συντεταγμένες $M(x,y,z)$ που είναι και συντεταγμένες του σημείου M ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων (σχ. α). Ομοίως ορίζεται και το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Στο επίπεδο το σημείο έχει δύο συντεταγμένες (σχ. β)

Σε δεδομένο σύστημα συντεταγμένων οι συντεταγμένες ενός σημείου ορίζονται μονοσήμαντα

3.5.6. Συντεταγμένες διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ στο χώρο

Εστω το διανυσμα $\vec{AB}$, οπου $A(x_1, y_1, z_1)$ και $B(x_2, y_2, z_2)$ είναι οι συντεταγμένες των A και B ως προς το καρτεσιανο σύστημα συντεταγμένων. Ισχύει $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ Αλλα



σχ. γ.

$\vec{OA} = (x_1, y_1, z_1)$ και $\vec{OB} = (x_2, y_2, z_2)$

άρα

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1 \ , y_2 - y_1 \ , z_2 - z_1)$$

Επομενως για να βρουμε τις συντεταγμένες του διανυσματος πρέπει απο τις συντεταγμένες του τέλους του να αφαιρέσουμε τις συντεταγμενες της αρχης του (σχ. γ).

3.5.7. Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμενων

Τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $(|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1)$ θα λέμε οτι αποτελούν ορθοκανονικη βάση στον τρισδιάστατο κώρο αν και μόνο αν .

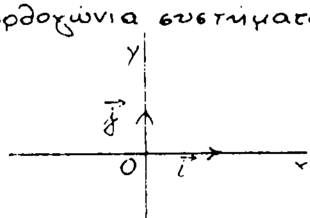
1. Τα $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ αποτελούν μια βαση
2. Τα $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ειναι ανα δυο κάθετα

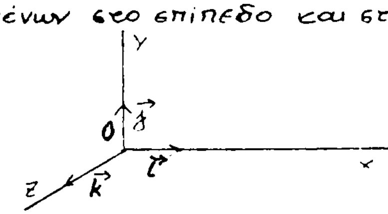
Η ορθοκανονική βάση συμβολίζεται με $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ Ετσι καθε διανυσμα $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ ως προς την ορθοκανονικη βαση $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ γραφεται:

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

Στον δισδιάστατο χωρο (επιπεδο) ισχυουν ανάλογα

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμενων με ορθοκανονικη βάση ονομάζεται ορθογώνιο συστημα συντεταγμενων. Στα παρακατω σχήματα παριστάνονται τα δεξιόστροφα ορθογώνια συστήματα συντεγμένων στο επίπεδο και στο χωρο.





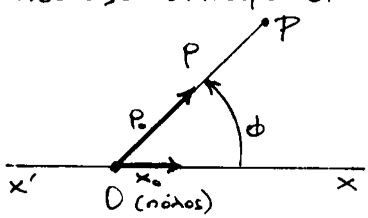
3.5.8. Πολικές συντεταγμένες.

Κατά την μελέτη διαφόρων προβλημάτων (π.χ. νόμοι του Κέπλερ στην Αστρονομία) είναι πολλές φορές χρήσιμο να χρησιμοποιούμε αντί των Καρτεσιανών, τις πολικές συντεταγμένες.

Οι πολικές συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο, ορίζονται ως εξής:

Ορίζουμε έναν άξονα xx' επί του επιπέδου, που τον ονομάζουμε <u>πολικό άξονα</u>. Πάνω στον άξονα αυτόν ορίζουμε ένα σημείο O που το ονομάζουμε <u>πόλο.</u>

Το μοναδιαίο διάνυσμα x_0 του πολικού άξονα, μαζί με το σημείο O, ονομάζεται Πολικό Σύστημα Αναφοράς. Εαν δοθεί τώρα ένα σημείο P του επιπέδου, το διάνυσμα OP λέγεται διανυσματική ακτίνα του σημείου P.



Εάν επί της OP ορίσουμε το μοναδιαίο διάνυσμα ρ_0, τότε η αλγεβρική τιμή της γωνίας $(\vec{x}_0, \vec{\rho}_0) = \phi$ λέγεται <u>πολική γωνία</u> του σημείου P.

Η συντεταγμένη του σημείου P δηλαδή του διανύσματος $\vec{OP}$,

$$(\vec{OP}) = \pm \frac{|\vec{OP}|}{|\rho_0|} = \pm \rho$$

λέγεται <u>πολική ακτίνα</u> αυτού.

Τα στοιχεία του διατεταγμένου ζεύγους (ϕ, ρ) λέγονται <u>πολικές συντεταγμένες</u> του σημείου P.

Αν δίδεται ένα ζεύγος (ϕ, ρ), αντιστοιχεί σ' αυτό ένα σημείο P του επιπέδου. Αντίστροφα όμως, αν δίδεται ένα σημείο P στο επίπεδο, δεν αντιστοιχεί σ' αυτό ένα μόνο ζεύγος (ϕ, ρ) πολικών συντεταγμένων (διότι στη γωνία ϕ αντιστοιχούν και όλες οι γωνίες $2k\pi + \phi$). Επομένως οι πολικές συντεταγμένες των σημείων του επιπέδου δηλαδή τα ζεύγη (ϕ, ρ) δεν απεικονίζονται αμφιμονοσήμαντα στα σημεία του επιπέδου, γι' αυτό η χρήση τους, ιδιαίτερα στην Ναυτιλία και την Αστρονομία, απαιτεί μεγαλύτερη προσοχή απ' ότι η χρήση των Καρτεσιανών Συντεταγμένων.

3.5.9. Μέτρο διανύσματος

Το μέτρο $|\vec{\alpha}|$ του διανύσματος $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ως προς την ορθοκανονική βάση $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ υπολογίζεται απο τον τυπο·

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$$

Στο επιπεδο αν $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ τοτε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$

Η <u>αποστασn</u> μεταξύ δύο σημειων $A_1(x_1, y_1, z_1)$ και $A_2(x_2, y_2, z_2)$ υπολογιζεται απο τον τύπο:

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Το <u>μοναδιαιο</u> διάνυσμα $\vec{\alpha}^o$ δίνεται απο τον τυπο $\vec{\alpha}^o = \dfrac{\vec{\alpha}}{\vec{\alpha}}$ ή με την χρηση συντεταγμενων

$$\vec{\alpha}^o = \frac{\alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k}}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}$$

<u>Παραδείγματα.</u>

5ο Να δειχθει ότι τα διανυσματα $\vec{\alpha} = (1, -2, 3)$ και $\vec{\beta} = (-2, 4, -6)$ είναι συγγραμμικά

<u>Λύση:</u>

Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τετοιος ώστε

$$\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$$

Η σχεση αυτη ισοδυναμεί με την $(1, -2, 3) = \lambda(-2, 4, -6)$

$$\Leftrightarrow \quad (1, -2, 3) = (-2\lambda, 4\lambda, 6\lambda) \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} -2\lambda = 1 \\ 4\lambda = -2 \\ -6\lambda = 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

άρα υπάρχει $\lambda \in R$ ετσι ώστε $\vec{\alpha} = -\frac{1}{2}\vec{\beta}$ συνεπώς τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

6ο. Δίδονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 3, 2)$, $\vec{\beta} = (-1, 2, 5)$ και $\vec{\gamma} = (k, \lambda, \mu)$. Να υπολογισθούν τα k, λ, μ ώστε να ισχύει $-2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - 5\vec{\gamma} = \vec{0}$.

Λύση.

$$\text{Εκ της } -2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}-5\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2(1,3,2)+3(-1,2,5)-5(k,\lambda,\mu)=(0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow (-2,-6,-4)+(-3,6,15)+(-5k-5\lambda-5\mu)=(0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow (-5-5k,-5\lambda,11-5\mu)=(0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5-5k=0 \\ -5\lambda=0 \\ 11-5\mu=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-1 \\ \lambda=0 \\ \mu=\frac{11}{5} \end{cases}$$

58. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,\mu,\lambda+2)$ και $\vec{\beta}=(6,5\lambda+\mu-1,6+3\lambda)$. Να προσδιορισθούν τα λ,μ έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να είναι παράλληλα.

Λύση:

Για να είναι τα δεδομένα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ παράλληλα πρέπει ως γνωστόν να υπάρχει $k\in R$ τέτοιο ώστε $\vec{\alpha}=k\vec{\beta}$. Άρα:

$$\vec{\alpha}=k\cdot\vec{\beta} \Leftrightarrow (2,\mu,\lambda+2)=k(6,5\lambda+\mu-1,6+3\lambda)\Leftrightarrow$$

$$(2,\mu,\lambda+2)=(6k,k(5\lambda+\mu-1),k(6+3\lambda))\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 6k=2 \\ k(5\lambda+\mu-1)=\mu \\ k(6+3\lambda)=\lambda+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{1}{3} \\ 5\lambda-2\mu=1 \\ \lambda+2=\lambda+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{1}{3} \\ 5\lambda-2\mu=1 \end{cases}$$

Η εξίσωση $5\lambda-2\mu=1$ έχει άπειρες λύσεις. Για $\mu=\rho$ έχουμε $\lambda=\dfrac{2\rho+1}{5}$

Άρα τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(2,\rho,\frac{2\rho+11}{5}\right)$ και $\vec{\beta}=\left(6,3\rho,\frac{6\rho+33}{5}\right)$ είναι παράλληλα για κάθε $\rho\in R$

59. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος που είναι μοναδιαίο και συγγραμμικό με το $\vec{\alpha}=(6,-8)$.

Λύση:

Έστω $\vec{\beta}$ το ζητούμενο διάνυσμα που είναι μοναδιαίο και συγγραμμικό του $\vec{\alpha}$.

Πρέπει τότε να ισχύει

$$\begin{cases} \vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha} & \lambda\in R \\ |\vec{\beta}| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\beta} = \lambda(6,-8), & \lambda\in R \\ |\vec{\beta}| = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\beta} = (6\lambda, -8\lambda) & \lambda\in R \\ |\vec{\beta}| = 1 \end{cases}$$

Από την δευτερη απ' αυτές λόγω της πρώτης παιρνουμε:

$36\lambda^2 + 64\lambda^2 = 1 \Rightarrow 10|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{10}$ οποτε η πρώτη δινει δύο μοναδιαία, τα

$\vec{\beta} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$, ομόρροπο τού $\vec{\alpha}$ διότι $\lambda = \frac{1}{10} > 0$

και $\vec{\beta} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, αντίρροπο τού $\vec{\alpha}$ διότι $\lambda = -\frac{1}{10} < 0$

60. Στον άξονα Oy να βρεθει το σημείο που ισαπέχει απο δύο σημεία $A(3,1,0)$ και $B(-2,4,1)$

Λύση:

Τό ζητουμενο πάνω στον άξονα Oy σημειο θά ειναι το $M(0,y,0)$ με αγνωστο βεβαια το y

Θα πρέπει $|\vec{MA}| = |\vec{MB}|$ και επειδη

$\vec{MA} = (3-0, 1-y, 0)$ και $\vec{MB} = (-2-0, 4-y, 1-0)$ θά εχουμε

$$\sqrt{3^2 + (1-y)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (4-y)^2 + 1^2} \Leftrightarrow$$

$$9 + 1 - 2y + y^2 = 4 + 16 - 8y + y^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$6y = 11 \Leftrightarrow y = \frac{11}{6}$$

Αρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M\left(0, \frac{11}{6}, 0\right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

61. Δίδονται τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha} = (1,2,3)$, $\vec{OB} = \vec{\beta} = (2,-2,1)$, $\vec{O\Gamma} = \vec{\gamma} = (4,0,3)$ και $\vec{O\Delta} = \vec{\delta} = (16,10,18)$. Απο το Δ φέρουμε παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{O\Gamma} = \vec{\gamma}$ που τέμνει

το επίπεδο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ στο Ε. Να βρεθεί το διάνυσμα $\overrightarrow{OE}$.

62. Στο συντεταγμένο επίπεδο που ορίζεται από τους άξονες Oy και Oz να βρεθεί το σημείο του ισαπέχει από τα τρία σημεία $A(3,1,2)$, $B(4,-2,-2)$ και $\Gamma(0,5,1)$

63. Δίδονται οι κορυφές $A(2,-3)$, $B(1,3)$ και $\Gamma(-6,-4)$ τριγώνου ΑΒΓ. Να βρεθεί το συμμετρικό σημείο Μ της κορυφής Α ως προς την πλευρά ΒΓ.

64. Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου του διερχομένου εκ του σημείου $A(2,-1)$ και ο οποίος εφάπτεται στους δύο άξονες των συντεταγμένων.

65. Δίδεται διάνυσμα $\vec{\alpha}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$. Να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{\beta}$ αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$, η τετμημένη του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι ίση με την τεταγμένη του διανύσματος $\vec{\alpha}$ και η τεταγμένη του διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι ίση με το μηδέν.

66. Να εξετασθεί αν είναι παραλληλόγραμμο το τετράπλευρο που οι κορυφές του είναι $A(-3,1)$, $B(3,6)$, $\Gamma(2,2)$ και $\Delta(-4,-3)$.

67. Δίδονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-3,0,4)$ και $\vec{\beta}(5,-2,-14)$. Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα που έχει την διεύθυνση της διχοτόμου της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

68. Να ερευνηθεί αν οι παρακάτω τριάδες διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι γραμμικά εξαρτημένες και αν ναι να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

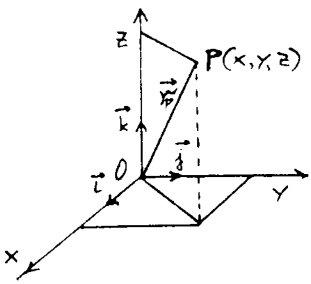
i) $\vec{\alpha}=(5,4)$, $\vec{\beta}=(-3,0)$, $\vec{\gamma}=(19,8)$.

ii) $\vec{\alpha}=(-6,2)$, $\vec{\beta}=(4,7)$, $\vec{\gamma}=(9,-3)$.

69. Δίδονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,1,0)$, $\vec{\beta}=(1,-1,2)$, $\vec{\gamma}=(2,2,-1)$ και $\vec{\delta}=(3,7,-7)$. Να βρείτε το καθένα από αυτά συναρτήσει των τριών άλλων.

3.6. Μερικά βασικά στοιχεία.

α΄. Διανυσματική ακτίνα: Αν P είναι ένα σημείο του



χώρου και Oxyz το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{OP}=\vec{r_p}$ ονομάζεται <u>διανυσματική ακτίνα</u> του σημείου P. Αν το P έχει συντεταγμένες (x,y,z) τότε η διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OP}=\vec{r_p}$ γράφεται: $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ δηλαδή το $\overrightarrow{OP}$ έχει τις ίδιες συντεταγμένες με το P. Το P πολλές φορές γράφεται και $P(\vec{r_p})$.

Αν $A(\vec{r_A})$, $B(\vec{r_B})$ είναι δυο σημεία με διανυσματικές ακτίνες $\vec{r_A}$ και $\vec{r_B}$ τότε έχουμε:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{r_B}-\vec{r_A} \qquad (1)$$

β΄. Απόσταση δύο σημείων: Αν $P_1(x_1,y_1,z_1)$ και $P_2(x_2,y_2,z_2)$ είναι δύο σημεία του χώρου τότε η <u>απόσταση</u> τους $d(P_1,P_2)$ είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Η απόσταση $d(P_1,P_2)$ των σημείων $P_1(x_1,y_1,z_1)$ και $P_2(x_2,y_2,z_2)$ στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων δίδεται από τον τύπο:

$$d(P_1P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (2)$$

γ΄. Συντεταγμένες σημείου P οριζόμενου εκ του απλού λόγου $(P_1P_2P)=\lambda$: Έστω δύο σημεία του χώρου $P_1(x_1,y_1,z_1)$ και $P_2(x_2,y_2,z_2)$ και ένα άλλο $P(x,y,z)$ για το οποίο έχουμε $(P_1P_2P)=\lambda$ όπου $\lambda\in R$, $\lambda\neq-1$. Οι συντεταγμένες τότε x,y,z του P θα δίδονται από τους τύπους:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\ ,\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (3)$$

Αν το $P(x,y,z)$ είναι μέσο του P_1P_2 τότε $\lambda=1$ οπότε

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad z=\frac{z_1+z_2}{2} \qquad (3a)$$

δ'. Γωνία δύο διανυσμάτων: Γωνία δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ που έχουν κοινή αρχή (αν δεν έχουν κοινή αρχή, με παράλληλη μεταφορά τα κάνουμε να έχουν) κατά την τάξη με την οποία έχουν γραφεί, ορίζεται η γωνία που διαγράφει το διάνυσμα $\vec{OA}=\vec{a}$ όταν στρέφεται επί του επιπέδου των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ περί το O, κατά φορά αντίθετη των δεικτών του ωρολογίου, μέχρι που να συμπέσει με το άλλο διάνυσμα $\vec{OB}=\vec{\beta}$. Η γωνία αυτή παριστάνεται με $(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}})$ και μεταβάλλεται στο διάστημα $[0,2\pi]$.

Αν $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ και $\vec{\beta}(x_2,y_2,z_2)$, τότε

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}})=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \qquad (4)$$

αν $\vec{a}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow xx+yy+zz=0$ (βλ. παρακάτω εσωτ. γινόμενο)

ε'. Κατευθύνοντα συνημίτονα: Αν δίδεται το διάνυσμα $\vec{a}=(x,y,z)$, τότε οι γωνίες φ,τ,ω που σχηματίζουν τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ με το $\vec{a}$ αντίστοιχα, δίδονται από τους τύπους:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \sigma\upsilon\nu\tau=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (5)$$

Τα συνφ, συντ, συνω ονομάζονται <u>κατευθύνοντα συνημίτονα</u> του διανύσματος $\vec{a}$

<u>Παραδείγματα</u>:

7α Δίνονται τα σημεία $A(1,4)$ και $B(-2,0)$. Να βρετε ένα σημείο Γ πάνω στον άξονα των τεταγμένων έτσι ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές.

Λύση

Για το σημείο Γ θα έχουμε $\Gamma(x,0)$. Έτσι

$\vec{AB}=(-3,-4)$, $\vec{B\Gamma}=(x+2,0)$, $\vec{\Gamma A}=(1-x,4)$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

α΄. Το ισοσκελές έχει κορυφή το Α. Τότε

$|\vec{AB}|=|\vec{A\Gamma}| \Rightarrow 5=\sqrt{(1-x)^2+16} \Rightarrow (1-x)^2=9$

$\Rightarrow 1-x=\pm 3 \Rightarrow x=-2$ ή $x=4$ και έχουμε δυο λύσεις $\Gamma_1(-2,0)$ και $\Gamma_2(4,0)$.

β΄. Το ισοσκελές έχει κορυφή το Β. Τότε

$|\vec{BA}|=|\vec{B\Gamma}| \Rightarrow 5=\sqrt{(x+2)^2+0} \Rightarrow (x+2)^2=5$

$\Rightarrow x+2=\pm 5 \Rightarrow x=3$ ή $x=-7$ και έχουμε δυο λύσεις $\Gamma_3(3,0)$ και $\Gamma_4(-7,0)$

γ΄. Το ισοσκελές έχει κορυφή το Γ. Τότε

$|\vec{\Gamma A}|=|\vec{\Gamma B}| \Rightarrow \sqrt{(1-x)^2+16}=\sqrt{(x+2)^2} \Rightarrow$

$(1-x)^2+16=(x+2)^2 \Rightarrow x=\frac{13}{6}$ και έχουμε μια λύση $\Gamma_5(\frac{13}{6},0)$

71. Να βρεθεί η τεταγμένη του σημείου P αν η τετμημένη του είναι 7 και η απόσταση του από το σημείο $A(-1,5)$ είναι 10.

Λύση:

Αν η τεταγμένη του P είναι y, τότε $P(7,y)$

Εξ υποθέσεως όμως $d(P,A)=10 \Rightarrow$

$$\sqrt{(-1-7)^2+(5-y)^2}=10$$

$\Rightarrow (5-y)^2=36 \Rightarrow 5-y=\pm 6 \Rightarrow y=-1$ ή $y=11$

Άρα $P(7,-1)$ ή $P(7,11)$

72. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των μέσων των πλευρών ενός τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία $A(3,-7)$, $B(5,2)$ και $\Gamma(-1,0)$.

Λυση:

Αν $M(x,y)$ είναι το μέσο της ΒΓ τότε για τα x και y θα έχουμε.

$$x=\frac{5+(-1)}{2} \quad \text{και} \quad y=\frac{2+0}{2}$$

δηλαδή $x=2$, $y=1$ άρα $M(2,1)$.

Ομοίως βρίσκουμε ότι το μέσο της ΑΒ έχει συντεταγμένες $\left(4,-\frac{5}{2}\right)$ και το μέσο της ΑΓ $\left(1,-\frac{7}{2}\right)$.

73. Ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με άκρα τα $A(3,2)$ και $B(15,6)$ διαιρείται σε 5 ίσα μέρη. Ζητούνται οι συντεταγμένες των σημείων διαιρέσεως.

Λύση:

Έστω Κ, Λ, Μ, Ν τα σημεία στα οποία διαιρείται το ΑΒ σε 5 ίσα μέρη. Βρίσκουμε το λόγο (ΑΒΚ) και κατόπιν τις συντεταγμένες του Κ

A —— K —— Λ —— M —— N —— B

$$(ABK)=\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KB}}=\frac{\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}}{\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}}=\frac{1}{4}$$

Αφού $A(3,2)$ και $B(15,6)$ θα έχουμε·

$$x_K=\frac{3+\frac{1}{4}\cdot 15}{1+\frac{1}{4}}=\frac{27}{5} \quad \text{και} \quad y_K=\frac{2+\frac{1}{4}\cdot 6}{1+\frac{1}{4}}=\frac{14}{5}.$$

Άρα $K\left(\frac{27}{5},\frac{14}{5}\right)$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε: $\Lambda\left(\frac{39}{5},\frac{18}{5}\right)$, $M\left(\frac{51}{5},\frac{22}{5}\right)$ και $N\left(\frac{63}{5},\frac{26}{5}\right)$.

74. Να υπολογισθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(4,3)$ και $\vec{\beta}=(1,7)$. Κατόπιν των $\vec{\gamma}=(2,5,4)$ και $\vec{\delta}=(6,0,-3)$

Λύση:

$$\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}=\frac{4\cdot 1+3\cdot 7}{\sqrt{4^2+3^2}\sqrt{1^2+7^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=45^\circ$$

$$\text{συν}(\vec{\gamma},\vec{\delta})\ \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}=\frac{2\cdot 6+5\cdot 0+4(-3)}{\sqrt{2^2+5^2+4^2}\cdot\sqrt{6^2+0^2+(-3)^2}}=\frac{0}{45}=0 \Rightarrow (\widehat{\vec{\gamma},\vec{\delta}})=90^\circ$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

75. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(0,0)$, $B(3,1)$ και $\Gamma(1,7)$ είναι ορθογώνιο.

76. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(3,2)$, $B(-1,1)$, $\Gamma(11,-6)$

77. Στον άξονα Oy να ευρεθεί σημείο που να απέχει από το $A(4,-6)$ απόσταση 5

78. Αν είναι γνωστές οι διανυσματικές ακτίνες τριών διαδοχικών κορυφών ενός παραλληλογράμμου να βρείτε συναρτήσει αυτών την διανυσματική ακτίνα του σημείου τομής των διαγωνίων του.

79 Να βρεθεί το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ με κορυφές τα σημεία $A(3,-2)$, $B(3,5)$ $\Gamma(0,4)$ και $\Delta(-1,1)$.

80. Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(1,-1,1)$ και $\vec{\beta}=(1,1,2)$

3.7. Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Εσωτερικό η αριθμητικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καλείται το γινόμενο των μέτρων τους επί το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν. Συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$. Επομένως είναι:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot \text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}).$$

Εκ του ορισμού προκύπτει ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι πραγματικός αριθμός και όχι διάνυσμα. Είναι δε θετικός αν η γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ είναι οξεία και αρνητικός αν η γωνία είναι αμβλεία.

Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου:

1. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}|^2$
2. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$
3. $\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) = (\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})$. $\quad \lambda\in R$
4. $\vec{0}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\cdot\vec{0} = 0$

   Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{0}$ η $\vec{\beta} = \vec{0}$ η τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα και αντίστροφα
5. $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$
6. $(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\ldots+\vec{\alpha}_\nu)\cdot(\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2+\ldots+\vec{\beta}_\kappa) = \sum\limits_{i=1}^{\nu}\sum\limits_{j=1}^{\kappa}\vec{\alpha}_i\cdot\vec{\beta}_j$
7. $\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$ $\quad ;\ \vec{\alpha},\vec{\beta} \neq \vec{0}$

Το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων συναρτήσει των συντεταγμένων τους:

Ισχύει:

$\vec{i}^2 = 1$, $\vec{j}^2 = 1$, $\vec{k}^2 = 1$ και $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{i} = \vec{i}\cdot\vec{k}$ όπου $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ και $\vec{k} = (0,0,1)$ οι διανυσματικές μονάδες των αξόνων

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2, z_2)$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ και

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Παραδείγματα:

81. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ σχηματίζουν γωνία $\vartheta = \frac{2\pi}{3}$. Αν $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$, να υπολογισθούν τα γινόμενα: $\vec{\alpha}\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}^2$, $\vec{\beta}^2$, $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2$.

Λύση:

Έχουμε:

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta = 3\cdot 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -6$

$\vec{\alpha}^2 = \vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\alpha}|\,\sigma\upsilon\nu 0 = 9$

$\vec{\beta}^2 = \vec{\beta}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\beta}|\,|\vec{\beta}|\,\sigma\upsilon\nu 0 = 16$

$$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2 = (\vec{\alpha}+\vec{\beta})(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) =$$
$$= \vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha} + \alpha\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha} + \vec{\beta}\cdot\vec{\beta} =$$
$$= \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 9 - 12 + 16 = 13$$

82. Να υπολογισθεί το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων i) $\vec{\alpha} = (3,5,7)$, $\vec{\beta} = (-2,6,1)$. ii) $\vec{\alpha} = (2,5,1)$, $\vec{\beta} = (3,-2,4)$

Λύση:

i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 3\cdot(-2) + 5\cdot 6 + 7\cdot 1 = 31$

ii) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 2\cdot 3 + 5(-2) + 1\cdot 4 = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

83. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3,-2,4)$, $\vec{\beta} = (5,1,6)$ και $\vec{\gamma} = (-3,0,2)$. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{x}$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις:

$\vec{\alpha}\cdot\vec{x} = 4$, $\vec{\beta}\cdot\vec{x} = 35$, $\vec{\gamma}\cdot\vec{x} = 0$.

84. Αν $\vec{\alpha} = (1,-1,2)$, $\vec{\beta} = (2\lambda, \nu, 1)$ και $\vec{\gamma} = (1, \lambda, -3\nu)$ είναι τρία διανύσματα, τότε να προσδιορισθούν οι παράμετροι λ και ν, έτσι ώστε το $\vec{\alpha}$ να είναι κάθετο στα $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

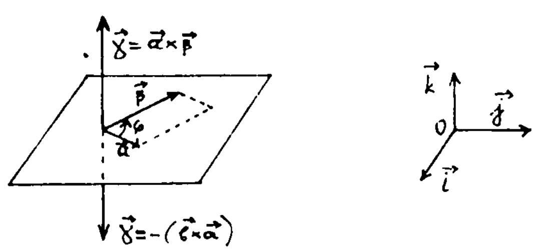
3.8. Εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων

<u>Εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο</u> των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ λέγεται το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες·

1. Το μήκος (μέτρο) του διανύσματος $\vec{\gamma}$ ισούται με: $|\vec{\gamma}| = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\,\eta\mu\phi$, οπου ϕ είναι η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

2. Το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ είναι κάθετο στα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$: $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma} \perp \vec{\beta}$

3. Σαν διατεταγμένη τριάδα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ σχηματίζουν τριάδα όμοια με αυτή των μοναδιαίων βασικών διανυσμάτων $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (σχ. α). Συμβολισμός: $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} \times \vec{\beta}$



Σχ. α.

Από τον ορισμό προκύπτει ότι αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά διανύσματα, τότε $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = 0$.

Ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου:

i) $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = -(\vec{\beta} \times \vec{\alpha})$

ii) $\lambda(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) = (\lambda\vec{\alpha} \times \vec{\beta})$, $\lambda \in R$

iii) $\vec{\gamma} \times (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \vec{\gamma} \times \vec{\alpha} + \vec{\gamma} \times \vec{\beta}$

iv) $\vec{\alpha} \times \vec{\alpha} = 0$

Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ορίζονται από τις συντεταγμένες τους: $\vec{\alpha} = (x, y, z)$ και $\vec{\beta} = (x', y', z')$, τότε το εξωτερικό γινόμενο εκφράζεται από τον τύπο:

$$\vec{\alpha}\times\vec{\beta} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\vec{k} \; : \Leftrightarrow$$

$$\vec{\alpha}\times\vec{\beta} = (yz'-y'z)\vec{i} + (zx'-z'x)\vec{j} + (xy'-yx')\vec{k}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Απο τον ορισμό προκύπτει ότι το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου πού έχει διαδοχικές πλευρες τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

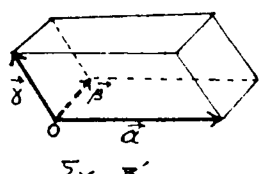
Το εξωτερικό γινόμενο υπολογίζεται και από τον τυπο·

$$\vec{\alpha}\times\vec{\beta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

3.9. Μικτό γινόμενο

<u>Μικτό γινόμενο</u> τριών διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ (λαμβανομενα κατά τη σειρά $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$) καλείται το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\vec{\alpha}$ επί τό εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ δηλαδή $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})$ Συμβολισμός: $(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})$.

Το μικτό γινόμενο $(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})$ είναι ίσο με τόν όγκο του παραλληλεπιπέδου με πλευρές τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ πού έχουν κοινή αρχή(σχ. β) Ο αριθμος αυτός είναι θετικός αν η διατεταγμένη τριάδα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι όπως η τριάδα $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ και αρνητικός στην αντίθετη περίπτωση.



Σχ. β'.

Ιδιότητες μικτού γινομένου

i) $(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$

ii) $(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}) = (\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\alpha}) = (\vec{\gamma},\vec{\alpha},\vec{\beta}) = -(\vec{\beta},\vec{\alpha},\vec{\gamma}) = -(\vec{\gamma},\vec{\beta},\vec{\alpha}) = -(\vec{\alpha},\vec{\gamma},\vec{\beta})$.

iii) $(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\times\vec{\beta}=0 \Leftrightarrow$ τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα

iv) Αν $\vec{\alpha}=(x,y,z)$, $\vec{\beta}=(x',y',z')$, $\vec{\gamma}=(x'',y'',z'')$ τότε

$$(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

Παραδείγματα:

Ε.5. Να βρεθεί το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(2,3,1)$, $\vec{\beta}=(5,6,4)$

Λύση:

Σύμφωνα με τον τύπο έχουμε:

$$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}\vec{k} \Leftrightarrow$$

$$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=6\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}$$

Ε.6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,1,2)$, $\vec{\beta}=(2,7,4)$, $\vec{\gamma}=(1,2,1)$ Να βρεθεί το μικτό γινόμενο $(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})$

Λύση:

Έχουμε $(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=$

$$=3\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot(7-8)-1(2-8)+2(4-7)=$$

$$=-3+6-6=-3$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

67. Να βρείτε το εξωτερικό γινόμενο αν

i) $\vec{\alpha}=(5,-2,1)$, $\vec{\beta}=(4,0,6)$

ii) $\vec{\alpha}=(-2,6,-4)$, $\vec{\beta}=(3,-9,6)$

82. Να βρεθεί το εμβαδό παραλληλογράμμου που έχει πλευρές τα διανύσματα·

$$\vec{\alpha}=(8,4,1) \;,\; \vec{\beta}=(2,-2,1) \qquad (\text{Απ. } 18\sqrt{2})$$

83. Να υπολογισθεί ο όγκος παραλληλεπιπέδου που έχει πλευρές τα διανύσματα:

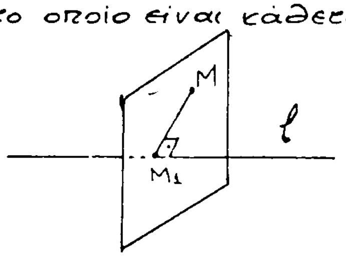
$$\vec{P}=(3,1,-2) \;,\; \vec{Q}=(1,5,-1) \;,\; \vec{R}=(1,5,1)$$

(Απ. $V=6$).

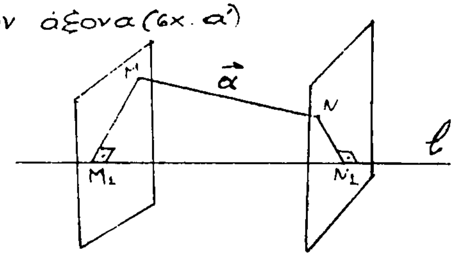
3.10. Προβολή διανύσματος σε άξονα.

<u>Προβολή σημείου</u> M σε άξονα ℓ καλείται το ίχνος M_1 της καθέτου που άγεται από το M στον άξονα ℓ.

Η προβολή αυτή μπορεί επίσης να ορισθεί ως το σημείο τομής του άξονα ℓ με το επίπεδο το διερχόμενο από το M και το οποίο είναι κάθετο πρός τον άξονα (σχ. α')



Σχ. α'



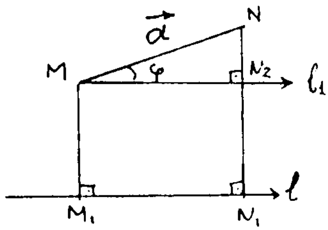
Σχ. β'

Έστω τώρα ότι $\vec{\alpha}=\overrightarrow{MN}$ είναι ένα τυχόν διάνυσμα, με M_1 και N_1 τις προβολές των σημείων M και N στον άξονα ℓ (σχ. β')

<u>Προβολή διανύσματος</u> ή <u>διανυσματική προβολή</u> του διανύσματος MN στον άξονα ℓ ονομάζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{M_1N_1}$ και το συμβολίζουμε με $\Pi\rho_{\ell}\,\overrightarrow{MN}$ δηλαδή $\overrightarrow{M_1N_1}=\Pi\rho_{\ell}\,\overrightarrow{MN}$

Αν η ευθεία MN είναι παράλληλη πρός τον άξονα ℓ τότε $\Pi\rho_{\ell}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MN}$. Αν η ευθεία MN είναι κάθετη στον άξονα ℓ τότε $\Pi\rho_{\ell}\overrightarrow{MN}=\vec{0}$

Ιδιότητες προβολών



1. Η προβολή του διανύσματος $\vec{\alpha}$ στον άξονα ℓ είναι ίση με το γινόμενο του μέτρου του διανύσματος $\vec{\alpha}$ επί το συνημίτονο της γωνίας ϕ μεταξύ του διανύσματος και του άξονα. Δηλαδή

$$\Pi\rho_\ell \vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \,\text{συν}\, \phi .$$

2. Η προβολή αθροίσματος διανυσμάτων επί έναν άξονα ισούται με το άθροισμα των προβολών των προσθετέων διανυσμάτων στον ίδιο άξονα. Δηλαδή

$$\Pi\rho_\ell (\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \ldots + \vec{\alpha}_\nu) = \Pi\rho_\ell \vec{\alpha}_1 + \Pi\rho_\ell \vec{\alpha}_2 + \ldots + \Pi\rho_\ell \vec{\alpha}_\nu$$

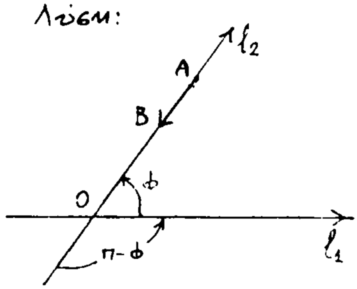
3. Η προβολή του γινομένου διανύσματος επί αριθμό ισούται με το γινόμενο του αριθμού επί την προβολή του διανύσματος στον ίδιο άξονα. Δηλαδή

$$\Pi\rho_\ell (\lambda \vec{\alpha}) = \lambda \cdot \Pi\rho_\ell \vec{\alpha}$$

<u>Παραδείγματα:</u>

(1) Δυο άξονες σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 60°. Στον άξονα ℓ_2 βρίσκεται ένα διάνυσμα AB μήκους 20 και με φορά αντίθετη του ℓ_2. Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος αυτού στον άξονα ℓ_1.

Λύση:



Γνωρίζουμε ότι:

$$\Pi\rho_{\ell_1} \vec{AB} = |\vec{AB}| \,\text{συν}\, (\widehat{\vec{AB}, \ell_1})$$

Αφού το διάνυσμα $\vec{AB}$ έχει αντίθετη φορά από τον άξονα ℓ_2, η γωνία $(\widehat{\vec{AB}, \ell_1})$ θα είναι $\pi - 60^\circ$. Άρα

$$\pi\rho_{\ell_1} \vec{AB} = 20 \cdot \text{συν}(\pi - 60^\circ) =$$

$$= -20 \,\text{συν}\, 120^\circ = -10 .$$

91. Δίνεται το διάνυσμα $\overrightarrow{MN}$ με $M(6,-4,3)$ και $N(3,2,1)$. Να βρεθεί η προβολή του $\overrightarrow{MN}$ πάνω στους άξονες συντεταγμένων.

Λύση:

Επειδή $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ έχουμε

$\Pi\rho_x \overrightarrow{MN} = \Pi\rho_x \overrightarrow{ON} - \Pi\rho_x \overrightarrow{OM}$

Αλλά $\Pi\rho_x \overrightarrow{ON} = x_2$ και $\Pi\rho_x \overrightarrow{OM} = x_1$ άρα $\Pi\rho_x \overrightarrow{MN} = x_2 - x_1$

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $\Pi\rho_y \overrightarrow{MN} = y_2 - y_1$ και $\Pi\rho_z \overrightarrow{MN} = z_2 - z_1$.

Άρα θα έχουμε:

$$\Pi\rho_x \overrightarrow{MN} = 3-6 = -3$$

$$\Pi\rho_y \overrightarrow{MN} = 2-(-4) = 6$$

$$\Pi\rho_z \overrightarrow{MN} = 1-3 = -2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

92. Η διανυσματική ακτίνα του σημείου M σχηματίζει με τους άξονες Ox, Oy αντίστοιχα γωνίες 45° και 60°. Το μέτρο της είναι $|\vec{r}| = |\overrightarrow{OM}| = 6$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου M, αν η συντεταγμένη του z είναι αρνητική.

93. Ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία 120° και έχει μέτρο 4. Να υπολογισθεί η $\Pi\rho_x \vec{\beta}$.

4. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Η ΕΥΘΕΙΑ

4.1. Καμπύλες. Γενικά περί καμπύλων

Μία εξίσωση της μορφής $c \longrightarrow f(x,y)=0$ σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο παριστάνει γενικά μία καμπύλη c. Η εξίσωση αυτή ονομάζεται <u>αναλυτική εξίσωση</u> της καμπύλης c.

Αν ενός σημείου της καμπύλης οι συντεταγμένες του x και y έχουν εκφρασθεί συναρτήσει μιας παραμέτρου t, $t \in R$, δηλαδή αν $x=x(t)$, $y=y(t)$ τότε οι εξισώσεις αυτές λέγονται <u>παραμετρικές εξισώσεις</u> της καμπύλης c δηλαδή η καμπύλη εκφράζεται παραμετρικά συναρτήσει του t.

Οι παραπάνω παραμετρικές εξισώσεις γράφονται και ως μία εξίσωση της μορφής

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$$

όπου $\vec{r}$ είναι η διανυσματική ακτίνα του σημείου $M(x,y)$ της καμπύλης c, και ονομάζεται <u>διανυσματική παραμετρική εξίσωση</u> της καμπύλης c.

<u>Παράδειγμα:</u>

94. Δίνεται η καμπύλη c, που ορίζεται από την εξίσωση $y=x^4+x^2+1$. Να βρεθούν παραμετρικές εξισώσεις αυτής και μία διανυσματική παραμετρική εξίσωσή της.

<u>Λύση:</u>

Θέτοντας $x=t$ παίρνουμε $y=t^4+t^2+1$. Άρα παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης c είναι:

$$x=t \qquad y=t^4+t^2+1$$

Μία διανυσματική παραμετρική εξίσωση της c είναι η

$$c \longrightarrow \vec{r}=\vec{r}(t)=t\vec{i}+(t^4+t^2+1)\vec{j}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

95. Δίνεται η καμπύλη c που ορίζεται από την εξίσωση

$y = \frac{x+5}{x-2}$. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της καθώς και μία διανυσματική παραμετρική εξίσωσή της.

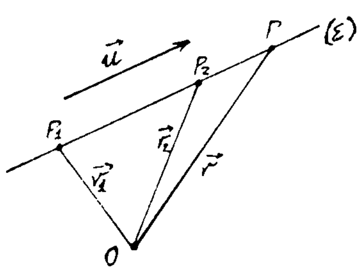
96. Δίνεται η καμπύλη c που ορίζεται από τις εξισώσεις $x = 4\sigma\upsilon\nu t$, $y = 5\eta\mu t$. Να βρεθούν μία διανυσματική παραμετρική εξίσωσή της και η εξίσωση της c χωρίς παράμετρο.

4.2. Η ευθεία γραμμή

Μια ευθεία μπορεί να ορισθεί κατά διάφορους τρόπους. Παρακάτω θα ορίσουμε τις εξισώσεις της ευθείας σε κάθε περίπτωση αφού προτάξουμε ευθύς αμέσως την έννοια του διευθύνοντος διανύσματος της ευθείας.

<u>Διευθύνον διάνυσμα</u> μιας ευθείας λέγεται κάθε διάνυσμα που δεν είναι ίσο με μηδέν και είναι παράλληλο προς την ευθεία αυτή.

Διανυσματική εξίσωση ευθείας. Μια ευθεία (ε) μπορεί να ορισθεί από ένα σημείο της $P_1(\vec{r_1})$ και ένα διάνυσμα $\vec{u}$ παράλληλο προς αυτή.



Αν $P(\vec{r})$ είναι ένα άλλο τυχόν σημείο της ε τότε έχουμε: $\overrightarrow{P_1P} = \lambda\vec{u}$, $\lambda \in R$ και επειδή $\overrightarrow{P_1P} = \vec{r} - \vec{r_1}$ έχουμε

$$\vec{r} = \vec{r_1} + \lambda\vec{u} \quad , \lambda \in R \qquad (1)$$

Η εξίσωση (1) ονομάζεται <u>διανυσματική εξίσωση</u> της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $P_1(\vec{r_1})$ και είναι παράλληλη πρός το διάνυσμα $\vec{u}$.

Εάν η ευθεία ορίζεται από δύο σημεία $P_1(\vec{r_1})$ και $P_2(\vec{r_2})$ η διανυσματική της εξίσωση θα είναι τότε η

$$\vec{r}=\vec{r_1}+\lambda\,(\vec{r_2}-\vec{r_1}) \quad ,\lambda\in R$$

Παραμετρικές εξισώσεις ευθείας: Εστω ότι η ευθεία ε ορίζεται από ένα σημείο $P_1(x_1,y_1)$ και είναι παράλληλη πρός το διάνυσμα $\vec{u}=(\alpha,\beta)$. Τότε το σύστημα των εξισώσεων

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1+\alpha\lambda \\ y &= y_1+\beta\lambda \quad ,\lambda\in R \end{aligned}\right. \qquad (2)$$

ονομάζονται <u>παραμετρικές εξισώσεις</u> της ευθείας.

Εαν η ευθεία ε ορίζεται από δύο σημεία $P_1(x_1,y_1)$ και $P_2(x_2,y_2)$ τότε οι παραμετρικές της εξισώσεις είναι

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1+\lambda\,(x_2-x_1) \\ y &= y_1+\lambda\,(y_2-y_1) \quad ,\lambda\in R \end{aligned}\right. \qquad (3)$$

Συντελεστής διευθύνσεως ή κλίση ευθείας: Η εφαπτομένη της γωνίας ω πού διαγράφει ο θετικός άξονας x στρεφόμενος κατά φορά αντίθετη της φοράς στροφής των δεικτών του ωρολογίου (ορθή μαθηματική φορά) μέχρι να συμπέσει με την ευθεία ε, ονομάζεται <u>συντελεστής διευθύνσεως</u> ή <u>κλίση</u> της ευθείας ε. Άρα

$$\lambda=\varepsilon\varphi\,\omega \qquad (4)$$

Αν η ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα των y τότε η κλίση της δεν ορίζεται.

Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς διάνυσμα $\vec{u}=(\alpha,\beta)$ (αλλά όχι παράλληλη προς τον άξονα τών y), η κλίση της δίνεται από την

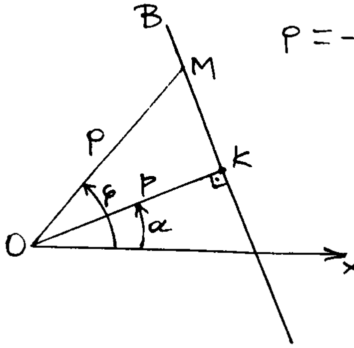
$$\lambda=\frac{\beta}{\alpha} \qquad (5)$$

Αν η ευθεία ε ορίζεται από δύο σημεία $P_1(x_1,y_1)$ και $P_2(x_2,y_2)$ (και δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα των y), η κλίση της δίνεται από την

$$\lambda=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (6)$$

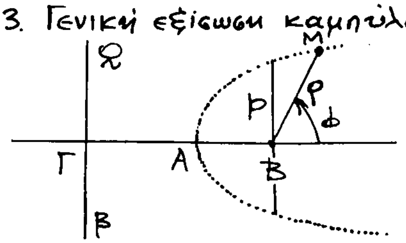
4.2.1 Γενική εξίσωση ευθείας σε πολικές συντεταγμένες.

Έστω μια ευθεία AB που δεν διέρχεται από τον πόλο O. Τότε αυτή σε πολικές συντεταγμένες έχει εξίσωση



$$\rho = \frac{p}{\sigma\upsilon\nu(\phi - \alpha)}$$ όπου $p = OK$ και $\alpha = x\hat{O}K$

4.3. Γενική εξίσωση καμπύλων (κωνικών) σε πολικές συντεταγμένες.

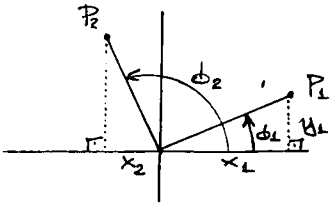


$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\,\sigma\upsilon\nu\phi}$$

(όπου ε η εκκεντρότητα (βλ. παρακάτω) της καμπύλης).

4.4. Μετασχηματισμός Πολικών Συντεταγμένων σε Καρτεσιανές και αντίστροφα.

Θεωρούμε ότι ο πόλος του συστήματος των Πολικών Συντεταγμένων συμπίπτει με την αρχή του συστήματος των Καρτεσιανών και ότι ο πολικός άξονας του πρώτου συστήματος συμπίπτει με τον άξονα x'x του δευτέρου.



Αν τότε ένα σημείο P του επιπέδου έχει πολικές συντεταγμένες (ϕ, ρ) και καρτεσιανές (x, y), θα ισχύουν οι σχέσεις:

$x = \rho\,\sigma\upsilon\nu\phi$ και $y = \rho\,\eta\mu\phi$

Άρα θα έχουμε:

$x = \rho\,\sigma\upsilon\nu\phi$	$x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2}$	$\sigma\upsilon\nu\phi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$y = \rho\,\eta\mu\phi$	$\varepsilon\phi\varphi = \dfrac{y}{x}$	$\eta\mu\phi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Εξίσωση ευθείας γνωστού συντελεστή διευθύνσεως: Η εξίσωση της ευθείας που έχει γνωστό συντελεστή διευθύνσεως λ, διέρχεται από γνωστό σημείο $P_1(x_1, y_1)$ και δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα των x είναι η

$$y - y_1 = \lambda (x - x_1) \qquad (7)$$

Εξίσωση ευθείας διερχομένης από δύο γνωστά σημεία: Η εξίσωση της ευθείας που δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα των x και διέρχεται από δύο γνωστά σημεία $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$ είναι

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (8)$$

ή

$$\varepsilon \to \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ή} \quad \varepsilon \to \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

Εξίσωση ευθείας διερχομένης από γνωστό σημείο και παράλληλης προς γνωστό διάνυσμα: Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από γνωστό σημείο $P_1(x_1, y_1)$ και είναι παράλληλη προς γνωστό διάνυσμα $\vec{u} = (a, \beta)$ είναι

$$\varepsilon \longrightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ a & \beta \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

Γενική ή Καρτεσιανή εξίσωση ευθείας:

Από τις προηγούμενες εξισώσεις διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση κάθε ευθείας μπορεί να πάρει την μορφή

$$Ax + By + \Gamma = 0 \qquad (11)$$

η οποία ονομάζεται <u>γενική ή καρτεσιανή</u> εξίσωση της ευθείας.

Εξίσωση ευθείας παράλληλης προς τον άξονα των x

Η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη προς τον άξονα των x είναι η:

$$y = \alpha$$

Εξίσωση ευθείας παράλληλης προς τον άξονα των y:

Η εξίσωση της ευθείας πού είναι παράλληλη προς τον άξονα των y είναι η

$$x = \alpha$$

Συντελεστής διευθύνσεως όταν η ευθεία έχει την μορφή $Ax+By+\Gamma=0$: Αν $B\neq 0$ η εξίσωση αυτή γράφεται

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{\Gamma}{B} \quad \text{άρα} \quad \lambda=-\frac{A}{B} \qquad (12)$$

Σημείωση: Αν $A\neq 0$ και $B=0$ η $Ax+By+\Gamma=0$ γράφεται $Ax+\Gamma=0 \Rightarrow x=-\frac{\Gamma}{A}$ και παριστάνει ευθεία $\mathcal{E}$ παράλληλη προς τον άξονα Oy σε απόσταση απ' αυτόν $-\frac{\Gamma}{A}$.

Αν $A=0$ και $B\neq 0$ η $Ax+By+\Gamma=0$ γράφεται $By+\Gamma=0 \Rightarrow y=-\frac{\Gamma}{B}$ και παριστάνει ευθεία $\mathcal{E}$ παράλληλη προς τον άξονα Ox σε απόσταση απ' αυτόν $-\frac{\Gamma}{B}$.

Αν $\Gamma=0$ τότε η $Ax+By+\Gamma=0$ γράφεται $Ax+By=0$ και παριστάνει ευθεία διερχόμενη από την αρχή των αξόνων

4.5 Μελέτη δύο ευθειών

4.5.1 Σχετική θέση δύο ευθειών:

Θεωρούμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις

$$\varepsilon_1 \longrightarrow A_1x+B_1y+\Gamma_1=0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 \longrightarrow A_2x+B_2y+\Gamma_2=0 .$$

Αυτές μπορεί να τέμνωνται, να είναι παράλληλες ή να συμπίπτουν.

Αν τέμνονται τότε $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Αν είναι παράλληλες τότε $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ αλλά μια τουλάχιστο από τις ορίζουσες $\begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}$ πρέπει να είναι διάφορη του μηδενός

Αν συμπίπτουν τότε $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ και $\begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0$ και $\begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0$

4.5.2. Σχέση των συντελεστών διευθύνσεως δύο ευθειών·

Δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες αν και μόνο αν οι συντελεστές διευθύνσεώς τους λ_1 και λ_2 είναι ίσοι, δηλαδή

$$\varepsilon_1 /\!/ \varepsilon_2 \iff \lambda_1 = \lambda_2 \qquad (12)$$

Δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες αν και μόνο αν οι συντελεστές διευθύνσεώς τους λ_1 και λ_2 έχουν γινόμενο -1

δηλαδή
$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \iff \lambda_1 \lambda_2 = -1 \qquad (13)$$

4.5.3 Γωνία δύο ευθειών

Γωνία ω δύο ευθειών τεμνομένων, ε_1 και ε_2, κατά την σειρά που έχουν γραφεί, ονομάζεται η γωνία που διαγράφει η ε_1 στρεφόμενη κατά την ορθή μαθηματική φορά έως ότου συμπέσει με την ε_2. Αν λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διευθύνσεως αντίστοιχα των ευθειών ε_1 και ε_2 τότε η γωνία τους ω δίνεται από τον τύπο:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1 \lambda_2} \qquad (14)$$

Διχοτόμοι των γωνιών δυο ευθειών: Αν θεωρήσουμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις

$$\varepsilon_1 \longrightarrow A_1x+B_1y+\Gamma_1=0 \quad , \varepsilon_2 \rightarrow A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$$

τότε οι διχοτόμοι των γωνιών τους δίνονται από τους τύπους:

$$\frac{A_1x+B_1y+\Gamma_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \pm \frac{A_2x+B_2y+\Gamma_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \qquad (15)$$

Το + λαμβάνεται για την διχοτόμο της οξείας γωνίας των δύο ευθειών και το − για την διχοτόμο της αμβλείας γωνίας.

4.6. Δέσμη ευθειών

Δέσμη ευθειών ονομάζεται το σύνολο όλων των ευθειών που ευρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και διέρχονται από το ίδιο σημείο που ονομάζεται κέντρο της δέσμης

Αν $\varepsilon_1 \longrightarrow A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$ και $\varepsilon_2 \longrightarrow A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$ είναι δύο τεμνόμενες ευθείες, τότε κάθε ευθεία ε του διέρχεται από το σημείο τομής τους, κάθε δηλαδή ευθεία που ανήκει στη δέσμη των ευθειών ε_1 και ε_2 έχει εξίσωση

$$\alpha\left(A_1x+B_1y+\Gamma_1\right)+\beta\left(A_2x+B_2y+\Gamma_2\right)=0 \quad , \alpha^2+\beta^2\neq 0 \quad (16)$$

Αν $\alpha\neq 0$ και $\frac{\beta}{\alpha}=\lambda$ η (16) γίνεται:

$$A_1x+B_1y+\Gamma_1+\lambda\left(A_2x+B_2y+\Gamma_2\right)=0 \qquad (17)$$

Συνθήκη για τρεις ευθείες: Δίδονται τρεις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_2$ που ορίζονται από τις εξισώσεις

$$\varepsilon_1 \longrightarrow A_1x+B_1y+\Gamma_1 \ , \ \varepsilon_2 \rightarrow A_2x+B_2y+\Gamma_2 \ , \ \varepsilon_3 \longrightarrow A_3x+B_3y+\Gamma_3$$

Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να διέρχονται από το ίδιο σημείο είναι

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (18)$$

4.7. Απόσταση σημείου από ευθεία

Έστω η ευθεία $\varepsilon \rightarrow Ax + By + \Gamma$ και $P_0(x_0, y_0)$ ένα γνωστό σημείο. Η απόσταση $d(P_0, \varepsilon)$ του σημείου αυτού από την ευθεία ε δίνεται από τον τύπο:

$$d(P_0,\varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (19)$$

4.8. Εμβαδόν τριγώνου.

Αν ενός τριγώνου οι κορυφές είναι $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $\Gamma(x_3,y_3)$ τότε το εμβαδόν του E δίνεται από τον τύπο:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (20)$$

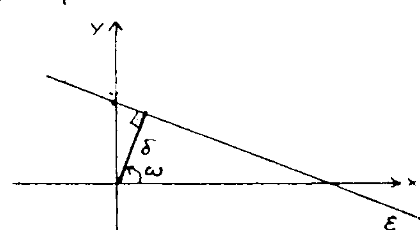
Επομένως από τον παραπάνω τύπο συμπεραίνουμε ότι τρία σημεία $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $\Gamma(x_3,y_3)$ βρίσκονται στην ίδια ευθεία αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (21)$$

4.9. Κανονική εξίσωση ευθείας ή ευθεία του Hesse

Μια ευθεία ε που δεν διέρχεται από την αρχή των συντεταγμένων μπορεί να γραφεί

$$\varepsilon \rightarrow x\,\text{συν}\omega + y\,\text{ημ}\omega - \delta = 0 \qquad (22)$$



όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει ο θετικός ημιάξονας Ox με την κάθετη που άγεται από την αρχή των συντεταγμένων πρός την ε. Η ω μεταβάλλεται από 0 έως 2π.

Το δ είναι η απόσταση της αρχής των συντεταγμένων από την ε.

Παραδείγματα

97. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2,4)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{u}=(-1,3)$

Λύση.

Εφαρμόζουμε τους τύπους $x=x_1+\alpha\lambda$, $y=y_1+\beta\lambda$, $\lambda\in R$ και βρίσκουμε ότι οι ζητούμενες εξισώσεις είναι:

$$x=-2-\lambda$$
$$y=4+3\lambda,\ \lambda\in R$$

98. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας της διερχομένης από τα σημεία $P_1(-2,3)$ και $P_2(1,0)$

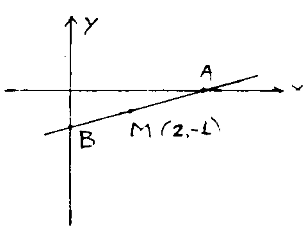
Λύση:

Από τους τύπους $x=x_1+\lambda(x_2-x_1)$, $y=y_1+\lambda(y_2-y_1)$, $\lambda\in R$ βρίσκουμε ότι οι εξισώσεις είναι:

$$\begin{array}{l} x=-2+\lambda(1-(-2)) \\ y=3+\lambda(0-3),\ \lambda\in R \end{array} \iff \begin{array}{l} x=-2+3\lambda \\ y=3-3\lambda,\ \lambda\in R \end{array}$$

99. Να γραφεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(2,-1)$ το οποίο είναι μέσο του τμήματος της ευθείας αυτής που ορίζεται από τους άξονες των συντεταγμένων

Λύση:



Η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $M(2,-1)$ και έχει κλίση λ είναι

$$y+1=\lambda(x-2)$$

Αν αυτή τέμνει τους άξονες Ox και Oy στα σημεία A και B αντίστοιχως θα είναι: $A\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda},0\right)$ και $B(0,-2\lambda-1)$. Αφού το M είναι μέσο του AB θα έχουμε

$$2=\frac{\frac{2\lambda+1}{\lambda}+0}{2} \quad \text{και} \quad -1=\frac{0+(-2\lambda-1)}{2}$$

Απο οπου ταιρνουμε $\lambda = \frac{1}{2}$

Αρα η ζητουμενη εξισωση της ευθειας ειναι $\varepsilon \rightarrow x - 2y - 4 = 0$.

100. Να υπολογισθει η γωνια που σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων η ευθεια που ορίζεται από τα σημεια $A(0,2)$, $B(-2,4)$.

Λύση:

Αν ω η ζητουμενη γωνια και λ η κλίση της ευθειας, πρεπει:

$$\varepsilon\varphi\omega = \lambda \qquad\qquad \varepsilon\varphi\omega = \lambda$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{4-0}{-2-2} = -1 \quad \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = -1 \Rightarrow \omega = 135^\circ.$$

101. Στην ευθεια που διερχεται από το σημειο $A(3,1)$ και σχηματίζει με τον αξονα των x γωνια 45° να βρεθει σημειο με τεταγμενη 4.

Λυση

Αφου η ευθεια σχηματιζει με τον αξονα των x γωνια 45° ο συντελεστης διευθυνσεως της θα ειναι

$$\lambda = \varepsilon\varphi 45^\circ \Rightarrow \lambda = 1$$

Αρα η ευθεια θα εχει εξισωση

$$y - 1 = 1 \cdot (x-3) \Rightarrow x - y - 2 = 0 \qquad (1)$$

Για να βρουμε σημειο με τεταγμενη 4 που ανηκει στην ευθεία, θέτουμε στην (1) $y=4$ οπότε $x=6$.

Αρα το ζητουμενο σημειο ειναι το $(6,4)$

102. Δινεται τριγωνο ΑΒΓ κορυφών $A(1,5)$, $B(-1,3)$, $\Gamma(3,-1)$. Να γραφει η εξίσωση της διαμεσου του ΑΜ.

Λυση:

Επειδη τό Μ ειναι μέσο του τμήματος ΒΓ οι συντεταγμένες του θα ειναι:

$$x = \frac{-1+3}{2} = 1 \qquad \text{και} \quad y = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{Αρα } M(1,1)$$

Επομένως η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$ και $M(1,1)$ δηλαδή της διαμέσου AM θα είναι

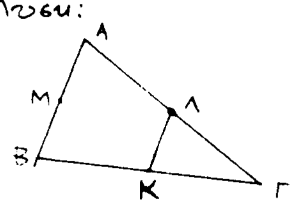
$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \Rightarrow \frac{y-5}{1-5} = \frac{x-1}{1-1} \Rightarrow$$

$$(y-5)(1-1) = (x-1)(1-5) \Rightarrow 0 = -4(x-1) \Rightarrow$$

$$AM \longrightarrow x-1=0.$$

103. Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει μέσα πλευρών τα σημεία $K(-3,2)$, $\Lambda(-5,7)$, $M(2,-3)$ (βλ. σχήμα). Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

Λύση:



Βρίσκουμε πρώτα την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από δύο γνωστά σημεία K και Λ. Αυτή θα είναι:

$$\frac{y-2}{7-2} = \frac{x+3}{-5+3} \Rightarrow \frac{y-2}{5} = \frac{x+3}{-2}$$

$$\Rightarrow 5(x+3) = -2(y-2)$$

$$\Rightarrow 5x+15 = -2y+4$$

$$\Rightarrow K\Lambda \rightarrow 5x+2y+11=0 \qquad \Rightarrow \lambda_{K\Lambda} = -\frac{5}{2}$$

Επειδή όμως $AB // K\Lambda \Rightarrow \lambda_{K\Lambda} = \lambda_{AB} = -\frac{5}{2}$

Η ευθεία λοιπόν που ορίζεται από τα σημεία A και B διέρχεται από γνωστό σημείο $M(2,-3)$ και έχει γνωστό συντελεστή διευθύνσεως. Άρα θα έχει εξίσωση:

$$y+3 = -\frac{5}{2}(x-2) \Rightarrow$$

$$-5x+10 = 2y+6 \Rightarrow$$

$$AB \rightarrow 5x+2y-4=0$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε

$$B\Gamma \longrightarrow 10x+7y+16=0$$

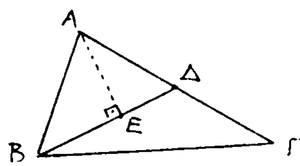
$$A\Gamma \longrightarrow x+y-2=0$$

104. Τριγωνο εχει κορυφες τα σημεια $A(-2,0)$, $B(2,5)$ και $\Gamma(3,1)$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που αγεται απο το A κάθετα στη διαμεσο BΔ

Λύση:

Τό μέσο Δ της ΑΓ έχει συντεταγμενες τις

$$x_\Delta = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} \quad , \quad y_\Delta = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$



Τα σημεία λοιπόν B και Δ ειναι γνωστα αρα και η ευθεια που ορίζεται απο αυτά προσδιορίζεται απο την σχεση

$$\frac{y-5}{\frac{1}{2}-5} = \frac{x-2}{\frac{1}{2}-2} \Rightarrow 9x-3y-3=0 \quad \text{Άρα } B\Delta \longrightarrow 3x-y-1=0$$

$\Rightarrow \lambda_{B\Delta} = 3$ Επειδή τωρα οι ευθείες BΔ και AE ειναι κάθετες οι συντελεστές διευθύνσεώς τους θα πρεπει να έχουν γινόμενο -1. Άρα:

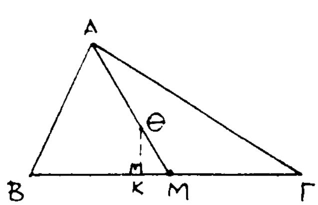
$$\lambda_{AE} \cdot \lambda_{B\Delta} = -1 \Rightarrow \lambda_{AE} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \lambda_{AE} = -\frac{1}{3}$$

Η ευθεία λοιπόν AE έχει γνωστό λ και διέρχεται απο γνωστό σημείο A. Άρα θά έχει εξίσωση:

$$y-0 = -\frac{1}{3}(x+2) \Rightarrow AE \longrightarrow x+3y+2=0$$

105. Ενα τρίγωνο εχει κορυφές τα σημεια $A(6,0)$, $B(0,2)$ και $\Gamma(-4,6)$. Να υπολογισθούν οι συντεταγμένες του ίχνους της κάθετης που άγεται από το κέντρο βάρους Θ του τριγώνου πρός την πλευρα ΒΓ.

Λύση:



Βρίσκουμε πρώτα τις συντεταγμενες τού σημείου M (μέσο της ΒΓ): Εχουμε:

$$x_M = \frac{0-4}{2} = -2 \quad , \quad y_M = \frac{2+6}{2} = 4$$

Το Θ σαν βαρύκεντρο διαιρει την διαμεσο ΑΜ σε δυο τμηματα με λόγο $\frac{2}{1}$. Αρα οι συντεταγμένες του Θ θα ειναι

$$x_\Theta = \frac{6+\frac{2}{1}(-2)}{1+\frac{2}{1}} \quad , \quad y_\Theta = \frac{0+\frac{2}{1}\cdot 4}{1+\frac{2}{1}} \Rightarrow$$

$$x_\Theta = \frac{2}{3} \quad , \quad y_\Theta = \frac{8}{3}$$

Η ΒΓ σαν ευθεια έχει εξίσωση: $\frac{y-2}{6-2} = \frac{x-0}{-4-0} \Rightarrow$

$$\frac{y-2}{4} = \frac{x}{-4} \Rightarrow B\Gamma \longrightarrow x+y-2=0 \Rightarrow \lambda_{B\Gamma} = -\frac{1}{1} = -1$$

Επειδή οι ευθειες ΒΓ και ΘΚ ειναι κάθετες, θα ισχυει

$$\lambda_{B\Gamma}\cdot\lambda_{\Theta K} = -1 \Rightarrow -1\cdot\lambda_{\Theta K} = -1 \Rightarrow \lambda_{\Theta K} = 1.$$

Η ευθεια τωρα ΘΚ προσδιορίζεται από την εξίσωση (γνωστο $\lambda_{\Theta K}$ και γνωστό σημειο Θ):

$$y - \frac{8}{3} = 1\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Theta K \longrightarrow x-y+2=0$$

Συνεπώς οι συντεταγμένες του Κ θα ειναι:

$$K = B\Gamma \cap \Theta K = \{(x,y) / x+y-2=0 \wedge x-y+2=0\} \Rightarrow K(0,2)$$

104. Να δειχθεί ότι οι ευθείες $\varepsilon_1 \longrightarrow 3x+4y-2=0$ και $\varepsilon_2 \longrightarrow 6x+8y-15=0$ είναι παράλληλες και να βρεθεί η μεταξύ τους απόσταση

<u>Λυση:</u>

Εαν λ_1 και λ_2 είναι αντιστοίχως οι κλίσεις των ε_1 και ε_2, εχουμε $\lambda_1 = -\frac{3}{4}$ και $\lambda_2 = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$

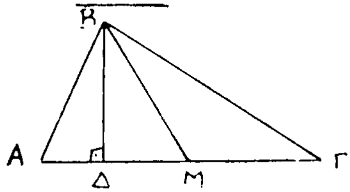
Αφου λοιπόν $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \varepsilon_1 // \varepsilon_2$

Για να βρεθεί η αποσταση τους αρκεί να βρούμε την απόσταση ενός σημείου της μιάς από τήν άλλη. Ενα τέτοιο σημείο της ε_1 είναι π.χ το $P_1(-2,2)$ Άρα

$$d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=d(P_1,\varepsilon_2)=\frac{|6\cdot(-2)+8\cdot 2-15|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{|-11|}{10}=\frac{11}{10}$$

107. Τρίγωνο ΑΒΓ έχει κορυφές $A(-2,0)$, $B(2,6)$ και $\Gamma(4,2)$. Να γραφούν οι εξισώσεις της πλευράς ΑΓ, του ύψους ΒΔ και της διαμέσου ΒΜ.

Λύση:



Πλευρά ΑΓ:

$$A\Gamma \longrightarrow \frac{y-0}{2-0}=\frac{x+2}{4+2} \Rightarrow$$

$$A\Gamma \rightarrow x-3y+2=0 \Rightarrow \lambda_{A\Gamma}=\frac{1}{3}$$

Επειδή $A\Gamma \perp B\Delta \Rightarrow \lambda_{B\Delta}=-\dfrac{1}{\frac{1}{3}}=-3$

Η ΒΔ διέρχεται από γνωστό σημείο Β και έχει γνωστή κλίση, άρα η εξίσωσή της θα είναι: $y-6=-3(x-2) \Longrightarrow$

$$B\Delta \longrightarrow 3x+y+12=0.$$

Το σημείο Μ ως μέσο του ευθυγρ. τμήματος ΑΓ θα έχει συντεταγμένες $M_x=\dfrac{-2+4}{2}=1$ και $M_y=\dfrac{0+2}{2}=1$

Άρα η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα Β και Μ θα είναι $\dfrac{y-6}{1-6}=\dfrac{x-2}{1-2} \Rightarrow \dfrac{y-6}{-5}=\dfrac{x-2}{-1} \Longrightarrow$

$$BM \longrightarrow 5x-y-4=0$$

108. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου το οποίο έχει κορυφές τα σημεία $A(\alpha,1)$, $B(0,\beta)$ και $\Gamma(\gamma,1)$.

Λύση:

Εφαρμόζουμε τον τύπο (20) του υπολογισμού του εμβαδού τριγώνου και έχουμε:

$$E = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & \beta & 1 \\ \gamma & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\alpha \begin{vmatrix} \beta & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\cdot 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} 1 \begin{vmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha(\beta-1) - \frac{1}{2}(-\gamma) + \frac{1}{2}(-\beta\gamma) = \frac{1}{2}(\alpha\beta - \alpha + \gamma - \beta\gamma) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\beta(\alpha-\gamma) - (\alpha-\gamma)\right] = \frac{(\alpha-\gamma)(\beta-1)}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

109. Οι κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι τα σημεία $A(-5,2)$, $B(5,6)$ και $\Gamma(1,-2)$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη προς την διάμεσο ΑΜ στο σημείο Μ

110. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον άξονα των x στο 3 και η οποία είναι παράλληλη πρός την ευθεία $x-4y+2=0$.

111. Να γραφούν οι εξισώσεις των ευθειών που είναι κάθετες στην ευθεία $\varepsilon \to 2x-5y-10=0$ στά σημεία τομής αυτής της ευθείας με τους άξονες των συντεταγμένων.

112. Να γραφούν οι εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται απο το σημείο $A(-1,0)$ και σχηματίζουν γωνία 45° με την ευθεία $\varepsilon \to 2x+3y-6=0$

113. Οι εξισώσεις των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι $\varepsilon_1 \to 2x-3y+5=0$, $\varepsilon_2 \to 3x+2y-7=0$ Να γραφούν οι εξισώσεις των άλλων πλευρών του ορθογωνίου, αν η μία του κορυφή είναι το σημείο $A(2,-3)$.

114. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $P(4,-1)$ από τήν ευθεία $12x-5y-27=0$.

115. Το τμήμα της ευθείας $\varepsilon \to x-y+4=0$ που αποκόπτεται

απο τους άξονες των συντεταγμένων είναι η μία διαγώνιος ενός ρόμβου. Να βρεθεί η εξίσωση της άλλης διαγωνίου του ρόμβου.

116. Να διαπιστωθεί ποιές είναι παράλληλες και ποιές κάθετες μεταξύ των ευθειών: $\varepsilon_1 \rightarrow 3x-2y+7=0$, $\varepsilon_2 = 6x-4y-9=0$, $\varepsilon_3 \longrightarrow 6x+4y-5=0$ και $\varepsilon_4 = 2x+3y-6=0$.

117. Να βρεθεί η γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2 στις παρακάτω περιπτώσεις:

α'. $\varepsilon_1 \longrightarrow 6x+4y+9=0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 3x+2y=0$

β'. $\varepsilon_1 \longrightarrow \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$, $\varepsilon_2 \longrightarrow \frac{x}{\beta}-\frac{y}{\alpha}=1$

118. Ενα τρίγωνο έχει πλευρές με εξισώσεις $\varepsilon_1 \rightarrow 3x-y+6=0$, $\varepsilon_2 \longrightarrow x-y+4=0$, $\varepsilon_3 \rightarrow x+2y=0$ Να υπολογισθούν οι γωνίες του τριγώνου.

119. Ενός τριγώνου ΑΒΓ δύο από τα ύψη του βρίσκονται στις ευθείες $\varepsilon_1 \longrightarrow 7x-2y-1=0$ και $\varepsilon_2 \longrightarrow 2x-7y-6=0$. Η μία κορυφή του είναι η $A(3,-4)$. Να γραφούν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.

120. Δίδονται τα σημεία $A(-2,3)$, $B(3,8)$, $\Gamma(3,1)$ και $\Delta(-2,-4)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ και να δειχθεί ότι αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

121. Οι δύο πλευρές ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ έχουν εξισώσεις $AB \longrightarrow 3x+4y-12=0$ και $A\Delta \longrightarrow 5x-12y-6=0$. Το μέσο Ε της πλευράς ΒΓ έχει συντεταγμένες $\left(-2, \frac{13}{6}\right)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των άλλων πλευρών του παραλληλογράμμου

122. Να γραφεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(2,-1)$ και από την τομή των ευθειών $\varepsilon_1 \rightarrow 7x-y+3=0$ και $\varepsilon_2 \rightarrow 3x+5y-4=0$

123. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που ενώνουν τα μέσα των πλευρών του τριγώνου που έχει κορυφές $(-3,2)$, $(3,-2)$ και $(0,-1)$ και να δειχθεί ότι είναι παράλληλες προς τις πλευρές.

124. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από την τομή των ευθειών $\varepsilon_1 \rightarrow x+2y=1$, $\varepsilon_2 \rightarrow 2x-4y-3=0$.

4.10. Ο Κύκλος

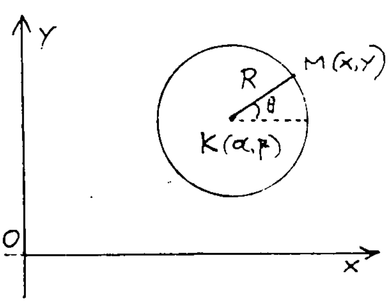
<u>Κύκλος</u> ονομάζεται το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου καθένα από τα οποία απέχει σταθερή απόσταση από ένα σταθερό σημείο K που λέγεται <u>κέντρο</u> του κύκλου

Η σταθερή απόσταση ονομάζεται <u>ακτίνα</u> του κύκλου, δηλαδή $d(M,K) = R$ (1)

Αν $K(\alpha,\beta)$ είναι το κέντρο του κύκλου και R η ακτίνα του εκ της (1) έχουμε

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \qquad (2)$$

η οποία ονομάζεται <u>κανονική εξίσωση του κύκλου</u>.



Αν το κέντρο του κύκλου συμπίπτει με την αρχή των συντεταγμένων η (2) γράφεται

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (3)$$

Από την (2) έχουμε

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0 \qquad (4)$$

Αν θέσουμε $\Delta = -2\alpha$, $E = -2\beta$, $Z = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$ (5)

η (4) γράφεται:

$$x^2 + y^2 + \Delta x + E y + Z = 0 \qquad (6)$$

Από τις (5) έχουμε:

$$\alpha = -\frac{\Delta}{2}, \quad \beta = -\frac{E}{2} \quad \text{και} \quad R^2 = \frac{\Delta^2 + E^2 - 4Z}{4}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Η καμπύλη που παριστάνεται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + \Delta x + E y + Z = 0$, προσδιορίζεται ως εξής:

α΄) Εάν $\Delta^2 + E^2 - 4Z > 0$ η καμπύλη είναι κύκλος με κέντρο $\left(-\frac{\Delta}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ και ακτίνα $R = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2 + E^2 - 4Z}$

β΄) Αν $\Delta^2 + E^2 - 4Z = 0$ η καμπύλη εκφυλίζεται σε ένα σημείο $\left(-\frac{\Delta}{2}, -\frac{E}{2}\right)$.

γ') Αν $\Delta^2+E^2-4Z<0$, δεν υπάρχει καμπύλη

Ενα συστημα <u>παραμετρικων</u> εξισωσεων του κύκλου ειναι το

$$x=\alpha+R\sigma\upsilon\nu\theta \quad , y=\beta+R\eta\mu\theta \qquad (7)$$

με παράμετρο την γωνια θ που σχηματίζει η τυχουσα ακτίνα ΚΜ , όπου $M(x,y)$ τυχόν σημείο του κύκλου, με τον αξονα Ox

Από τις (7) έχουμε μια <u>διανυσματικη παραμετρικη</u> εξίσωση του κύκλου·

$$\vec{r}(\theta)=(\alpha+R\sigma\upsilon\nu\theta)\vec{i}+(\beta+R\eta\mu\theta)\vec{j} \qquad (8)$$

Η εξίσωση του κυκλου που διερχεται απο τρία δεδομένα σημεία $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$ ειναι·

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad (9)$$

με την προϋπόθεση ότι:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$$

<u>Παραδειγματα:</u>

125. Να γραφουν στην κανονικη τους μορφη οι εξισωσεις των κύκλων: i) $x^2+y^2-2x+4y=0$ ii) $x^2+y^2+x-5y-3=0$.

<u>Λύση:</u>

i) Εχουμε $\Delta=-2\alpha=-2 \Rightarrow \alpha=1$

$$E=-2\beta=4 \Rightarrow \beta=-2$$

$$Z=0 \quad , \quad R^2=\frac{4+16-4\cdot 0}{4}=5$$

Αρα από την $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Longrightarrow$

$$(x-1)^2+(y+2)^2=5$$

ii) Εχουμε:

$$\Delta = -2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$E = -2\beta = -5 \Rightarrow \beta = \frac{5}{2}$$

$$Z = -3$$

$$R^2 = \frac{1+25-4\cdot(-3)}{4} = \frac{1+25+12}{4} = \frac{38}{4}$$

Αρα η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{38}{4}$$

125. Να γραφεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(0,1)$, $B(0,6)$, $\Gamma(3,0)$

Λύση:

$1^{ος}$ τρόπος: Με την κανονική εξίσωση του κύκλου:

Εστω $\quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \qquad (1)$

ο ζητούμενος κύκλος. Αφού το σημείο A βρίσκεται πάνω σ' αυτόν θα έχουμε $(0-\alpha)^2 + (1-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow$

$$\alpha^2 + 1 + \beta^2 - 2\beta = R^2 \qquad (2)$$

Για το σημείο B θα έχουμε ομοίως:

$$(0-\alpha)^2 + (6-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$\alpha^2 + 36 + \beta^2 - 12\beta = R^2 \qquad (3)$$

Για το σημείο Γ:

$$(3-\alpha)^2 + (0-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$9 + \alpha^2 - 6\alpha + \beta^2 = R^2 \qquad (4)$$

Λύνοντας το σύστημα των (2),(3),(4) βρίσκουμε:

$$\alpha = \frac{5}{2}, \quad \beta = \frac{7}{2}, \quad R^2 = \frac{\sqrt{50}}{2} \left(\text{δηλ. } R = \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

και αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε την ζητουμένη εξίσωση:

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

Δηλ. το κέντρο του είναι $K\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

$2^{ος}$ τρόπος:

Εστω ότι η ζητουμενη εξίσωση ειναι της μορφής:

$$x^2+y^2+\Delta x+Ey+Z=0 \qquad (1)$$

Επειδη τα σημεία Α, Β, Γ βρίσκονται επι του κύκλου, θα επαληθεύουν οι συντεταγμένες τους την (1). Ετσι θα εχουμε

για τό σημείο $A(0,1)$: $0^2+1^2+\Delta\cdot 0+E\cdot 1+Z=0 \Rightarrow 1+E+Z=0 \qquad (2)$

για το σημείο $B(0,6)$: $0^2+6^2+\Delta\cdot 0+E\cdot 6+Z=0 \Rightarrow 36+6E+Z=0 \qquad (3)$

για το σημείο $\Gamma(3,0)$: $3^2+0^2+\Delta\cdot 3+E\cdot 0+Z=0 \Rightarrow 9+3\Delta+Z=0 \qquad (4)$

Λύνοντας τό σύστημα των εξισώσεων (2),(3),(4) παιρνουμε:

$$E=-7, \quad Z=6, \quad D=-5$$

αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε την ζητουμένη εξίσωση:

$$x^2+y^2-5x-7y+6=0$$

<u>Παρατήρηση:</u> Το κέντρο του κύκλου θά ειναι $K\left(-\frac{\Delta}{2},-\frac{E}{2}\right)$ $\Rightarrow K\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$ και η ακτίνα του $R=\frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2+E^2-4Z} \Rightarrow$

$$\Rightarrow R=\frac{1}{2}\sqrt{25+49-24} \Rightarrow R=\frac{1}{2}\sqrt{50} \Rightarrow R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

127. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $P_1(0,-3)$, $P_2(4,0)$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία $x+2y=0$.

<u>Λύση:</u>

Η ζητουμενη ε ισωση είναι της μορφής:

$$x^2+y^2+\Delta x+Ey+Z=0 \qquad (1)$$

Αφού τα σημεία P_1, P_2 βρίσκονται επι του κυκλου, έχουμε αντίστοιχα:

$$0^2+(-3)^2+\Delta\cdot 0+E(-3)+Z=0 \Rightarrow 9-3E+Z=0 \qquad (2)$$

$$4^2+0^2+\Delta\cdot 4+E\cdot 0+Z=0 \Rightarrow 16+4\Delta+Z=0 \qquad (3)$$

Το κέντρο της (1) είναι $\left(-\frac{\Delta}{2},-\frac{E}{2}\right)$ και επειδή βρίσκεται επι της ευθείας $x+2y=0$, θα εχουμε:

$$-\frac{\Delta}{2}+2\cdot\left(-\frac{E}{2}\right)=0 \Rightarrow \Delta+2E=0 \qquad (4)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (2),(3),(4) παίρνουμε $\Delta = -\frac{14}{5}$, $E = \frac{7}{5}$, $Z = -\frac{24}{5}$, και αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε την ζητουμένη εξίσωση:

$$x^2+y^2-\frac{14}{5}x+\frac{7}{5}y-\frac{24}{5}=0 \Rightarrow$$

$$5x^2+5y^2-14x+7y-24=0.$$ Κέντρο είναι το σημείο $\left(\frac{7}{5}, -\frac{7}{10}\right)$ και η ακτίνα ίση με $\frac{1}{2}\sqrt{29}$

128. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(1,-1)$ που να εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon \rightarrow 5x-12y+9=0$.

Λύση:

Εστω R η ακτίνα του κυκλου. Επειδη αυτός εφάπτεται στην (ε) πρέπει

$$R=d(K,\varepsilon) \Rightarrow R=2$$

Άρα η ζητουμένη εξίσωση του κύκλου είναι

$$(x-1)^2+(y+1)^2=4.$$

129. Να γράψετε την εξίσωση του κυκλου του οποίου τα σημεία $A(1,4)$ και $B(-3,2)$ είναι άκρα της διαμέτρου του.

Λύση:

Το κέντρο K του κύκλου θα είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB, άρα θα έχει συντεταγμένες

$$x_K=\frac{1-3}{2}=-1 \quad \text{και} \quad y_K=\frac{4+2}{2}=3$$ Άρα το κέντρο είναι $K(-1,3)$

Η ακτίνα R θα είναι $R=\frac{d(A,B)}{2}=\frac{\sqrt{20}}{2}=\sqrt{5}$

Συνεπώς ο κύκλος έχει εξίσωση:

$$(x+1)^2+(y-3)^2=5.$$

130. Να βρεθεί η εξίσωση της διαμέτρου του κυκλου $C \rightarrow$ $\rightarrow x^2+y^2+4x-6y-17=0$ που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon \rightarrow 5x+2y-13=0$.

Λύση:

Ο κύκλος c γράφεται και ως εξής (βλ. παράδειγμα 1)

$$c \longrightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=30$$

και παρατηρούμε ότι έχει κέντρο $K(-2,3)$. Αφού η ζητουμένη διάμετρος είναι κάθετη στην $\varepsilon \longrightarrow 5x+2y-13=0$, θα έχει συντελεστή διευθύνσεως $\lambda=\frac{2}{5}$. Άρα αφού σαν διάμετρος διέρχεται από το κέντρο $K(-2,3)$, θα έχει εξίσωση.

$$y-3=\frac{2}{5}(x+2) \Rightarrow 2x-5y+19=0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

131. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K(-2,0)$ και ακτίνα $R=2$

132. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K(2,3)$ και διέρχεται από το σημείο $A(3,-2)$

133. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $(4,2)$, $(-6,-2)$ και έχει το κέντρο του στον άξονα των y.

134. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $(-1,-5)$ και εφάπτεται στον άξονα των x.

135. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από τα σημεία $P_1(3,2)$ και $P_2(-7,4)$.

136. Ένας κύκλος είναι εγγεγραμμένος σε τρίγωνο που σχηματίζεται από τις ευθείες $\varepsilon_1 \rightarrow x-6=0$, $\varepsilon_2 \rightarrow x+2y=0$, $\varepsilon_3 \rightarrow x-2y=8$. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου αυτού.

137. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στον άξονα των τετμημένων στο σημείο $(5,0)$ και αποκόπτει από τον άξονα των τεταγμένων χορδή μήκους 10.

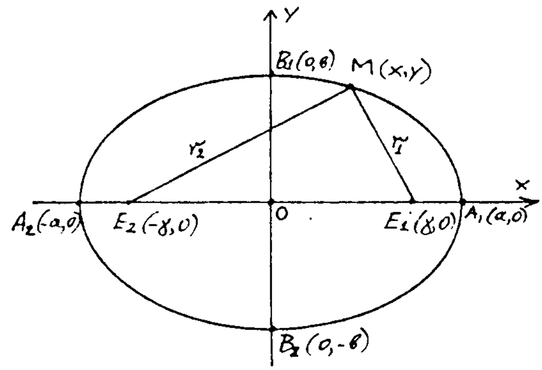
138. Δίνεται ο κύκλος $(x+3)^2+(y-2)^2=25$ και το σημείο $(2,6)$. Μία ευθεία διέρχεται από το σημείο A και εφάπτεται του κύκλου στο B. Να υπολογίσετε το μήκος του AB

4.11. Η έλλειψη

<u>Έλλειψη</u> καλείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου που το άθροισμα των αποστάσεών τους από δύο δεδομένα σημεία E_1 και E_2 είναι σταθερό. Δηλαδή

$$d(M,E_1)+d(M,E_2)=\text{σταθερό}.$$

Τα σημεία E_1 και E_2 ονομάζονται <u>εστίες</u> της έλλειψης και η απόστασή τους $d(E_1,E_2)$ <u>εστιακή απόσταση</u>.



Οι αποστάσεις του σημείου M από τις εστίες E_1 και E_2 ονομάζονται <u>εστιακές ακτίνες</u>

<u>Συμβολισμοί</u>:

$$d(E_1,E_2)=2\gamma>0$$
$$d(M,E_1)+d(M,E_2)=2\alpha>0$$
$$d(M,E_1)=r_1$$
$$d(M,E_2)=r_2$$

Παρατηρούμε ότι : $r_1+r_2>2\gamma \Rightarrow 2\alpha>2\gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha>\gamma$.

Άξονα των x θεωρούμε τον διερχόμενο από τις εστίες και ονομάζεται <u>κύριος άξονας</u>.

Άξονα των y θεωρούμε τον μεσοκάθετο της εστιακής απόστασης και ονομάζεται <u>δευτερεύων άξονας</u>.

Εξίσωση έλλειψης: Αποδεικνύεται εύκολα ότι η εξίσωση της έλλειψης είναι $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ όπου $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$.

Οι εστίες έχουν συντεταγμένες $E_1(\gamma,0)$, $E_2(-\gamma,0)$

Τα σημεία $A_1(\alpha,0)$ και $A_2(-\alpha,0)$ που η έλλειψη τέμνει τον κύριο άξονα ονομάζονται <u>κύριες κορυφές</u>

Το ευθύγραμμο τμήμα $A_1A_2=2\alpha$ ονομάζεται <u>μεγάλος άξονας</u>

Τα σημεία $B_1(\beta,0)$ και $B_2(-\beta,0)$ στα οποία η έλλειψη τέμνει τον

τον δευτερεύοντα άξονα ονομάζονται δευτερεύουσες κορυφές

Το ευθύγραμμο τμήμα $B_1B_2 = 2\beta$ ονομάζεται *μικρός άξονας*.

<u>ΟΡΙΣΜΟΙ</u>: I. <u>Εκκεντρότητα ε</u> της έλλειψης ονομάζουμε τον λόγο $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$.

Επειδή $\gamma < \alpha \Rightarrow \varepsilon < 1$.

II. <u>Διευθετούσες</u> δ_1, δ_2 της έλλειψης ονομάζονται οι ευθείες $\delta_1 \to x_1 - \frac{\alpha^2}{\gamma} = 0$ και $\delta_2 \to x + \frac{\alpha^2}{\gamma} = 0$

Επειδή $\gamma < \alpha \Rightarrow \alpha < \frac{\alpha^2}{\gamma}$ άρα οι διευθετούσες δ_1 και δ_2 δεν τέμνουν την έλλειψη.

III. Η <u>εφαπτομένη</u> της έλλειψης στο σημείο της $P_0(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση $\frac{x_0 x}{\alpha^2} + \frac{y_0 y}{\beta^2} = 1$.

<u>Παραδείγματα</u>:

139. Να γραφούν οι εξισώσεις της έλλειψης στις παρακάτω περιπτώσεις:

α') Οι ημιάξονες είναι αντίστοιχα 4 και 2

β') Η εστιακή απόσταση είναι 6 και ο μεγάλος άξονας 5

γ') Ο μεγάλος ημιάξονας 10 και η εκκεντρότητα $\varepsilon = 0{,}8$.

δ') Ο μικρός ημιάξονας 3 και η εκκεντρότητα $\varepsilon = \sqrt{2}/2$.

ε') Το άθροισμα των ημιαξόνων 8 και η εστιακή απόσταση 8

<u>Λύση</u>:

α') Έχουμε $\alpha = 4$ και $\beta = 2$ άρα $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

β') Από $2\gamma = 6 \Rightarrow \gamma = 3$. Εκ της $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ με $\gamma = 3$ και $\alpha = 5$ βρίσκουμε $\beta^2 = 16$ Άρα $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

γ') Έχουμε $\alpha = 10$ και $\varepsilon = 0{,}8$ Εκ της $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = 0{,}8 \Rightarrow \gamma = 8$ και εκ της $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Rightarrow \beta^2 = 36$. Άρα $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

δ') Είναι $\beta = 3$ άρα $\alpha^2 = 18$ άρα $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

ε') Είναι $\alpha + \beta = 8$ και $2\gamma = 8 \Rightarrow \gamma = 4$

Επειδή $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 16$ και λύνουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta=8 \\ \alpha^2-\beta^2=16 \end{array}\right\} \text{απ' όπου } \alpha=5,\ \beta=3. \text{ Άρα } \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

140. Από την εστία $E_1(\gamma, 0)$ της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ φέρουμε χορδή κάθετη στον μεγάλο άξονα. Να βρεθεί το μήκος αυτής της χορδής.

Λύση:

Η ευθεία πού διέρχεται από το σημείο $E_1(\gamma, 0)$ και είναι κάθετη στο μεγάλο άξονα της έλλειψης έχει εξίσωση

$$\varepsilon \longrightarrow x=\gamma.$$

Για να βρούμε τα σημεία τομής της ε με την έλλειψη, λύνουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \\ x=\gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y^2=\frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2-\gamma^2) \\ x=\gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y^2=\frac{\beta^4}{\alpha^2} \\ x=\gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=\pm\frac{\beta^2}{\alpha} \\ x=\gamma \end{array}\right.$$

Άρα $M_1(x_1, y_1)=\left(\gamma, \frac{\beta^2}{\alpha}\right)$, $M_2(x_2, y_2)=\left(\gamma, -\frac{\beta^2}{\alpha}\right)$

Και $|\overrightarrow{M_1M_2}|=\frac{2\beta^2}{\alpha}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

141. Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει μικρό ημιάξονα ίσο με 8 και διευθετούσες με εξισώσεις $x=\pm 8$

142. Να γραφούν οι εξισώσεις της έλλειψης όταν: α) Οι ημιάξονες είναι 5 και 4. β) Η εστιακή απόσταση είναι 8 και ο μεγάλος ημιάξονας 10. γ) Ο μεγάλος ημιάξονας είναι 26 και η εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{12}{13}$.

143. Οι αποστάσεις μιας εστίας της έλλειψης από τις κύριες κορυφές της είναι 7 και 1. Να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης

144. Δίνεται η έλλειψη $4x^2+9y^2=36$ και το σημείο $P(1, 1)$. Να γράψετε την εξίσωση της κορδής πού έχει μέσο το P.

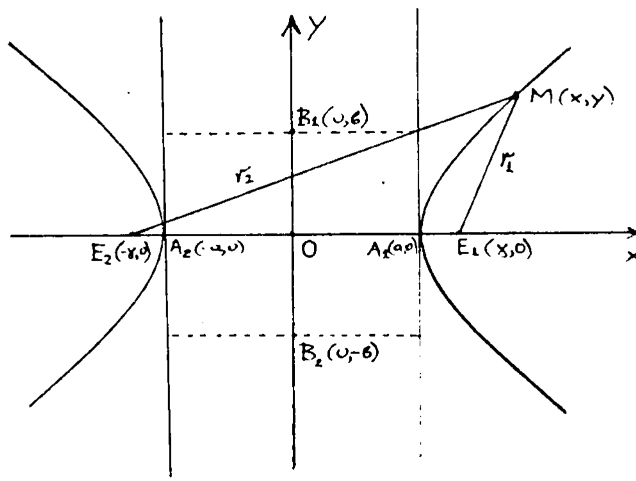
4.12. Η υπερβολή

<u>Υπερβολή</u> καλείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου που η απόλυτη διαφορά των αποστάσεων από δύο δεδομένα σημεία E_1 και E_2 είναι σταθερή. Δηλαδή

$$\left| d(M, E_1) - d(M, E_2) \right| = \text{σταθερό}$$

Τα σημεία E_1 και E_2 ονομάζονται <u>εστίες</u> της υπερβολής και η απόστασή τους $d(E_1, E_2)$ <u>εστιακή απόσταση</u>

Οι αποστάσεις του σημείου Μ από τις εστίες E_1 και E_2 ονομάζονται <u>εστιακές ακτίνες</u>.



<u>Συμβολισμοί</u>:

$d(E_1, E_2) = 2\gamma$.

$\left| d(M, E_1) - d(M, E_2) \right| = 2\alpha$

$d(M, E_1) = r_1$

$d(M, E_2) = r_2$

Άξονα των x θεωρούμε τον διερχόμενο από τις εστίες και ονομάζεται <u>πρωτεύων ή πραγματικός άξονας</u>.

Άξονα των y θεωρούμε τον μεσοκάθετο της εστιακής αποστάσεως και ονομάζεται <u>δευτερεύων ή φανταστικός άξονας</u>.

Το μέσο Ο της εστιακής αποστάσεως ονομάζεται <u>κέντρο</u>

Εξίσωση υπερβολής: Αποδεικνύεται εύκολα ότι η εξίσωση της υπερβολής είναι: $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ όπου $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$

Οι εστίες έχουν συντεταγμένες $E_1(\gamma, 0)$, $E_2(-\gamma, 0)$

Τα σημεία $A_1(\alpha, 0)$ και $A_2(-\alpha, 0)$ που η υπερβολή τέμνει τον πρωτεύοντα άξονα ονομάζονται <u>κορυφές</u>.

Το ευθύγραμμο τμήμα $AA = 2\alpha$ ονομάζεται <u>άξονας</u> της υπερβολής

Στο επίπεδο μπορούμε να ορίσουμε δύο σημεία $B_1(0,\beta)$ και $B_2(0,-\beta)$ που δεν ανήκουν στην υπερβολή. Το μήκος $B_1B_2=2\beta$ ονομάζεται <u>μήκος του δευτερεύοντα άξονα</u> και το ευθύγραμμο τμήμα B_1B_2 <u>συζυγής άξονας</u>.

<u>ΟΡΙΣΜΟΙ</u>: Ι. <u>Εκκεντρότητα ε</u> της υπερβολής ονομάζουμε τον λόγο $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}$

Επειδή $\gamma>\alpha \Rightarrow \varepsilon>1$

ΙΙ <u>Διευθετούσες</u> δ_1, δ_2 της υπερβολής ονομάζονται οι ευθείες $\delta_1 \rightarrow x-\frac{\alpha}{\varepsilon}=0$ και $\delta_2 \rightarrow x+\frac{\alpha}{\varepsilon}=0$

Επειδή $\frac{\gamma}{\alpha}>1 \Rightarrow \frac{\alpha^2}{\gamma}<\alpha$ άρα οι διευθετούσες δ_1 και δ_2 δεν τέμνουν την υπερβολή.

ΙΙΙ. Η <u>εφαπτομένη</u> της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο της $P_0(x_0,y_0)$ έχει εξίσωση $\frac{x_0x}{\alpha}-\frac{y_0y}{\beta}=1$

IV. <u>Ασύμπτωτες</u> της υπερβολής ονομάζονται οι ευθείες $y=\pm\frac{\beta}{\alpha}x$.

V. <u>Συζυγείς</u> λέγονται οι υπερβολές με εξισώσεις $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{x^2}{\alpha^2}=1$

VI: <u>Ισοσκελής</u> λέγεται η υπερβολή $x^2-y^2=\alpha^2$.

<u>Παραδείγματα:</u>

1-5. Να γραφεί η εξίσωση της υπερβολής με εστιακή απόσταση 10 και απόσταση κορυφών 8.

<u>Λύση:</u>

Έχουμε $E_1E_2=10$ και $A_1A_2=8$, άρα $2\gamma=10$ και $2\alpha=8$

Επειδή στην υπερβολή έχουμε $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2=16$ και $\beta^2=9$

Άρα η εξίσωση θα είναι $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

146. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που διέρχεται από τα σημεία $A\left(5, \frac{9}{2}\right)$ και $B\left(\frac{20}{3}, 8\right)$.

Λύση:

Εστω $c \longrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ (1)

η ζητουμένη εξίσωση της υπερβολής.

Επειδή το σημείο $A \in c$ θα έχουμε: $\frac{25}{\alpha^2} - \frac{\frac{81}{4}}{\beta^2} = 1$ (2)

και επειδή $B \in c$ θα έχουμε $\frac{\frac{400}{9}}{\alpha^2} - \frac{64}{\beta^2} = 1$ (3)

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (2) και (3) βρίσκουμε

$\alpha^2 = 16$, $\beta^2 = 36$

Άρα από την (1) έχουμε

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$$

147. Να γραφεί η εξίσωση της υπερβολής με μήκος πρωτεύοντα άξονα 6 που να διέρχεται από το σημείο $A(9, -4)$.

Λύση:

Εστω $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ η εξίσωση της υπερβολής.

Εχουμε $2\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 3$ άρα η εξίσωση γράφεται $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\beta} = 1$

Επειδή όμως η υπερβολή διερχεται απο το σημείο $A(9, -4)$ θα έχουμε $\frac{9^2}{9} - \frac{16}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \beta^2 = 2$ οπότε η υπερβολή θα είναι:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{2} = 1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

148. Να βρεθεί η τομή της ευθείας $2x - y + 1 = 0$ με την υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

149. Η εκκεντρότητα μιας υπερβολής είναι $\varepsilon = 2$ και μία από τις εστίες της $E(12, 0)$. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου M της υπερβολής με τετμημένη $x = 13$ από την διευθετούσα που αντιστοιχεί στη δεδομένη εστία

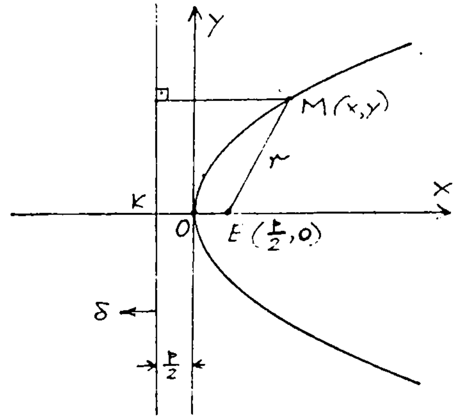
4.13. Η παραβολή

<u>Παραβολή</u> καλείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου πού η απόσταση τους από μία σταθερή ευθεία είναι ίση μέ την απόσταση τους από ένα δεδομένο σημείο. Δηλαδή

$$d(M,\delta)=d(M,E)$$

Η σταθερή ευθεία ονομάζεται <u>διευθετούσα</u> της παραβολής και το δεδομένο σημείο E εστία της παραβολής

Η απόσταση $EK=p$ της εστίας από την διευθετούσα ονομάζεται <u>παράμετρος</u> της παραβολής



Εξίσωση παραβολής:

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της παραβολής είναι: $y^2=2px$.

Άξονα των x θεωρούμε την κάθετη από την εστία στην διευθετούσα.

Άξονα των y θεωρούμε την μεσοκάθετη του τμήματος KE

Η εστία έχει συντεταγμένες $\frac{p}{2}, 0$ δηλαδή $E\left(\frac{p}{2},0\right)$

Η διευθετούσα δ έχει εξίσωση $\delta \rightarrow x+\frac{p}{2}=0$.

Το σημείο που η παραβολή τέμνει τον άξονα των x ονομάζεται <u>κορυφή</u> της παραβολής.

Ο άξονας των x λέγεται *άξονας* της παραβολής

Η απόσταση r κάθε σημείου M της παραβολής από την εστία της ονομάζεται <u>εστιακή ακτίνα</u> Είναι $r=\frac{p}{2}+x$ (όταν η παραβολή έχει εξίσωση $y^2=2px$.

Η <u>εφαπτομένη</u> της παραβολής $y^2=2px$ στο σημείο της $P_0(x_0,y_0)$ έχει εξίσωση: $y_0 y=p(x+x_0)$. Άρα και η κάθετη της ίδιας παραβολής στό ίδιο σημείο έχει εξίσωση $y-y_0=-\frac{y_0}{p}(x-x_0)$.

Παραδείγματα:

150. Στην παραβολή $y^2 = 16x$ να βρεθούν τα σημεία που έχουν εστιακή απόσταση $r = 13$

Λύση:

Από την $y^2 = 16x \Rightarrow y^2 = 2 \cdot 8x \Rightarrow p = 8$

Από τον τύπο $r = \frac{p}{2} + x \Rightarrow x = r - \frac{p}{2} \Rightarrow x = 13 - \frac{8}{2} = 9$

Θέτοντας τώρα $x = 9$ στην $y^2 = 16x$ παίρνουμε

$(9, 12)$, $(9, -12)$

151. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο $E(5,0)$ και διευθετούσα τον άξονα των τεταγμένων

Λύση:

Εάν $M(x,y)$ τυχόν σημείο της παραβολής, εκ του ορισμού της έχουμε

$$d(M,E) = d(M, Oy) \Rightarrow$$
$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = |x|$$
$$\Rightarrow y^2 = 10x - 25$$

152. Να βρεθεί το σημείο επαφής της ευθείας $\varepsilon \rightarrow x + 3y + 9 = 0$ και της παραβολής $y^2 = 4x$

Λύση:

Η εφαπτομένη ε_1 της παραβολής $y^2 = 4x = 2 \cdot 2x$ στο σημείο της $P_0(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση $\varepsilon_1 \rightarrow yy_0 = 2(x + x_0) \rightarrow \varepsilon_1 \rightarrow 2x - yy_0 + 2x_0 = 0$

Αλλά οι ε και ε_1 ως εφαπτόμενες στο σημείο P_0 της παραβολής, ταυτίζονται

Άρα πρέπει $\frac{2}{1} = \frac{-y_0}{3} = \frac{2x_0}{9} \Rightarrow (x_0, y_0) = (9, -6)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

153. Ποιά είναι η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 12x$, κάθετη στην ευθεία $2x + y - 7 = 0$.

154. Να γραφούν οι εφαπτόμενες της παραβολής $y^2 = 8x$ που διέρχονται από το σημείο $P(5, -7)$

4.14 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΨΕΩΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ ΣΤΗΝ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ.

Οι πολικές συντεταγμένες της ελλείψεως και της υπερβολής με πόλο του συστήματος αναφοράς το κέντρο της κωνικής, είναι:

$$\text{Έλλειψη:} \quad \rho^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \text{συν}^2\phi}$$

$$\text{Υπερβολή:} \quad \rho^2 = \frac{b^2}{\varepsilon^2 \text{συν}^2\phi - 1}$$

Οι εξισώσεις αυτές χρησιμοποιήθηκαν από τον Κέπλερ, μετά την διατύπωση απ' αυτόν του πρώτου, υπό το όνομά του Νόμου, στην Αστρονομία. Ο πρώτος αυτός Νόμος του Κέπλερ μας λέει ότι οι τροχιές των πλανητών είναι ελλείψεις των οποίων την μία εστία κατέχει ο Ήλιος.

Μπορούμε λοιπόν να θεωρούμε σαν (πολικές) συντεταγμένες της θέσεως ενός πλανήτη, κατά μία χρονική στιγμή, την απόστασή του από τον Ήλιο και την γωνία που αντιστοιχεί στην θέση αυτή, της πολικής ακτίνας με τον πρωτεύοντα άξονα της ελλειπτικής τροχιάς του πλανήτη.

5. ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Οι γραφικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται συχνά στις εφαρμοσμένες επιστήμες και στα οικονομικά για να παρουσιάσουν στατιστικές πληροφορίες με τέτοιο τρόπο, ώστε η μεταβολή των τιμών μιας ποσότητας που εξαρτάται από την μεταβολή των τιμών μιάς άλλης ποσότητας, να μπορεί να φανεί με μία ματιά.

Η ακρίβεια των γραφικών μεθόδων υπολογισμού είναι περιωρισμένη. Η εποπτικότητα όμως και η σαφήνειά της είναι μεγάλη.

Χρησιμοποιείται συνήθως το τετραγωνισμένο χαρτί όπου οι οριζόντιες γραμμές καλούνται "τετμημένες" και οι κατακόρυφες "τεταγμένες".

Όταν έχουν υπολογισθεί διάφορες διαδοχικές τιμές και έχουν καταγραφεί τα αποτελέσματα υπό μορφή σημείων (κουκίδων) πάνω στο τετραγωνισμένο χαρτί, η γραμμή πού άγεται από σημείου σε σημείο (από τα οποία μπορούν να διαβασθούν αμέσως οι τιμές εκείνων που υπολογίστηκαν) ονομάζεται <u>γράφημα</u>.

Όταν η τιμή μιάς μεταβλητής ποσότητας μεταβάλλεται σε άμεση αναλογία με την άλλη, το γράφημα είναι ευθεία γραμμή.

ΓΡΑΦΗΜΑ I

Να κατασκευασθεί ένα γράφημα που να συνδέει ταχύτητα και απόσταση ανά 24 ώρες.

α΄. Από το σημείο O και την κάτω αριστερή γωνία του χαρτιού, αριθμούμε τα τετράγωνα οριζοντίως από αριστερά πρός τα δεξιά, προκειμένου να παριστάνονται αποστάσεις.

β΄. Αριθμούμε τα κατακόρυφα τετράγωνα προς τα πάνω, αρχίζοντας από το O, σε κόμβους.

γ΄. Διαλέγουμε μία ταχύτητα έστω 10 κόμβων, μετά 10 κομβ × 24 ώρες = 240 μίλια ανά ημέρα.

δ. Βρίσκουμε 240 μίλια στην κλίμακα αποστάσεων και διατρέχουμε την κατακόρυφη γραμμή μέχρι να τμήσει την οριζόντια γραμμή την διερχομένη δια των 10 κόμβων. Σημειώνουμε και ενώνουμε το σημείο αυτό με το σημείο μηδέν και το υπογραμμίζουμε εντονώτερα.

Η ευθεία αυτή είναι τό ζητούμενο γράφημα.

Ανάγνωση του γραφήματος:

Ερώτηση 1η: Η ταχύτητα ενός πλοίου κυμαίνεται στους 11,4 κόμβους. Ζητείται η απόσταση που διανύει την ημέρα.

Βρίσκουμε 11,4 κόμβους στην κατακόρυφη κλίμακα και διατρέχουμε την αντίστοιχη οριζόντια γραμμή μέχρις ότου τμήσει το γράφημα. Στο σημείο τομής παρατηρούμε πάνω και κάτω την αντίστοιχη κατακόρυφη γραμμή και διαβάζουμε την απόσταση στην οριζόντια κλίμακα.

Απάντηση: 274 μίλια.

Ερώτηση 2η: Η μέση διανυομένη απόσταση ενός πλοίου το 24ωρο είναι 160 μίλια. Ζητείται η μέση ταχύτητά του.

Βρίσκουμε 160 μίλια στην κλίμακα αποστάσεων και διατρέχουμε την κατακόρυφη γραμμή προς τα πάνω μέχρι το γράφημα. Έπειτα παρατηρούμε αριστερά του σημείου τομής κατά μήκος της οριζόντιας γραμμής που διέρχεται από αυτό και διαβάζουμε την ταχύτητα στην κατακόρυφη κλίμακα.

Απάντηση: 6,6 κόμβοι.

Τό γράφημα αυτό είναι απλώς ένας τυποποιημένος υπολογισμός, αλλά ταυτόχρονα δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι σαν γραφική παράσταση γενικώς δεν είναι τόσο ακριβής όπως αναφέραμε και πιό πάνω.

ΓΡΑΦΗΜΑ ΙΙ.

Το γράφημα αυτό είναι παρόμοιο με το Ι και συνδέει ταχύτητα-χρόνο.

Η τετμημένη ή οριζόντια κλίμακα παριστά ταχύτητα σε κόμβους και η τεταγμένη ή κατακόρυφη κλίμακα, λεπτά της ώρας μέχρι 1 ώρα. Οι διαγώνιες γραμμές που διασκορπίζονται από το σημείο 0 παριστούν διαδοχικά γραφήματα για ταχύτητες από 6 έως 10 κόμβους.

Τα γραφήματα αυτά έχουν κατασκευασθεί ως εξής:

Το σημείο τομής π.χ. της κατακόρυφης που διέρχεται από το 6 (ταχύτητα 6 κόμβοι) και της οριζόντιας που διέρχεται από το 60 (χρόνος 60 λεπτά), έχει ενωθεί με το 0. Η γραμμή αυτή είναι το γράφημα των 6κόμβων.

Ερώτηση 1η: Ένα πλοίο έχει ταχύτητα 6 κόμβων. Να υπολογισθεί η απόσταση που καλύπτει σε 40 λεπτά.

Βρίσκουμε τα 40 λεπτά στην κατακόρυφη κλίμακα και διατρέχουμε την οριζόντια γραμμή έως ότου τμήσει το γράφημα. Μετά άγουμε την κατακόρυφη γραμμή και διαβάζουμε την απόσταση.

Απάντηση: 4 μίλια

Ερώτηση 2η: Ένα πλοίο διανύει 6,2 μίλια σε 37 λεπτά. Να υπολογισθεί η ταχύτητά του.

Βρίσκουμε 6,2 μίλια στην οριζόντια κλίμακα και 37 λεπτά στην κατακόρυφη κλίμακα. Οι αντίστοιχες κάθετες στις κλίμακες αυτές που άγονται από αυτά τα σημεία, τέμνονται στο γράφημα των 10 κόμβων.

Απάντηση: Ταχύτητα 10 κόμβοι.

Ερώτηση 3η: Δύο πλοία ξεκινούν συγχρόνως με την ίδια πορεία, το ένα με ταχύτητα 6 κόμβων, το άλλο με 9 κόμβους. Πόσο θα απομακρυνθούν μέσα σε 40 λεπτά;

Βρίσκουμε τα 40 λεπτά στην κατακόρυφη κλίμακα και σημειώνουμε πού αυτή τέμνει το γράφημα των 6 κόμβων και πού των 9 κόμβων.

Μετά μετρούμε οριζοντίως τον αριθμό των τετραγωνιδίων που ορίζουν τα δύο σημεία τομής. Διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν δύο τέτοια τετράγωνα.

Απάντηση: Η απόσταση των δύο πλοίων είναι 2 μίλια.

ΓΡΑΦΗΜΑ III.

Η Στατιστική μας προσφέρει ενδιαφέροντα στοιχεία γιά την δημιουργία γραφικών παραστάσεων. Το γράφημα III κατασκευάστηκε από πληροφορίες πού μας δίδονται από τις εξετάσεις των υποψηφίων για απόκτηση πτυχίων ειδικοτήτων των Πλοιάρχων του Εμπορικού Ναυτικού.

Η τετμημένη παριστά τα έτη 1960-68 και η τεταγμένη τον αριθμό των πτυχίων που εδόθησαν. Η συνεχής γραμμή είναι το γράφημα των πτυχίων Πλοιάρχων Α', η διακεκομένη γραμμή, το γράφημα των Πλοιάρχων Β' και η διπλά διακεκομένη γραμμή το γράφημα για τους Γ' Πλοιάρχους.

Ζητείται να υπολογισθεί ο κατά προσέγγιση αριθμός των διπλωμάτων των Α' Πλοιάρχων, Β' Πλοιάρχων, Γ' Πλοιάρχων που εδόθησαν το έτος 1.963.

Μία τυχαία ματιά στα 3 γραφήματα μας, δείχνει ότι το 1.963 είχαμε μία περίπου σύμπτωση του αριθμού των χορηγηθέντων διπλωμάτων Α' και Β' Πλοιάρχων, ενώ το ίδιο έτος χορηγήθηκε ο μεγαλύτερος αριθμός διπλωμάτων Γ' τάξεως. Επίσης παρατηρούμε ότι κατά το έτος 1968 είχαμε μία προσεγγιστική ισότητα δοθέντων διπλωμάτων και των τριών τάξεων, απ' ότι οποιοδήποτε άλλο έτος.

ΓΡΑΦΗΜΑ IV

Το γράφημα IV μας δείχνει τις διακυμάνσεις ανά μήνα για μία περίοδο ετών στο φορτίο ανά τόνο για την μεταφορά κάρβουνου από το Κάρντιφ στην Ρουέν, στην Γένοβα και στο Ράιβερ. Η κατακόρυφος κλίμακα παριστά σελίνια ανά τόνο και η οριζόντια κλίμακα τους μήνες του έτους. Οι σταυροί από τον Μάιο ως τον Νοέμβριο 1.966 καλύπτουν την περίοδο μιας πολύχρονης απεργίας των ανθρακωρύχων όταν δεν παρήγετο καθόλου κάρβουνο.

ΓΡΑΦΗΜΑ V

Το γράφημα αυτό επεξηγεί την αναλογία μεταξύ των κλιμάκων των θερμομέτρων Φαρενάιτ και Κελσίου. Πρέπει να θυμόμαστε ότι τα δύο σταθερά σημεία μιας θερμομετρικής κλίμακας είναι το σημείο πήξεως και το σημείο βρασμού. Το διάστημα μεταξύ αυτών των σημείων στον θερμομετρικό σωλήνα, διαιρείται σε 180 ίσα μέρη στην κλίμακα Φαρενάιτ και οι υποδιαιρέσεις αριθμούνται από 32 έως 212, ενώ το θερμόμετρο Κελσίου διαιρείται σε 100 ίσα μέρη από 0 έως 100. Η αναλογία μεταξύ των δύο κλιμάκων είναι ως εκ τούτου η εξής: Στο 180 αντιστοιχούν 100 ή στο 9 το 5, άρα μία υποδιαίρεση Φαρενάιτ θα αντιστοιχεί σε μία υποδιαίρεση Κελσίου ίση με $\frac{9}{5}C+32$.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η ανάγνωση Φαρενάιτ που αντιστοιχεί σε 35° Κελσίου.

$\text{Φαρ.} = \frac{9}{5}\times 35+32 = 63+25=95$. Έτσι σε τετραγωνισμένο χαρτί, η τετμημένη του οποίου είναι οι αναγνώσεις Κελσίου και η τεταγμένη αναγνώσεις Φαρενάιτ, από την ένδειξη 95 της κλίμακας Φαρενάιτ, άγω την οριζόντια γραμμή έως ότου συναντήσει την κατακόρυφη την αγομένη πρός τα κάτω, από την ένδειξη 35 της κλίμακας Κελσίου.

Το σημείο τομής το ενώνουμε με το 32 της κλίμακας Φαρενάιτ. Η ευθεία γραμμή είναι το ζητούμενο γράφημα.

Ερώτηση 1η: Να μετατραπούν 82° Φαρενάιτ σε Κελσίου.

Βρίσκω 82 στην κλίμακα Φάρενάιτ, άγω εξ αυτού την οριζόντια γραμμή έως ότου συναντήσει το γράφημα και διατρέχω μετά, άνω ή κάτω την κατακορύφα γραμμή και διαβάζω στην κλίμακα Κελσίου.

Απάντηση: 28° Κελσίου.

Ερώτηση 2η: Μετατροπή 20° C σε Φαρενάιτ.

Βρίσκω 20 στην κλίμακα Κελσίου, διατρέχω άνω την κατακόρυφη γραμμή του γραφήματος, έπειτα κατά μήκος της οριζόντιας γραμμής αριστερά και διαβάζω στην κλίμακα Φαρενάιτ.

Απάντηση: 68° Φαρενάιτ.

ΓΡΑΦΗΜΑ VI

Οι αναγνώσεις από συσκευές καταγραφής καιρού, παριστάνονται ελεύθερα από γραφήματα. Τα πιό γνωστά είναι αυτά που τα ίχνη τους σημειώνονται με την πένα ενός βαρογράφου συνδεδεμένου με το χαρτί πού είναι τυλιγμένο γύρω από περιστρεφόμενο τύμπανο.

Ένα ρολόι εντός του τυμπάνου περιστρέφει τον κύλινδρο περί κατακόρυφο άξονα με ισοταχή περιστροφή. Η πένα είναι τοποθετημένη σε ένα μοχλό που ενεργοποιείται από την κίνηση μεταλλικών κυτίων εν μέρει χωρίς αέρα, οι πλευρές των οποίων κινούνται ανάλογα με τις αυξομειώσεις της πιέσεως της ατμοσφαίρας. Στο γράφημα αυτό δίδονται οι τυπικές βαρομετρικές ενδείξεις μιάς ατμοσφαιρικής υφέσεως που διέρχεται από περιοχές που βρίσκονται σε ανώτερα βόρεια πλάτη.

Η τετμημένη διαιρείται σε ωριαίες περιόδους για μιά ημέρα από μεσάνυχτα σε μεσάνυχτα και η τεταγμένη σε βαρομετρικές ενδείξεις.

Η αριστερή πλευρά δίνει τις ίντσες υδραργύρου και η δεξιά πλευρά ανάλογες μονάδες πιέσεως που ονομάζονται μιλιμπάρ.

Τα βέλη σε κατά μήκος διαστήματα του βαρομετρικού γραφήματος δείχνουν την κατεύθυνση του ανέμου και ο αριθμός των γραμμών του πίσω μέρους του βέλους δείχνει την δύναμή του (του ανέμου). 4 γραμμές-βέλους δείχνουν ένα μέτριο αεράκι, 8 γραμμές-βέλους έναν άνεμο καταιγίδας πού έχει ταχύτητα 40 μιλ/ώρα, κλπ.

Τα μικρά γράμματα στα βέλη του ανέμου είναι από την κλίμακα Μποφώρ που περιγράφουν την κατάσταση του ουρανού. d σημαίνει ψιχάλα, r βροχή, q λαίλαπα, o ουρανός νεφελώδης, c με μονωμένα νέφη, p τοπική καταιγίδα, και b ουρανός γαλάζιος, που όλα αυτά εξασφαλίζουν οικονομία γραφήματος και προσφέρουν με μία ματιά, όλες τις πληροφορίες που αφορούν τον άνεμο και τον καιρό, σε δεδομένη στιγμή.

Το γράφημα αυτό και οι πληροφορίες για τον καιρό, συνδυαζόμενες με αυτό, διαβάζονται ως εξής:

Το βαρόμετρο έχει πέσει από 29,7 ίντσες τα μεσάνυχτα, σε 29,0 ίντσες στις 2μμ. και μετά ανέβηκε στις 29,3 ίντσες τα επόμενα μεσάνυχτα. Ο άνεμος εν τω μεταξύ έχει αλλάξει από νότιο ανατολικό, δυνάμεως 4, σε δυνατό νοτιοδυτικό άνεμο δυνάμεως 7 στις 8 π.μ., έπειτα σε νότιο δυνάμεως 8 το μεσημέρι, μετά απ' αυτό έχει ανέβει σε βόρειο δυτικό ακόμη με δύναμη καταιγίδας, ανεβαίνει και άλλο βόρεια και μειώνεται σε δύναμη με αντίστοιχη αύξηση βαρομετρικών. Ο ουρανός κατά την διάρκεια της περιόδου αυτής έχει αλλάξει, από ψιχάλα σε λαίλαπα βροχής, σε νεφελώδη, σε βροχή και λαίλαπα το μεσημέρι και μετά σε μεμονωμένα σύννεφα και τοπικές καταιγίδες, όταν ο άνεμος γυρίσει σε βόρειο-δυτικό.

Το γράφημα αυτό χαράσσεται από πληροφορίες οι οποίες μπορούν να καταγραφούν σε ένα ημερολόγιο πλοίου όπως φαίνεται παρακάτω:

ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΟ ΠΛΟΙΟΥ

Χρόνος	Βαρόμετρο Ιντσες	Βαρόμετρο Μιλιμπαρς	Άνεμος	Δύναμη	Ουρανός
Μεσάνυχτα	29.70	1005.7	S.E	4	Ψιχάλα
4 π.μ.	29.53	1000.0	S.S.W	5	Βροχοπτώσεις
8 π.μ.	29.22	989.2	S.W	7	Νεφ.Τοπ.Βροχ.
Μεσημέρι	29.03	983.0	W.	8	Νεφ. Βροχή
4 μ.μ.	29.02	982.7	N.W	8	Συνεφ.παρ.Βρχ
8 μ.μ.	29.12	986.0	N.N.W	5	" " "
Μεσάνυχτα	29.30	992.2	N.N.W	4	Γαλανός

ΓΡΑΦΗΜΑ VII

Το γράφημα αυτό είναι μία επεξήγηση του πως συνδέεται η κατανάλωση καυσίμων, η ταχύτητα και η απόσταση, όπως προκύπτει από τις δοκιμές πλεύσεως ενός πλοίου. Η καμπύλη παριστά ένα τόνο καυσίμου. Οι τετμημένες παριστάνουν ταχύτητα σε κόμβους και οι τεταγμένες την απόσταση που διανύεται όταν καταναλώνει ένα τόνο καυσίμου. Σημειώνεται ότι στην οριζόντια κλίμακα αντιστοιχούν 5 τετράγωνα στον κόμβο και στην κατακόρυφο κλίμακα 2 τετράγωνα στο μίλι. Με μία ταχύτητα 7 κόμβων, το πλοίο μπορεί να προχωρήσει 25½ μίλια με 1 τόνο καυσίμου. Πράγματι, βρίσκουμε 7 κόμβους στον άξονα των τετμημένων, άγουμε την κατακόρυφο προς τα πάνω μέχρι να τμήσει την καμπύλη και από το σημείο τομής άγουμε την οριζόντια που τέμνει την τεταγμένη στα 25½ μίλια.

Στους 10 κόμβους η απόσταση που καλύπτει είναι 19 μίλια, στους 12 κόμβους η απόσταση είναι 15 ¼ μίλια. Στους 11 κόμβους η απόσταση είναι περίπου 12 ¼ μίλια σε μιά κατανάλωση 1 τόνου καυσίμου.

Το γράφημα απαντά τυχαίως, στην ερώτηση για μιά οικονομική ταχύτητα ενός πλοίου συνδέοντας την κατανάλωση ενεργειας, την ταχύτητα και την απόσταση. Οταν η ταχύτητα είναι 10 κόμβοι, 1 τόνος καυσίμου δίνει την δυνατότητα στο εν λόγω πλοίο να κάνει 19 μίλια, αλλά όταν η ταχύτητα μειώνεται στους 7 κόμβους, τότε 1 τόνος καυσίμου καθιστά αυτό ικανό να κάνει 25½ μίλια κάτω από τις ίδιες συνθήκες ανέμου και καιρού, πράγμα χρήσιμο να το γνωρίζουμε στην περίπτωση που μας τελειώνουν τα καύσιμα.

ΓΡΑΦΗΜΑ VIII

Οι ναυπηγοί χρησιμοποιούν πολλές φορές διάφορες καμπύλες και γραφήματα από τα οποία μπορούν να συνδυασθούν διάφορα επίπεδα, θέσεις κέντρων βάρους και αντώσεως και λοιπά μεταβλητά στοιχεία. Το γράφημα αυτό είναι μία καμπύλη εκτοπίσματος. Η χωρητικότητα εκτοπίσματος ενός πλοίου είναι το βάρος του όγκου του ύδατος που αυτό εκτοπίζεται στο μέσο βύθισμά του. Η τετμημένη διαιρείται σε τόνους και η τεταγμένη σε κλίμακα βυθίσματος σε πόδια. Η εκτόπιση σε τόνους για διάφορα βυθίσματα σχεδιάζεται μέσω των σημείων. Από αυτήν την καμπύλη εκτοπίσματος παρατηρούμε ότι στο άφορτο βύθισμα των 11 ποδιών, το βάρος του πλοίου είναι 1.200 τόνοι. Όταν λοιπόν δεν υπάρχει φορτίο στο πλοίο, αυτό αντιπροσωπεύει το βάρος του κύτους, των μηχανημάτων και του εξοπλισμού.

Ακολουθώντας τις διακεκομένες γραμμές στο σχήμα παρατηρούμε στα παρακάτω παραδείγματα ότι:

στα 13 πόδια βυθίσματος το εκτόπισμα είναι 1.450 τόνοι
» 14 » » » » » 1.590 »
» 16 » » » » » 1.880 »

Ερώτηση 1η: Πόσοι τόνοι βάρους απαιτούνται για να αυξήσουν το βύθισμα του πλοίου από 13 πόδια στα 16 πόδια και 9 ίντσες;

Στα 13 πόδια	το εκτόπισμα	είναι	1.450 τόνοι
» 16 και 9 ίντσες	»	»	2.000 »
		Διαφορά	550 »

Απάντηση: 550 τόνοι.

Ερώτηση 2η: Το βύθισμα του πλοίου είναι 14 πόδια. Πρόκειται να φορτωθεί σ' αυτό βάρος 250 τόνων φορτίου. Ποιό θα είναι το νέο βύθισμα;

Στα 14 πόδια βυθίσματος το εκτόπισμα είναι	1.590 τόνοι
Βάρος που πρέπει να φορτωθεί	250 τόνοι
Νέο εκτόπισμα	1.840 τόνοι

Απάντηση: Νέο βύθισμα 15 πόδια και 9 ίντσες

ΓΡΑΦΗΜΑ IX

Μία καμπύλη σε τόνους ανά ίντσα βυθίσματος (T.P.I.) είναι χρήσιμη επί του πλοίου. Η καμπύλη είναι εφαρμόσιμη μόνο για τάδε πλοίο ξεχωριστά εκτός βεβαίως, τις περιπτώσεις που τα πλοία είναι σχεδόν όμοια σε σχήμα και διαστάσεις.

Η τετμημένη είναι μία κλίμακα που παριστά τον αριθμό των τόνων που πρέπει να τοποθετηθούν επί του πλοίου ή να αφαιρεθούν από το πλοίο για να αλλάξει το μέσο βύθισμά του κατά 1 ίντσα. Η ποσότητα αυτή δεν είναι ίδια σε όλα τα βυθίσματα.

Η τεταγμένη είναι η κλίμακα μέσων βυθισμάτων σε πόδια.

Ερώτηση 1η: Ζητούνται οι τόνοι ανά ίντσα βυθίσματος σε ένα βύθισμα 24 ποδιών από την καμπύλη T. P. I.

Βρίσκουμε 24 πόδια στην κλίμακα βυθίσματος και άγουμε την οριζόντια γραμμή πρός τα δεξιά μέχρις ότου τμήσουμε την καμπύλη, μετά φέρουμε μία κατακόρυφη γραμμή άνωθεν του σημείου αυτού και διαβάζουμε από εκεί την κλίμακα των τόνων.

Απάντηση: 50 τόνοι.

Ερώτηση 2η: Ζητούνται οι τόνοι ανά ίντσα σε ένα βύθισμα 12ποδ.
Απάντηση : 42 τόνοι.

ΓΡΑΦΗΜΑ X

Μία καμπύλη ευσταθείας είναι αυτή που δείχνει γραφικώς τις σχετικές ροπές που ασκούνται στο πλοίο γιά να επανέλθει μόνο του σε μία θέση ισορροπίας όταν αυτό έχει εξαναγκασθεί να κλίνει από τον άνεμο ή από την θάλασσα.

Η ανάγνωση της καμπύλης αυτής αφορά σε μία γενική κατανόηση των αρχών της ευσταθείας, όταν δεν προτιθέμεθα να εισέλθουμε σε αυτή λεπτομερώς, αλλά μας αρκεί ένα σύντομο σημείωμα προς εξυπηρέτηση του σκοπού μας.

Στό γράφημα τα σκίτσα των κεκλιμένων πλοίων δείχνουν ένα σκάφος σε διαφορετικές γωνίες κλίσεως και σε κάθε περίπτωση το G παριστάνει το κέντρο βάρους του πλοίου που είναι μία σταθερή σχέση, εκτός εάν τα βάρη στο πλοίο αλλάζουν. Ολόκληρο το βάρος του πλοίου επενεργεί κατακόρυφα προς τα κάτω διερχόμενο διά του G (παριστάνεται δια του GW). Το B είναι το κέντρο ανώσεως του πλοίου και είναι το κέντρο του όγκου του εκτοπιζομένου ύδατος. Αλλάζει θέση ανάλογα με την αλλαγή της υπό το ύδωρ μορφής του πλοίου.

Η συνολική προς τα πάνω πίεση του ύδατος που ισούται με ολόκληρο το βάρος του πλοίου, επενεργεί κατακορύφως προς τα άνω δια του B στην κατεύθυνση BW. Η οριζόντια απόσταση GZ μεταξύ των δύο αντιθέτων κατακορύφων δυνάμεων καλείται μοχλός επαναφοράς. Οταν το GZ εξαφανίζεται, το πλοίο είναι σε ισορροπία και δεν δείχνει τάση κλίσεως πρός την μία πλευρά ή την άλλη. Οταν κλίνει βιαίως το GZ αυξάνει σε μήκος και ο δυναμικός μοχλός δημιουργείται, όπως φαίνεται στο σχήμα, όταν η προς τα κάτω δύναμη μέσω του G και η προς τα πάνω δύναμη μέσω του B υπερβαίνουν και οι δύο ένα μοχλοβραχίονα, καλούμενο "ζεύγος" που φέρνει το πλοίο σε μιά όρθια θέση. Αυτή η δύναμη εκφράζεται σε πόδια-τόνους.

Αν υποτεθεί ότι το βάρος του πλοίου είναι 5.000 τόνοι και το μήκος του GZ είναι 1 πόδι, τότε η ροπή επαναφοράς λέμε ότι είναι 5.000 πόδια-τόνοι που ισούται με τον συντελεστή στρέψεως των 5000 τόνων βάρους αιωρουμένων στην άκρη μιάς ράβδου μήκους 1 ποδιού ή βάρους 1 τόνου αιωρουμένου στην άκρη μιας ράβδου μήκους 5.000 ποδιών.

Στα διαδοχικά σχήματα Α, Β και Γ ο μοχλός επαναφοράς GZ αυξάνει προοδευτικώς και το πλοίο έχει μία αυξάνουσα τάση να επιστρέψει σε μία ορθή θέση.

Στο σχήμα Δ όμως το GZ έχει εξαφανισθεί, οπότε το πλοίο είναι σε μια ουδέτερη ισορροπία, δηλαδή αδρανεί και δεν μπορεί από μόνο του να επιστρέψει στην ορθια θέση.

Το σχήμα Ε δείχνει το πλοίο σε μιά θέση ασταθούς ισορροπίας, διότι βλέπουμε ότι η προς τα κάτω δια του G δύναμη και η προς τα πάνω δια του B δύναμη, συμβάλλουν στο να δημιουργηθεί μοχλός GZ ανατροπής του πλοίου.

Ίσως η σύντομη αυτή εξήγηση μπορεί να βοηθήσει τον σπουδαστή να διαβάσει έξυπνα την καμπύλη ευσταθείας που δείκνυται στο γράφημα X.

Η τετμημένη είναι μία κλίμακα βαθμών που παριστά γωνίες εγκαρσίας κλίσεως του πλοίου και η τεταγμένη είναι η κλίμακα ποδιών που αντιπροσωπεύει το μήκος του μοχλού επαναφοράς GZ.

<u>Ανάγνωση καμπύλης ευσταθείας:</u>

Το σχήμα Α παριστά το πλοίο κεκλιμένο σε γωνία 7°. Βρίσκουμε 7 στον άξονα των τετμημένων, φέρουμε την κατακόρυφη προς τα άνω που τέμνει την καμπύλη στο Α και εξ αυτού άγουμε μία οριζόντια γραμμή προς τα αριστερά και διαβάζουμε το μήκος της GZ από την κλίμακα. Ο μοχλός επαναφοράς είναι 5½ ίντσες ή 0,45 πόδια. Εαν το βάρος του πλοίου είναι 5.000 τόνοι, τότε η στρεπτική ισχύς που δημιουργείται από το πλοίο για να επανέλθει στην ορθή θέση είναι 5.000 τον. x 0,45 π.όδ = 2.250 πόδια-τόνοι.

Το σχήμα Β παριστά μία κλίση 26°. Το μήκος του GZ από την καμπύλη είναι 2,2 πόδια, η στρεπτική ισχύς θα είναι 5.000 τόν. × 2,2 πόδ. = = 11.000 πόδια-τόνοι.

Το σχήμα Γ παριστά μία κλίση 46°, το μήκος του GZ από την καμπύλη είναι περίπου 8,6 πόδια, η ροπή επαναφοράς θα είναι 5.000 τόν.× × 3,6 πόδ. = 18.000 πόδια-τόνοι.

Αυτή είναι η θέση μεγίστης προσπαθείας, επειδή αποδεικνύεται ότι όταν οι γωνίες κλίσεως αυξάνουν πέραν των 45°, το πλοίο καθίσταται πιο δύσκολο στο να επανέλθει στην ορθή θέση (όπως έχει αποδειχθεί από τα ελλατούμενα μήκη του μοχλού επαναφοράς) και σε μία γωνία περίπου πέραν των 78°, το πλοίο θα ανατραπεί εάν αφεθεί μόνο του.

ΓΡΑΦΗΜΑ XI

Το γράφημα αυτό μας προσφέρει ενδιαφέρουσες πληροφορίες από στατιστικές καταγραφές του Παγκοσμίου Στόλου δεξαμενοπλοίων της περιόδου 1965-81

Ερώτηση 1η: Ποιό έτος είχαμε τον μέγιστο αριθμό παραγγελιών δεξαμενοπλοίων;

Απάντηση: Τό έτος 1.973

Ερώτηση 2η: Πότε είχαμε τον μέγιστο αριθμό δεξαμενοπλοίων;

Απάντηση: Τον Οκτώβριο του 1.976

ΓΡΑΦΗΜΑ XII

Το γράφημα XII μας προσφέρει μία συγκριτική αντίληψη ανάμεσα στην Παγκόσμια Παραγωγή Πετρελαίου και την Κατανάλωση κατά τό έτος 1.9 1

Ερώτηση 1η: Η κατανάλωση πετρελαίου στις Η.Π.Α. είναι σύμφωνη με την παραγωγή;

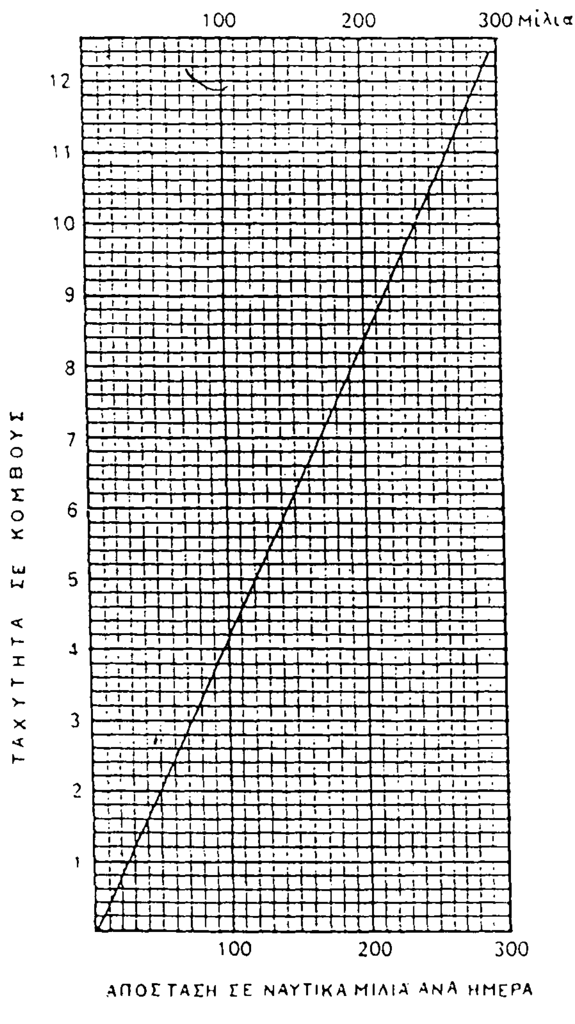
Απάντηση : Όχι. Οι Η.Π.Α. καταναλώνουν 250 εκατομμύρια τόνους περισσότερο απ' ότι παράγουν.

Ερώτηση 2η: Η κατανάλωση πετρελαίου στη Σοβιετική Ένωση είναι σύμφωνη με την παραγωγή;

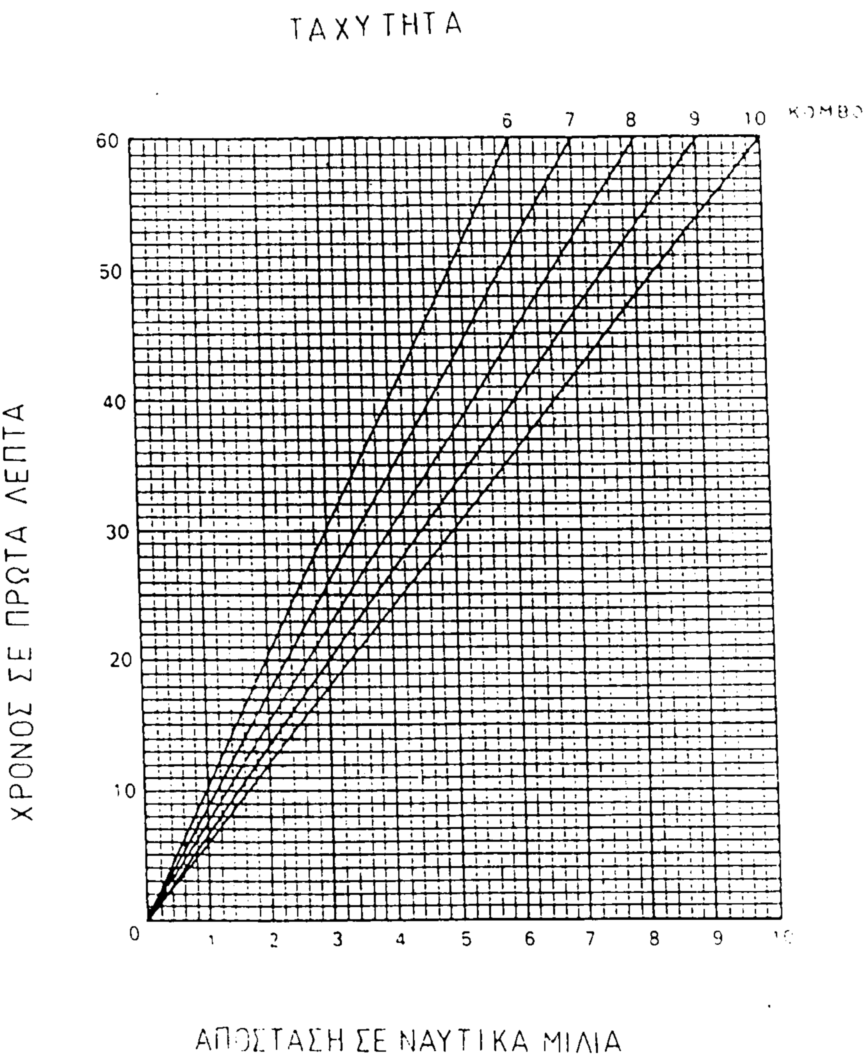
Απάντηση : Ναι. Η Σοβιετική Ένωση παράγει αρκετό πετρέλαιο για να ανταποκριθεί στην κατανάλωσή της και αυτής της Ανατ. Ευρώπης.

ΓΡΑΦΗΜΑ I

ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΚΑΙ ΑΠΟΣΤΑΣΗ



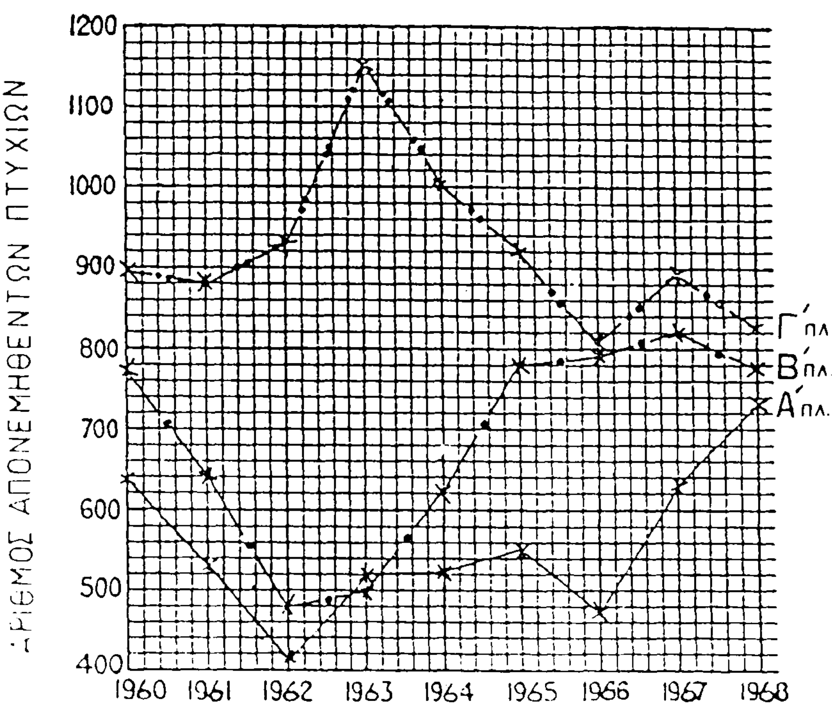
ΓΡΑΦΗΜΑ II


ΤΑΧΥΤΗΤΑ
6
7
8
9
10
ΚΟΜΒΟΙ
ΧΡΟΝΟΣ ΣΕ ΠΡΩΤΑ ΛΕΠΤΑ
60
50
40
30
20
10
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΕ ΝΑΥΤΙΚΑ ΜΙΛΙΑ

ΓΡΑΦΗΜΑ III

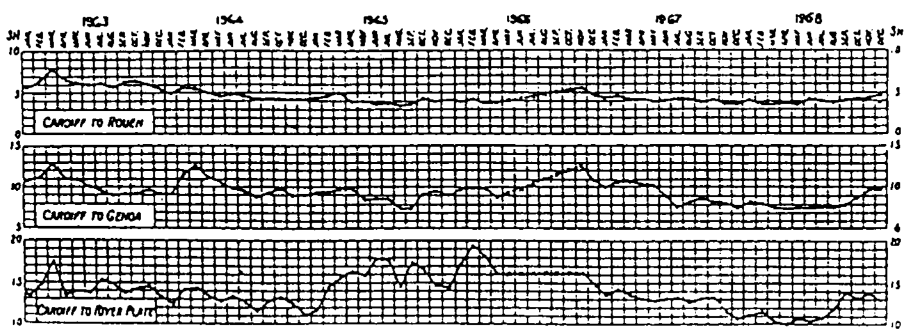
Στατιστικό Γράφημα

Απονομής Πτυχίων Ειδικοτήτων Πλοιάρχων



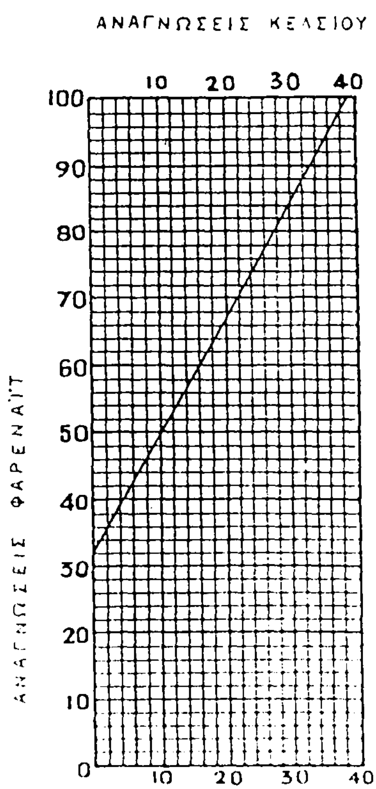
ΓΡΑΦΗΜΑ IV

Συγκριτικός Μέσος ΄Ορος Εξαγωγής
Φορτίων Κάρβουνου

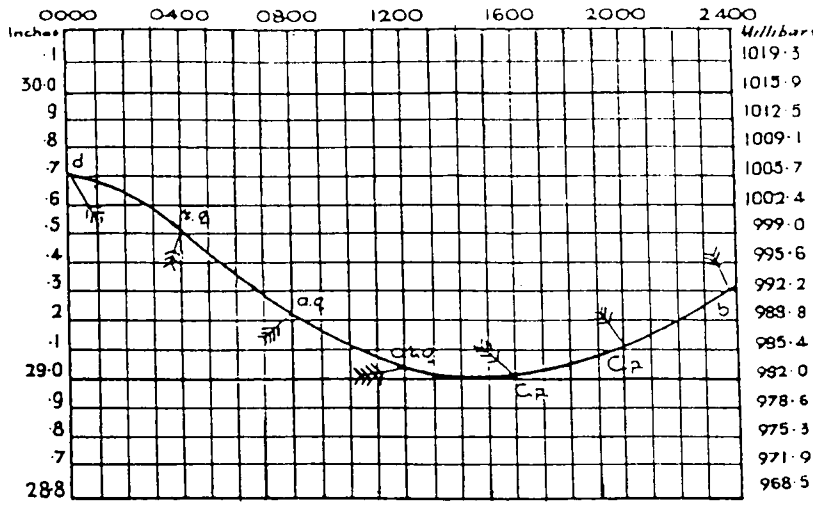


ΓΡΑΦΗΜΑ V

ΚΛΙΜΑΚΕΣ ΘΕΡΜΟΜΕΤΡΟΥ

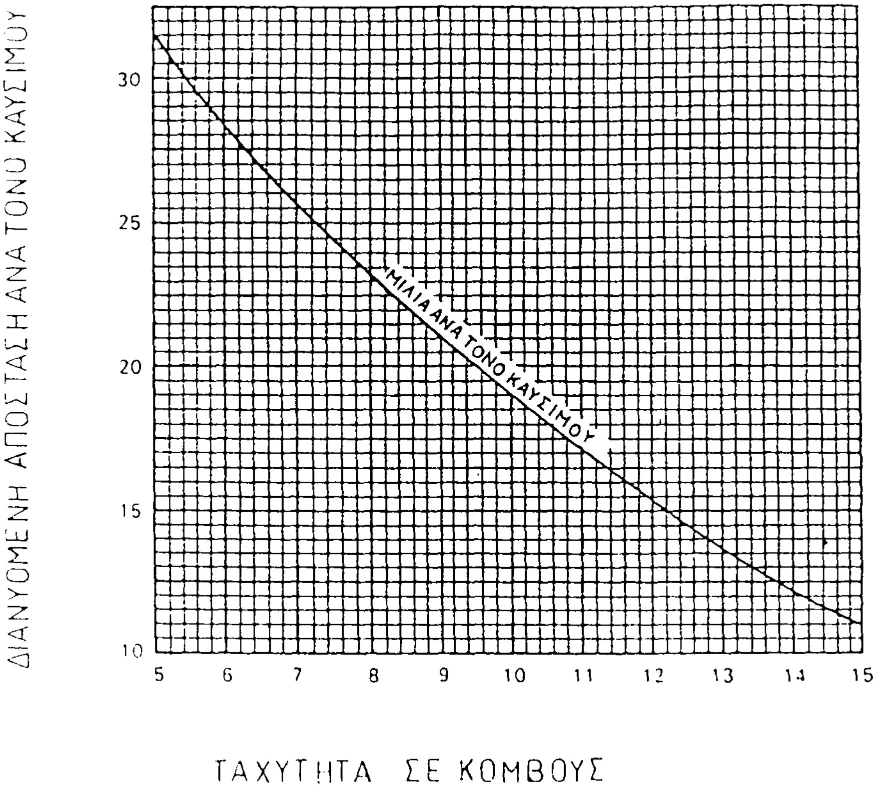


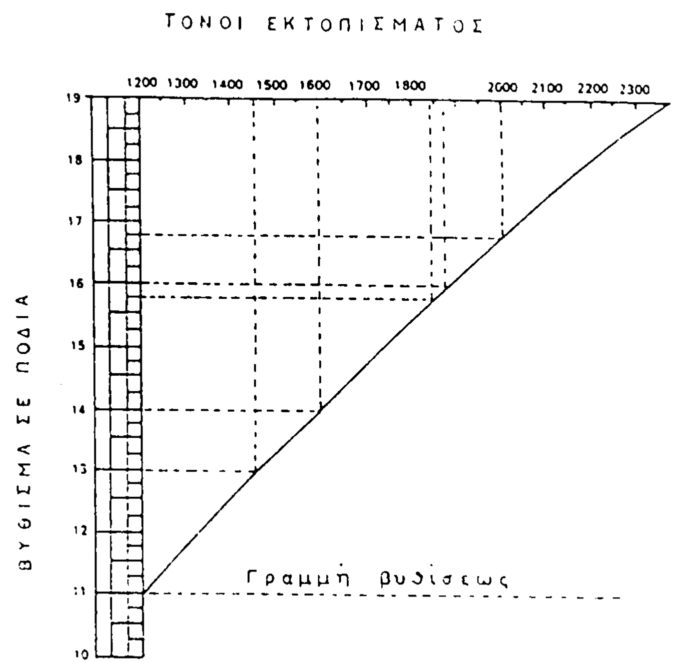
ΓΡΑΦΗΜΑ VI



ΒΑΡΟΜΕΤΡΟ ΑΝΕΜΟΥ & ΚΑΙΡΟΥ

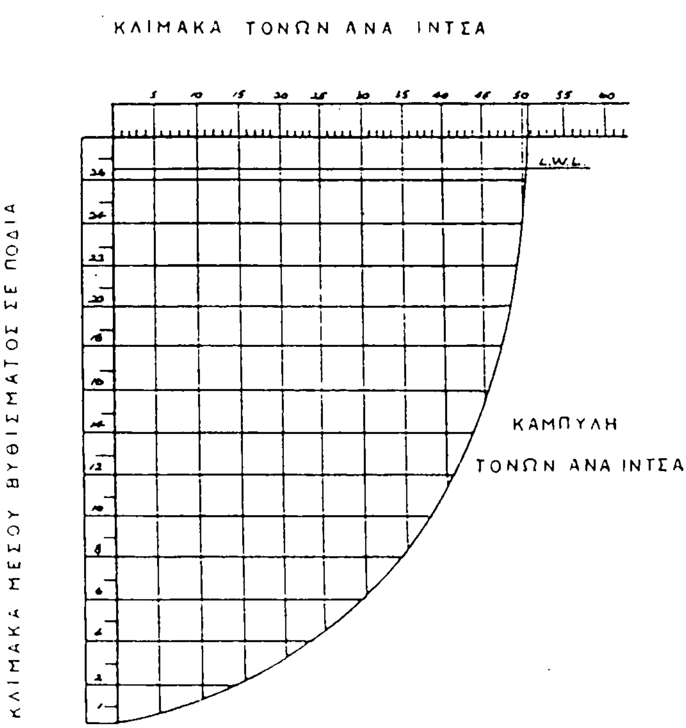
ΓΡΑΦΗΜΑ VIII



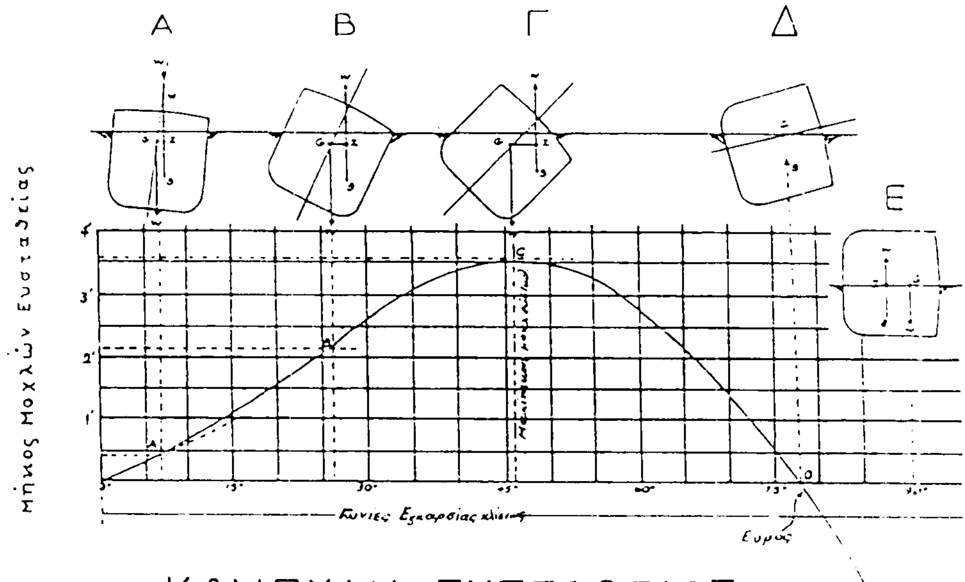


ΤΟΝΟΙ ΕΚΤΟΠΙΣΜΑΤΟΣ
1200 1300 1400 1500 1600 1700 1800 2000 2100 2200 2300
ΒΥΘΙΣΜΑ ΣΕ ΠΟΔΙΑ
19 18 17 16 15 14 13 12 11 10
Γραμμή βυθίσεως

ΓΡΑΦΗΜΑ IX


ΚΛΙΜΑΚΑ ΤΟΝΩΝ ΑΝΑ ΙΝΤΣΑ
L.W.L.
ΚΛΙΜΑΚΑ ΜΕΣΟΥ ΒΥΘΙΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΠΟΔΙΑ
ΚΑΜΠΥΛΗ
ΤΟΝΩΝ ΑΝΑ ΙΝΤΣΑ

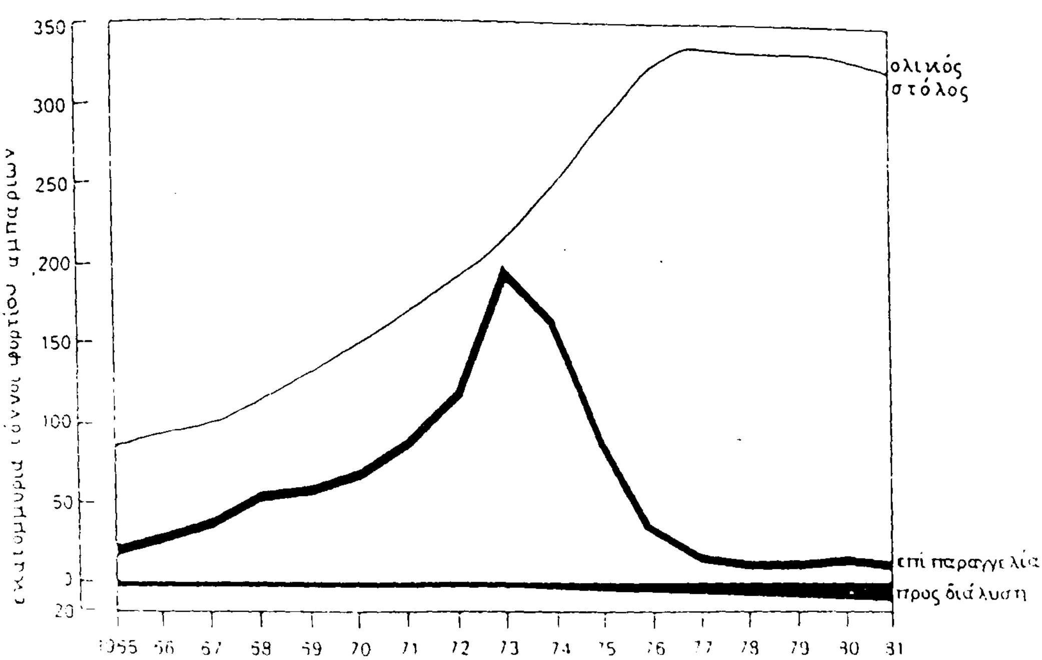
ΓΡΑΦΗΜΑ X



ΚΑΜΠΥΛΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

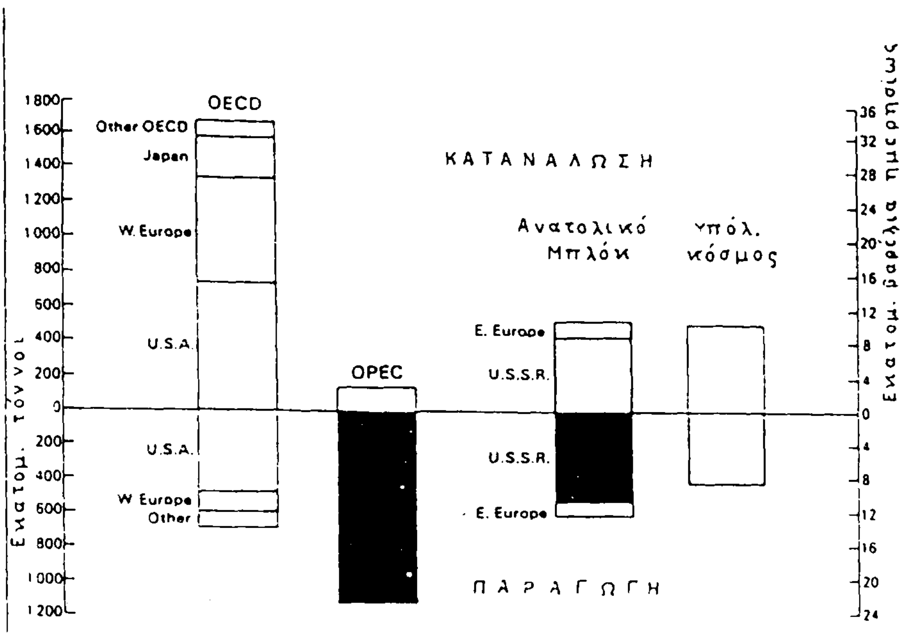
ΓΡΑΦΗΜΑ XI

Παγκόσμιος Στόλος Δεξαμενοπλοίων 1981



ΓΡΑΦΗΜΑ XII

Παγκόσμιος Παραγωγή Πετρελαίου
και Κατανάλωση 1981



6. ΠΡΟΣΕΓΓΙΖΟΥΣΕΣ ΤΙΜΕΣ

6.1. Η έννοια της προσεγγίζουσας τιμής.

Ο άνθρωπος στις πρακτικές του δραστηριότητες συχνά κάνει μετρήσεις διαφόρων μεγεθών. Οι μετρήσεις αυτές εκφράζονται με αριθμούς. Οι αριθμοί αυτοί μόνο κατά προσέγγιση εκφράζουν τα ζητούμενα μεγέθη. Ακριβείς μετρήσεις είναι αδύνατες γιατί τα όργανα μετρήσεως δεν είναι τέλεια και οι ανθρώπινες δυνατότητες είναι περιορισμένες.

Έτσι, αντί να έχουμε την αληθινή τιμή ενός μεγέθους έχουμε μια τιμή που χαρακτηρίζει το μέγεθος αυτό με κάποιο βαθμό ακριβείας που την ονομάζουμε <u>προσεγγίζουσα τιμή</u>.

6.2. Σφάλματα

Έστω ότι x είναι η αληθινή τιμή κάποιου μεγέθους και α η προσεγγίζουσα τιμή της, τότε

$$\Delta = |x-\alpha| \qquad (1)$$

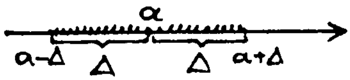
ονομάζεται <u>απόλυτο σφάλμα</u>

<u>Παράδειγμα 1</u>: Να βρείτε τον αριθμό x, αν η προσεγγίζουσα τιμή του είναι $\alpha = 0{,}8$ και το απόλυτο σφάλμα $\Delta = 0{,}01$.

<u>Λύση</u>

Από την (1) έχουμε:

$$\Delta = |x-a| \Leftrightarrow x-a = \pm\Delta \Leftrightarrow x = a+\Delta \text{ ή } x = a-\Delta \quad (\sigma\chi.1)$$



σχ. 1

Έτσι παίρνουμε

$x = 0,8 + 0,01 = 0,81$ ή

$x = 0,8 - 0,01 = 0,79$

Παράδειγμα 2: Είναι γνωστό ότι $\frac{1}{3} = 0,333....$ Θα προσπαθήσουμε να βρούμε το απόλυτο σφάλμα

Λύση:

Εφαρμόζοντας τον τύπο (1) παίρνουμε:

$$\Delta = \left|\frac{1}{3} - 0,333\right| = \left|\frac{1000}{3.000} - \frac{999}{3.000}\right| = \frac{1}{3.000}$$

. Αν θεωρήσουμε $\frac{1}{3} = 0,3333$, τότε $\Delta = \left|\frac{1}{3} - 0,3333\right| = \frac{1}{30.000}$.

Επειδή η αληθινή τιμή του ζητουμένου μεγέθους κατά κανόνα είναι άγνωστη, ο υπολογισμός του απολύτου σφάλματος της προσεγγίζουσας αυτού του μεγέθους είναι αδύνατος. Γι' αυτό για κάθε συγκεκριμένη περίπτωση είναι δυνατόν να υποδειχθεί ένας θετικός αριθμός, του οποίου δεν θα υπερβαίνει το απόλυτο σφάλμα. Αυτός ο αριθμός ονομάζεται φράγμα του απολύτου σφάλματος. Έτσι, αν $h > 0$ είναι το φράγμα του απολύτου σφάλματος, τότε

$$\Delta = |x - a| \leq h \qquad (2)$$

Παράδειγμα: Να βρείτε το φράγμα του αριθμού $x = 10,6 \pm 0,5$.

Λύση:

Επειδή από την (2) έχουμε

$|x - \alpha| \leq h \iff \alpha - h \leq x \leq \alpha + h$ Τότε

$\alpha = 10,6$ και $h = 0,5$, συνεπώς

$$10,6 - 0,5 \leq x \leq 10,6 + 0,5 \iff$$

$$10,1 \leq x \leq 11,1.$$

Το απόλυτο σφάλμα δεν εκφράζει επαρκώς την ποιότητα της μέτρησης ή την ακρίβεια των λογαριασμών. Για παράδειγμα ας εξετάσουμε την περίπτωση μέτρησης του πάχους ενός βιβλίου με $d = 3 \pm 0{,}5$ cm και το ύψος ενός τραπεζίου με $H = 100 \pm 0{,}5$ cm. Παρατηρούμε ότι το φράγμα του απολύτου σφάλματος $h = 0{,}5$ είναι σαν αριθμός μικρός, όμως το αποτέλεσμα μέτρησης του πάχους του βιβλίου $(d \approx 3)$ είναι αρκετά χοντρό σε σύγκριση με το αποτέλεσμα μέτρησης του τραπεζίου $(H \approx 100)$. Έτσι, για να συγκρίνουμε την ακρίβεια μιας προσεγγίζουσας τιμής είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε ποιό μέρος του ζητουμένου μεγέθους αποτελεί το απόλυτο σφάλμα. Για τον σκοπό αυτό εισάγουμε την έννοια του σχετικού σφάλματος:

<u>Σχετικό σφάλμα</u> δ μιας προσεγγίζουσας λέγεται το πηλίκο του απολύτου σφάλματος πρός την απόλυτη τιμή της προσεγγίζουσας, δηλαδή

$$\delta = \frac{|x-a|}{|a|} = \frac{\Delta}{|a|} \qquad (3)$$

Συνήθως το σχετικό σφάλμα εκφράζεται με

$$\delta = \frac{|x-a|}{|a|} \cdot 100\% \,.$$

Όπως και στην περίπτωση του απολύτου σφάλματος υπολογίζουμε όχι το σχετικό σφάλμα μιας προσεγγίζουσας αλλά το φράγμα αυτής, δηλαδή έναν θετικό αριθμό E, τέτοιον ώστε

$$\delta \le E \iff \frac{\Delta}{|a|} \le E \,.$$

Αν τώρα h είναι το φράγμα του Δ μιας προσεγγίζουσας a, τότε $\Delta \le h$ και

$$\delta = \frac{\Delta}{|\alpha|} \le \frac{h}{|\alpha|} \leqslant E$$

Έτσι, $E = \frac{h}{|\alpha|}$ (4).

λέγεται φράγμα τού σχετικού σφάλματος, και $\delta \le E$.

Επειδή $h = |\alpha| \cdot E$, ο τύπος $x = \alpha \pm h$ παίρνει την μορφή: $x = \alpha \pm |\alpha| \cdot E = \alpha(1 \pm E)$.

<u>Παράδειγμα</u>: Στό προηγούμενο παράδειγμα είχαμε $d = 3 \pm 0{,}5$. Επειδή $h = 0{,}5$ είναι $E = \frac{0{,}5}{3} = 0{,}166\ldots$ ή $E \approx 0{,}167 \Longrightarrow E \approx 16{,}7\%$.

Έτσι στην μέτρηση τού πάχους τού βιβλίου το σχετικό σφάλμα δεν υπερβαίνει το $16{,}7\%$. Στο ίδιο παράδειγμα $H = 100 \pm 0{,}5$, οπότε $E = \frac{0{,}5}{100} = \frac{1}{200} \Longrightarrow$ $E = \frac{1}{200} \cdot 100\% = \frac{1}{2}\% = 0{,}5\%$. Όπως βλέπουμε η ποιότητα μέτρησης του τραπεζίου είναι ανώτερη γιατί το σχετικό σφάλμα δέν υπερβαίνει το $0{,}5\%$.

6.3. Γραφή προσεγγιζόντων αριθμών

Στο γράψιμο των αριθμών συνήθως αναφέρουμε το φράγμα του απολύτου σφάλματος π.χ. αν η μέτρηση έγινε με ακρίβεια 0,5 cm και το αποτέλεσμα είναι 112 cm, τότε γράφουμε

$$112 \text{ cm} \pm 0{,}5 \text{ cm}.$$

Όμως στους λογαριασμούς είναι δύσκολο να γράφονται οι αριθμοί και τα σφάλματά τους. Γι'αυτό εισάγουμε την έννοια του <u>αξιοπίστου ψηφίου</u>.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Το ψηφίο α στη γραφή προσεγγίζοντα αριθμού λέγεται *αξιόπιστο* αν το φράγμα του απολύτου σφάλματος δεν υπερβαίνει την μονάδα αυτής της τάξης στην οποία είναι γραμμένο το ψηφίο αυτό.

π.χ. στον προσεγγίζοντα αριθμό του π που είναι 3,14 όλα τα ψηφία είναι αξιόπιστα επειδή το φράγμα του απολύτου σφάλματος $(3,142-3,14=0,002)$ $0,002<0,01$.

Είναι φανερό ότι αν α είναι αξιόπιστο ψηφίο, τότε όλα τα ψηφία που προηγούνται είναι αξιόπιστα.

Αν τό φράγμα του απολύτου σφάλματος μιας προσέγγισης είναι μεγαλύτερο της μονάδας κάποιας τάξης, τότε τό ψηφίο αυτό (όπως καί τα επόμενα) τό λέμε <u>αμφίβολο</u>.

Προτείνεται να γράφονται οι προσεγγίζοντες αριθμοί έτσι ώστε τα ψηφία τους να είναι όλα αξιόπιστα.

Ας δούμε π.χ. τον προσεγγίζοντα αριθμό 23,47

Η γραφή του δείχνει ότι όλα τα ψηφία είναι αξιόπιστα καί τό φράγμα του απολύτου σφάλματος είναι μικρότερο του 0,01 , δηλαδή

$$x=23,47\pm 0,01$$

Ας εξετάσουμε επίσης τον αριθμό $x=4,63\pm 0,05$.

Η γραφή αυτή σημαίνει ότι

$$4,63-0,05\leq x\leq 4,63+0,05 \Longleftrightarrow$$

$$4,58\leq x\leq 4,68$$

Στον αριθμό 4,63 έχουμε το ψηφίο 3 αμφίβολο γιατί $0,05>0,01$, όπου $h=0,05$ είναι το φράγμα του απολύτου σφάλματος.

Τό ψηφίο 6 είναι αξιόπιστο γιατί $0,05<0,1$, όπου 0,1 είναι η μονάδα της τάξης του ψηφίου 6.

Έστω x ένας προσεγγίζοντας αριθμός. Όλα τα αξιόπιστα ψηφία του x εκτός από τα μηδενικά πού βρίσκονται αριστερότερα του πρώτου μη μηδενικού ψηφίου λέγονται <u>σημαίνοντα ψηφία</u>.

π.χ. στον αριθμό 3,14 υπάρχουν τρία σημαίνοντα ψηφία, στον αριθμό 0,01255 είναι τέσσερα, στον αριθμό 0,108 είναι τρία, στον αριθμό 0,1200 είναι τέσσερα, στον αριθμό $126 \cdot 10^3$ είναι τρία τα σημαίνοντα ψηφία.

6.4. Κανόνας στρογγυλοποίησης

Για να στρογγυλοποιήσουμε εναν αριθμό μέχρι ν σημαίνοντα ψηφία, διαγράφουμε όλα τα ψηφία που ακολουθούν μετά την ν-στή τάξη, ή, αν αυτό χρειάζεται για την διατήρηση της τάξης, τα αντικαθιστούμε με μηδενικά. Στην ενέργεια αυτή:

i) αν το πρώτο από τα διαγραφόμενα ψηφία είναι μικρότερο του 5, τότε το τελευταίο διατηρητέο ψηφίο δεν μεταβάλλεται.

ii) αν το πρώτο από τα διαγραφόμενα ψηφία είναι μεγαλύτερο του 5, τότε το τελευταίο διατηρητέο ψηφίο μεγαλώνει κατά μία μονάδα.

iii) αν το πρώτο από τα διαγραφόμενα ψηφία είναι ίσο με το 5 και όλα τα υπόλοιπα διαγραφόμενα ψηφία είναι μηδενικά, τότε το τελευταίο διατηρητέο ψηφίο δεν μεταβάλλεται αν αυτό είναι άρτιο και μεγαλώνει κατά μία μονάδα, αν αυτό είναι περιττό.

Τό σφάλμα στρογγυλοποίησης δεν υπερβαίνει τις πέντε μονάδες της πρώτης διαγραφομενης τάξης.

Συχνά στούς υπολογισμούς χρησιμοποιούνται πολύ μεγάλοι καί πολύ μικροί αριθμοί (θετικοί).

Τέτοιοι αριθμοί διευκολύνει καλλίτερα να γράφονται στη μορφή $\alpha \cdot 10^{\nu}$, όπου $1 \leq \alpha < 10$ και $\nu \in Z$, με την διατήρηση μόνο αξιοπίστων ψηφίων.

Όταν γράφουμε μία προσεγγίζουσα τιμή στη μορφή $x \approx a \cdot 10^{\nu}$, τότε το απόλυτο σφάλμα δεν υπερβαίνει την μονάδα της τελευταίας διατηρητέας τάξης του αριθμού, πολλαπλασιασμένης επί τον 10^{ν}.

Έστω η γραφή $x \approx 5{,}3 \cdot 10^{3}$.

Τότε το απόλυτο σφάλμα δεν υπερβαίνει τον αριθμό $0{,}1 \cdot 10^{3}$, δηλαδή $x = 5{,}3 \cdot 10^{3} \pm 0{,}1 \cdot 10^{3}$ ή $x = 10^{3}(5{,}3 \pm 0{,}1)$.

Αν $x \approx 5{,}3 \cdot 10^{-3}$, τότε $x = (5{,}3 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-2}$.

Παραδείγματα μεγάλων και μικρών αριθμών αποτελούν τα παρακάτω:

Η διάμετρος του ηλίου είναι $1.390.600.000 = 1{,}3906 \cdot 10^{9}$ m, η διάμετρος ενός μορίου νερού είναι $0{,}00000003 \text{ cm} = 3 \cdot 10^{-8}$ cm, η μάζα της γης είναι $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kgr, η ταχύτητα του φωτός είναι $2{,}99793 \cdot 10^{8}$ m/h.

Το απόλυτο σφάλμα της διαμέτρου του ηλίου δεν υπερβαίνει το $0{,}0001 \cdot 10^{9}$ ή $\Delta \leq \frac{1}{10^{4}} \cdot 10^{9} = 10^{5} \Rightarrow \Delta \leq 100.000$ m ή $\Delta \leq 100$ km.

6.5. Πρόσθεση και Αφαίρεση Προσεγγιζόντων αριθμών

Έστω a και b ότι είναι οι προσεγγίζουσες τιμές των αριθμών x και y αντίστοιχα, με ακρίβεια h_a και h_b, δηλαδή $x = a \pm h_a$, $y = b \pm h_b$ ή
$a - h_a \leq x \leq a + h_a$ και $b - h_b \leq y \leq b + h_b$.

Το ζητούμενο είναι να βρεθεί το φράγμα του απολύτου σφάλματος του αθροίσματος $a + b$.

Προσθέτοντας τις παραπάνω ανισότητες κατά μέλη παίρνουμε :

$$a+b-(h_a+h_b) \leq x+y \leq a+b+(h_a+h_b),$$

δηλαδή :

$$x+y = a+b \pm (h_a+h_b) \qquad (5)$$

Έτσι πήραμε : $h_{a+b} = h_a + h_b$ Ο κανόνας αυτός επεκτείνεται για οποιοδήποτε αριθμό προσθετέων.

Συνεπώς το φράγμα του σχετικού σφάλματος ενός αθροίσματος είναι:

$$E_{a+b} = \frac{h_a+h_b}{a+b} \qquad (6)$$

αν $a>0$, $b>0$.

Από τον τύπο $h_{a+b} = h_a + h_b$ προκύπτει ότι, αν ένας από τους προσθετέους έχει απόλυτο σφάλμα πού υπερβαίνει σημαντικά τα απόλυτα σφάλματα των άλλων προσθετέων, τότε την ακρίβεια του αθροίσματος δεν είναι δυνατό να την βελτιώσουμε, βελτιώνοντας την ακρίβεια των προσθετέων αυτών.

Για τον υπολογισμό των αξιοπίστων ψηφίων στην πρόσθεση προσεγγιζόντων αριθμών με όλα τα ψηφία αξιόπιστα, προτείνεται ο παρακάτω κανόνας:

1. Ξεχωρίζουμε τον προσθετέο με τα λιγότερα αξιόπιστα δεκαδικά ψηφία (ο λιγότερο ακριβής προσθετέος)

2. Στρογγυλοποιούμε τους υπόλοιπους προσθετέους, αφήνοντας στον καθένα ένα ψηφίο περισσότερο από τον πρώτο (λιγότερο ακριβή) προσθετέο.

3. Κάνουμε την πρόσθεση υπολογίζοντας όλα τα διατηρηθέντα ψηφία.

4. Στρογγυλοποιούμε το αποτέλεσμα μέχρι το προτελευταίο ψηφίο.

<u>Παράδειγμα 1.</u> Αν $a_1 = 0{,}423$, $a_2 = 72{,}8$, $a_3 = 14{,}715$, βρείτε το $a_1+a_2+a_3$.

Λύση:

Ο a_2 έχει λιγώτερα αξιόπιστα δεκαδικά ψηφία δηλαδή ένα, γι αυτό αυτός δεν μεταβάλλεται. Στρογγυλοποιούμε τους a_2 και a_3 μέχρι δύο δεκαδικά ψηφία, δηλαδή

$$a_1 = 0{,}42 \quad , a_3 = 14{,}72 \quad , \text{τότε}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0{,}42 + 72{,}8 + 14{,}72 = 87{,}94.$$

Στρογγυλοποιώντας το αποτέλεσμα μέχρι ένα δεκαδικό ψηφίο παίρνουμε το άθροισμα $87{,}9$.

Όπως και στην περίπτωση του αθροίσματος έτσι και για την διαφορά έχουμε:

$$h_{a-\beta} = h_a - h_\beta \qquad (7)$$

Συνεπώς το φράγμα του σχετικού σφάλματος είναι:

$$E_{a-\beta} = \frac{h_a - h_\beta}{|a-\beta|} \qquad (8)$$

Από τον τύπο (8) προκύπτει ότι όταν αφαιρούμε δύο σχεδόν ίσους προσεγγίζοντες αριθμούς, τότε $h_a - h_\beta$ μπορεί να γίνει πολύ μεγάλη, δηλαδή μπορεί να προκύψει απώλεια της ακρίβειας.

π.χ. αν $a = 1{,}234$, $\beta = 1{,}238$ και $h_a = h_\beta = 0{,}001$, τότε

$$E_{a-\beta} = \frac{0{,}001 + 0{,}001}{|1{,}234 - 1{,}238|} = \frac{0{,}002}{0{,}004} = \frac{1}{2}$$

ή $E_{a-\beta} = 100\% \cdot 0{,}5 = 50\%$. Γι αυτό συνήθως αποφεύγουμε την αφαίρεση δύο σχεδόν ίσων αριθμών.

Παράδειγμα 2: Να βρείτε την διαφορά $x-y$, αν $x \approx 7{,}25$, $y \approx 3{,}8245$

Λύση:

Στρογγυλοποιούμε τον αριθμό $3{,}8245$ μέχρι τρία δεκαδικά ψηφία: $3{,}8245 \approx 3{,}824$.

Βρίσκουμε

$$x-y=7{,}25-3{,}824=3{,}426$$

Στρογγυλοποιώντας το αποτέλεσμα μέχρι δύο δεκαδικά ψηφία, παίρνουμε $3{,}43=x-y$.

Πολλαπλασιασμός και Διαίρεση προσεγγιζόντων αριθμών

Έστω $x=a+h_a$, $y=b+h_b$, όπου $a>0$, $b>0$. Τότε το φράγμα του απολύτου σφάλματος του γινομένου $a\cdot b$ και του πηλίκου ορίζονται από τους τύπους:

$$h_{a\cdot b}=a\cdot h_a+b\cdot h_b \qquad (9)$$

$$h_{\frac{a}{b}}=\frac{h_a}{a}+\frac{h_b}{b} \qquad (10)$$

Από τους (9) και (10) προκύπτουν οι τύποι πού ορίζουν το σχετικό σφάλμα:

$$E_{a\cdot b}=E_a+E_b \qquad (11)$$

$$E_{\frac{a}{b}}=E_a+E_b \qquad (12)$$

<u>Παράδειγμα 1:</u> Να βρεθεί το γινόμενο των αριθμών 16,43 και 2,7539

<u>Λύση:</u>

$$16{,}43\cdot 2{,}7539\approx 16{,}43\cdot 2{,}754=45{,}25.$$

Εδώ στον αριθμό 2,7539 διατηρήσαμε τέσσερα σημαίνοντα ψηφία, όσα έχει και ο αριθμός 16,43.

<u>Παράδειγμα 2:</u> Να υπολογίσετε το πηλίκο $\frac{x}{y}$, αν $x=47{,}2\pm 0{,}5$, $y=19{,}4\pm 0{,}1$.

<u>Λύση:</u>

Έχουμε:

$$\frac{x}{y}\approx\frac{47{,}2}{19{,}4}\approx 2{,}43 \quad , \quad E_{\frac{x}{y}}=\frac{0{,}5}{47{,}2}+\frac{0{,}1}{19{,}4}\approx 0{,}0158$$

$$h_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y}\cdot E_{\frac{x}{y}} \approx 2{,}43\cdot 0{,}0158 \approx 0{,}039$$, συνεπώς

$$\frac{x}{y} = 2{,}43 \pm 0{,}039 \quad \text{ή}$$

$$\frac{x}{y} = 2{,}43 \pm 0{,}4$$

Παράδειγμα 3: Να υπολογίσετε την παράσταση $x+yz$, αν $x\approx 104{,}367$, $y\approx 14{,}8$, $z\approx 0{,}73$

Λύση:

Έχουμε

$yz \approx 14{,}8\cdot 0{,}73 = 10{,}804$. Στρογγυλοποιούμε αυτό το ενδιάμεσο αποτέλεσμα διατηρώντας ένα δεκαδικό ψηφίο, δηλαδή $10{,}8$.

Γι' αυτό

$$x+yz \approx 104{,}367 + 10{,}8 \quad \text{ή}$$

$$x+yz \approx 104{,}37 + 10{,}8 = 115{,}17 \approx 115.$$

Το τελικό αποτέλεσμα το στρογγυλοποιήσαμε μέχρι ακέραιο γιατί στον προσθετέο $10{,}8$ το ψηφίο $0{,}8$ ήταν εφεδρικό και δεν υπολογίζεται.

Παρατήρηση: Στην ύψωση δύναμης και εξαγωγή ρίζας στο αποτέλεσμα πρέπει να διατηρηθούν τόσα σημαίνοντα ψηφία, όσα έχει η βάση της δύναμης και αντίστοιχα το υπόρριζο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

155. Τον αριθμό $5{,}84$ να τον στρογγυλοποιήσετε μέχρι δέκατα με έλλειψη και υπερβολή

156. Να βρείτε τον αριθμό x, αν η προσεγγίζουσα τιμή του είναι $a=2{,}4$ και το απόλυτο σφάλμα $\Delta=0{,}01$.

(Απ.: $2{,}4\pm 0{,}04$)

157. Να βρείτε τα φράγματα του αριθμού $y=22{,}7\pm 0{,}5$.

(Απ.: $22,2 \leq y \leq 23,2$)

158. Δίνονται δύο αποτελέσματα μέτρησης ενός μήκους: $\ell_1 = 15 \pm 0,5$ και $\ell_2 = 140 \pm 0,5$. Ποιά μέτρηση είναι ακριβέστερη; (ΑΠ.: η δεύτερη)

159. Να βρείτε το φράγμα του σχετικού σφάλματος του αριθμού $x = 0,23 \pm 0,005$ (ΑΠ.: $\approx 2,2\%$).

160. Έστω ο αριθμός $x = 83,4 \pm 0,5$. Ποιά ψηφία στη γραφή της προσεγγίζουσας τιμής είναι αξιόπιστα; (ΑΠ.: 8 και 3)

161. Τους αριθμούς 28,4501, 28,450, 28,550 να στρογγυλοποιήσετε μέχρι δέκατα. (ΑΠ.: 28,5 ,28,4 ,28,6).

162. Να βρείτε τους προσεγγίζοντες αριθμούς του αθροίσματος και της διαφοράς των αριθμών:

α) $\alpha \approx 2,38$ και $\beta \approx 15,41$, β') $\alpha \approx 7,2$ και $\beta \approx 4,25$

163. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\alpha - \beta + \gamma$, αν $\alpha \approx 27,345$, $\beta \approx 13,8$, $\gamma \approx 5,23$ (ΑΠ.: 18,8)

164. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\alpha\beta - \gamma$, αν $\alpha \approx 2,9$, $\beta \approx 13,5$, $\gamma \approx 7,563$ (ΑΠ.: 31,6)

165. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $x + \frac{y}{z}$, όταν $x \approx 121,34$, $y \approx 271,3$, $z \approx 34,5$ (ΑΠ.: 129,20).

7. ΠΑΡΕΜΒΟΛΕΣ.

Πολλές φορές χρησιμοποιώντας διαφόρους πίνακες, βρίσκουμε την τιμή μιάς συναρτήσεως, γνωρίζοντας μιά συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής της (αν έχει μία μεταβλητή).

Έτσι, εάν υφίστανται δύο μεγέθη συνδεδεμένα μεταξύ τους μέ μία μαθηματική σχέση π.χ. $y=2x$, το δεύτερο μέγεθος y μεταβάλλεται συναρτήσει του πρώτου x. Το μέγεθος που μεταβάλλεται αυθαιρέτως ονομάζεται (ανεξάρτητη) μεταβλητή, ενώ αυτό που υφίσταται την μεταβολή ονομάζεται συνάρτηση.

Στό παράδειγμά μας το x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή ενώ το y είναι μία συνάρτηση.

Στην τιμή της μεταβλητής $x=1$, η τιμή της συναρτήσεως είναι $y=2\cdot 1=2$, στην τιμή $x=3$ αντιστοιχεί η τιμή $y=6$ κ.λ.π.

Στους πίνακες υπολογισμού των τιμών μιας συναρτήσεως λαμβάνονται διάφορες τιμές, υπολογισμένες από μιά σειρά τιμών της μεταβλητής πού βρίσκονται γενικά σε ισαπέχοντα διαστήματα. Θα μπορούσαμε π.χ. να υπολογίσουμε γιά την συνάρτησή μας $y=2x$ τις νέες τιμές της που αντιστοιχούν σε μία σειρά τιμών της μεταβλητής x που καθεμιά τους είναι 5 ενότητες μεγαλύτερη από την προηγούμενή της καί να συνδέσουμε τον πίνακα:

x	y	a
$x_1=0$	$y_1=0$	
		$a_2=10$
$x_2=5$	$y_2=10$	
		$a_3=10$
$x_3=10$	$y_3=20$	
		$a_4=10$
$x_4=15$	$y_4=30$	κ.λ.π.

Συμβαίνει συχνά και μάλιστα σχεδόν πάντοτε, νά ψάχνουμε να βρούμε την τιμή μιας συναρτήσεως που αντιστοιχεί σε μιά ενδιάμεση τιμή της μεταβλητής, δηλαδή σε μιά τιμή του x μη περιλαμβανομένη στον πίνακα.

Στην περίπτωσή μας π.χ. για $x=7$ ή $x=8$. Η εργασία ευρέσεως της λύσεως σε μιά τέτοια περίπτωση λέγεται <u>παρεμβολή</u>.

Την παρεμβολή την εφαρμόζουμε πάντοτε μεταξύ των άλλων, στον υπολογισμό του λογαρίθμου ενός δεδομένου αριθμού ή αντιστρόφως στον υπολογισμό του αριθμού που αντιστοιχεί σε δεδομένο λογάριθμο.

Η παρεμβολή επίσης χρησιμοποιείται συχνά στην Ναυτιλία και στην Αστρονομία.

Εάν οι τιμές της συναρτήσεως είναι ευθέως ανάλογες της μεταβλητής x, η λύση του προβλήματος είναι απλή.

Για να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση μεταβάλλεται αναλόγως της μεταβλητής της, πρέπει να γράψουμε σε στήλες τις διαφορές μεταξύ δύο μεταβλητών τιμών της συναρτήσεως.

Συμβολίζουμε τις διαφορές αυτές με α. Οι διαφορές αυτές οφείλουν να είναι σταθερές (ίσες μεταξύ τους). Στο παράδειγμά μας οι διαφορές είναι 10.

Ο υπολογισμός των ενδιαμέσων τιμών της συναρτήσεως y ανάγεται λοιπόν στην επίλυση μιάς απλής εξισώσεως της μορφής:

$$y = y_3 + a_4 \frac{x - x_3}{x_4 - x_3}$$

υποθέτοντας επί παραδείγματι, ότι ψάχνουμε το y που αντιστοιχεί σε x περιλαμβανόμενο μεταξύ x_3 και x_4.

Έτσι, γιά y που αντιστοιχεί σε $x=12$, έχουμε:

$$y = 20 + 10 \cdot \frac{12-10}{15-10} = 20 + 10 \cdot \frac{2}{5} = 24.$$

Με άλλα λόγια μπορούμε να πούμε ότι: Μία συνάρτηση είναι ίση με την τιμή πού δίδεται από τον πίνακα που αντιστοιχεί στην κατώτερη πλησιέστερη τιμή της μεταβλητής, αυξημένη κατά το γινόμενο της πρώτης διαφοράς (μεταξύ της δεδομένης τιμής της συναρτήσεως και της συνεχόμενης τιμής της) επί το πηλίκο των διαφορών των γειτονικών τιμών της μεταβλητής, που αντιστοιχούν στον πίνακα (βλ. τύπο).

Εάν οι πρώτες διαφορές είναι άνισες, αφαιρώντας από κάθε μία εξ αυτών την προηγουμένη διαφορά, λαμβάνουμε τις δεύτερες διαφορές β (πίνακας 1). Εάν ούτε αυτές οι δεύτερες διαφορές είναι σταθερές, μπορούμε με ανάλογο τρόπο να υπολογίσουμε τις τρίτες διαφορές γ κλπ. μέχρι να καταλήξουμε σε διαφορές σταθερές ή πολύ μικρές.

Στον πίνακα 2 πού δίνεται γιά παράδειγμα, ούτε οι έκτες διαφορές δεν είναι σταθερές, εν τούτοις οι τέταρτες διαφορές διαφέρουν ήδη πολύ λίγο και γι αυτό από τις πέμπτες διαφορές και μετά, η παρεμβολή μπορεί να τις αγνοήσει.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

x	ψ	α	β	γ	δ
x_1	ψ_1				
		α_2			
x_2	ψ_2		β_3		
		α_3		γ_4	
x_3	ψ_3		β_4		δ_5
		α_4		γ_5	
x_4	ψ_4		β_5		
		α_5			
x_5	ψ_5				

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

x	ψ		α	β	γ	δ	ε	στ
1,0	+19° 19,6′	ή 1159,6′						
			-197,4′					
2,0	16 2,2	962,2		-51,4′				
			-248,8		-17,9′			
3,0	11 53,4	713,4		-33,5		+0,3′		
			-282,3		-17,6		+1,2′	
4,0	7 11,1	431,1		-15,9		+1,5		-0,3′
			-298,2		-16,1		+0,9	
5,0	+2 12,9	+132,9		+0,2		+2,4		-1,3
			-298,0′		-13,7		-0,4	
6,0	-2 45,1	-165,1		+13,9		+2,0		
			-284,1		-11,7			
7,0	7 29,2	-449,2		+25,6				
			-258,5					
8,0	-11 47,7	-707,7						

Ας υποθέσουμε ότι πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή της συναρτήσεως y γιά $x = x_1 + \theta h$ όπου x_1 είναι η κατώτερη τιμή εκ του πίνακος, η πλησιέστερη της μεταβλητής, h η εκ του πίνακος διαφορά των γειτονικών τιμών και ϑ μία συνάρτηση. Τότε κατά την θεωρία της παρεμβολής:

$$y = y_1 + \vartheta\left\{a_2 + \frac{\vartheta-1}{2}\left[\beta_3 + \frac{\vartheta-2}{3}\left(\gamma_4 + \frac{\vartheta-3}{4}\delta_4\right)\right]\right\}$$

όπου y_1 είναι η τιμή της y για $x = x_1$.

Είναι πολύ σπάνιο να προστρέχουμε σε ανώτερες της τέταρτης διαφορές και γι' αυτό ο παραπάνω τύπος αρκεί.

Εάν κατά τους υπολογισμούς, μπορούμε να περιοριστούμε στις δεύτερες ή στις τρίτες διαφορές, δεχόμεθα ότι οι υπόλοιπες διαφορές είναι 0.

Για παράδειγμα, παρεμβάλλοντας με τις τρίτες διαφορές, έχουμε:

$$y = y_1 + \vartheta\left[a_2 + \frac{\vartheta-1}{2}\left(\beta_3 + \frac{\vartheta-2}{3}\gamma_4\right)\right]$$

Παρεμβάλλοντας με τις δεύτερες διαφορές, έχουμε:

$$y = y_1 + \vartheta\left[a_2 + \frac{\vartheta-1}{2}\beta_3\right]$$

Ας υπολογίσουμε για παράδειγμα, βάσει του πίνακα 2, την τιμή του y που αντιστοιχεί στο $x = 1,2$.

Στην περίπτωσή μας έχουμε, $h = 1,0$ $\quad \vartheta = 0,2$ $\quad y_1 = 1159,6'$

Κάνοντας παρεμβολή με τις τέταρτες διαφορές λαμβάνουμε:

$$y = 1159,6 + 0,2\left\{-197,4 + \frac{0,2-1}{2}\left[-51,4 + \frac{0,2-1}{2}\left(-17,9 + \frac{0,2-3}{2}0,3\right)\right]\right\}$$

$$\Rightarrow y = 1159,6 + 0,2\{-197,4 - 0,4[-51,4 - 0,6(-17,9 - 0,7\cdot 0,3)]\}.$$

$$\Rightarrow y = 1159,6 + 0,2\{-197,4 - 0,4[-51,4 - 0,6(-18,1)]\}$$

$$\Rightarrow y = 1159,6 + 0,2\{-197,4 - 0,4[-40,54]\}$$

$$\Rightarrow y = 1159,6 + 0,2(-181,2) = 1123,4.$$

$$\Rightarrow y = 1123,4'$$

Εάν υπολογίζαμε μόνο τις δεύτερες διαφορές, θα λαμβάναμε:

$$y = 1159,6 + 0,2\left[-19,7 + \frac{0,2-1}{2}(-51,4)\right] = 1124,2'.$$

Η τιμή αυτή είναι λιγότερο ακριβής, αλλά δεν διαφέρει παρά 0,8' του αποτελέσματος που πήραμε προηγουμένως.

Το παράδειγμα αυτό μας δείχνει ότι όσο η τάξη των διαφορών που παίρνουμε είναι μεγαλύτερη (π.χ. τρίτες διαφορές, τέταρτες διαφορές), τόσο η επιρροή στο αποτέλεσμα είναι πιό ισχνή και έτσι για κάθε δεδομένη περίπτωση δεν είναι δύσκολο να αποφασίσουμε ποιές διαφορές μας αρκούν γιά την παρεμβολή.

Συμβαίνει όμως, ως γνωστόν, μία συνάρτηση να εξαρτάται από δύο μεταβλητές. Στον πίνακα 3 για παράδειγμα η συνάρτηση z εξαρτάται από τις δύο μεταβλητές x και y.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3

x \ y	36	40	41
1	210	199	187
2	405	384	360
3	573	543	510
4	701	664	624

Ας υποθέσουμε ότι πρέπει να υπολογίσουμε το z που αντιστοιχεί στα $x = 1\frac{1}{3}$ και $y = 37$. Βρίσκουμε κατ' αρχήν την τιμή του z για $x = 1\frac{1}{3}$ $\left(\vartheta = \frac{1}{3}\right)$ για κάθε στήλη.

$y = 36$

x	y	α	β	γ
1	210			
		+195		
2	405		−27	
		+168		−13
3	573		−40	
		+128		
4	701			

$y = 40$

x	y	α	β	γ
1	199			
		+185		
2	384		−26	
		+159		−12
3	543		−38	
		+121		
4	664			

$y = 44$

x	y	a	β	γ
1	187			
		+173		
2	360		−23	
		+150		−13
3	510		−36	
		+144		
4	624			

από εδώ βρίσκουμε τις τιμές του z για $x = 1\frac{1}{3}$.

y	z	a	β
36	277		
		−14	
40	263		−3
		−17	
44	246		

Εφαρμόζοντας σ' αυτόν τον πίνακα ακόμη μιά φορά τον κανόνα μας $\left(\partial = \frac{1}{4}\right)$ βρίσκουμε:

$$z = 277 - \frac{1}{4}\cdot 14 + \frac{3}{32}\cdot 3 = 274$$

Συμβαίνει καμιά φορά να πρέπει να υπολογισθεί μία συνάρτηση για κάποια μεταβλητή που η τιμή της ξεπερνά το πλαίσιο των τιμών του πίνακα. Η λύση του προβλήματος αυτού λέγεται <u>Extrapolation</u>

Όταν η συνάρτηση είναι ανάλογη της τιμής της μεταβλητής, ο τύπος της extrapolation γράφεται:

$$y = y_1 - a_2\,\frac{x_1 - x}{x_2 - x_1}$$

και αυτή ανταποκρίνεται στην περίπτωση που π.χ. παίρνουμε το y γιά ένα x μικρότερο από το πρώτο από τα x που περιλαμβάνονται στον πίνακα (ελλείψεως extrapolation).

Στο πρώτο-πρώτο παράδειγμα που μελετήσαμε, υπολογίζουμε το y για $x = -5$: $y = 0 - 10\cdot\frac{0-(-5)}{5-0} = -10$

Ο τύπος της καθ' υπερβολήν extrapolation είναι της μορφής

$$y = y_4 + a_4\,\frac{x - x_4}{x_4 - x_3}.$$

Απ' αυτόν τον τύπο ας υπολογίσουμε το y για $x=27$

$$y = 30 + 10\,\frac{27-15}{15-10} = 30 + 24 = 54$$

Για να είναι ευκολότερη η παρεμβολή, οι αστρονομικές εφημερίδες δίνουν συχνά την ωριαία μεταβολή της συναρτήσεως, δηλαδή την μεταβολή της από ώρα σε ώρα.

Σημείωση 1η: Αν θέλουμε να δώσουμε ένα γενικότερο ορισμό της παρεμβολής με ένα μαθηματικό τρόπο θα λέγαμε: Έστω ότι η συνάρτηση $y=f(x)$ ορίζεται στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ από τις τιμές:

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \dots,\ y_\nu = f(x_\nu) \qquad (1)$$

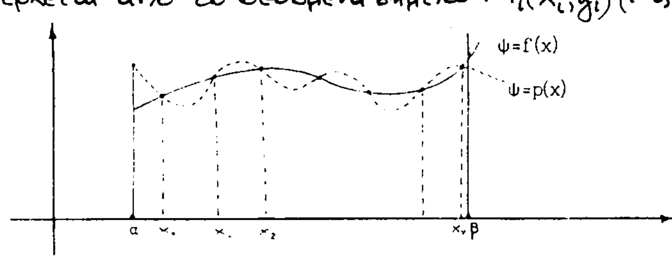
Το πρόβλημα της παρεμβολής είναι: "Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)=P_\nu(x)$ βαθμού μικρότερου ή ίσου του ν τέτοιο ώστε οι τιμές του στα σημεία $x_0, x_1, x_2, \dots, x_\nu$ να συμπίπτουν με τις τιμές της δεδομένης συναρτήσεως f" δηλαδή

$$P(x_0) = y_0,\ P(x_1) = y_1,\ \dots,\ P(x_\nu) = y_\nu \qquad (2)$$

Το πρόβλημα αυτό έχει απλή γεωμετρική ερμηνεία: Πρέπει να βρεθεί καμπύλη με εξίσωση:

$$y = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

που να διέρχεται από τα δεδομένα σημεία $M_i(x_i, y_i)$ $(i=0,1,\dots,\nu)$ (βλ. σχήμα).



Το πολυώνυμο $P(x)$ λέγεται πολυώνυμο παρεμβολής. Τα δεδομένα σημεία $x_i \in [\alpha,\beta]$ λέγονται κόμβοι της παρεμβολής.

Αποδεικνύεται ότι πάντα υπάρχει τέτοιο πολυώνυμο και είναι μοναδικό. Το πολυώνυμο παρεμβολής $P(x)$ χρησιμοποιείται συνήθως για προσεγγιστικούς υπολογισμούς της δεδομένης συναρτήσεως f στα σημεία x πού είναι διάφορα από τους κόμβους παρεμβολής.

Η πράξη αυτή λέγεται παρεμβολή της συναρτήσεως f.

Αν ο υπολογισμός γίνεται όταν $x \in [x_0, x_\nu]$, δηλαδή όταν η τιμή της x είναι ενδιάμεσος των x_0 και x_ν, τότε η πράξη αυτή λέγεται παρεμβολή. Αν όμως η τιμή της $x \notin [x_0, x_\nu]$ τότε λέγεται extrapolation

Σημείωση 2η: Εάν παίρνουμε μόνο τις πρώτες διαφορές η παρεμβολή λέγεται γραμμική. Εάν πάρουμε τις δεύτερες διαφορές λέγεται παραβολική ή τετραγωνική κ.ο.κ.

Σημείωση 3η: Τύπος παρεμβολής του Νεύτωνα:

· Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_\nu$ οι πινακοποιημένες τιμές μιας μεταβλητής των οποίων οι διαφορές $h = \Delta x$ $(\Delta x_i = x_{i+1} - x_i,\ i = 0, 1, \ldots, \nu-1)$ είναι σταθερές και έστω $y_0, y_1, \ldots, y_\nu$ οι αντίστοιχες τιμές της συναρτήσεως y. Τότε η τιμή της συναρτήσεως y για μιά ενδιάμεσο τιμή της μεταβλητής x, δίδεται προσεγγιστικώς από τον τύπο παρεμβολής του Νεύτωνα:

$$y = y_0 + q \cdot \Delta y + \frac{q \cdot (q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{q \cdot (q-1) \cdots (q-\nu+1)}{\nu!} \Delta^\nu y_0 \qquad (3)$$

όπου $q = \frac{x - x_0}{h}$ και $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_2$ είναι οι πρώτες, δεύτερες κλπ. διαδοχικές διαφορές. Για $x = x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu)$ το πολυώνυμο (3) παίρνει αμοιβαίως τις πινακοποιημένες τιμές y_i $(i = 0, 1, \ldots, \nu)$.

· Όπως είπαμε στην σημείωση 2 έχουμε και εδώ ειδικές περιπτώσεις του τύπου του Νεύτωνα για $\nu = 1$ (γραμμική παρεμβολή), για $\nu = 2$ (τετραγωνική παρεμβολή) κ.λ.π.

Σημείωση 4η: Τύπος παρεμβολής του Lagrange:

Στην γενική περίπτωση το πολυώνυμο βαθμού ν, για $x = x_i$ αποδέχεται τις δεδομένες τιμές y_i $(i = 0, 1, \ldots, \nu)$, δίδεται δέ (το πολυώνυμο) από τόν τύπο παρεμβολής του Lagrange:

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_\nu)}{(x-x_0)(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_\nu)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_\nu)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_\nu)} y_1 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_\nu)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_\nu)} \cdot y_k + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{\nu-1})}{(x_\nu-x_0)(x_\nu-x_1)\cdots(x_\nu-x_{\nu-1})} y_\nu$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

166. Να υπολογισθεί η τιμή $\sqrt{2}$, αφού βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής της συναρτήσεως $f(x)=\sqrt{x}$ στό διάστημα $[1{,}69\ ,\ 2{,}05]$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον πίνακα:

x	y	α	β
1,69	1,3		
		0,1	
1,87	1,4		0
		0,1	
2,05	1,5		

167. Να γράψετε τον τύπο της συναρτήσεως f από τον παρακάτω πίνακα:

x	0	1	2	3	4	5
y	5,2	8,0	10,4	12,4	14,0	15,2

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον πίνακα:

x	y	α	β
0	5,2		
		2,8	
1	8,0		−0,4
		2,4	
2	10,4		−0,4
		2,0	
3	12,4		−0,4
		1,6	
4	14,0		−0,4
		1,2	
5	15,2		

168. Να γράψετε παραβολικό πολυώνυμο παρεμβολής της συναρτήσεως f με $f(x)=e^x$ που δίδεται στον πίνακα:

x	3,50	3,55	3,60	3,67	3,70
y	33,115	34,813	36,598	38,475	40,447

169. Η συνάρτηση f δίδεται με τον πίνακα:

x	1,0	1,1	1,2	1,3
y	2,7854	2,8330	2,8761	2,9151

i. Να γράψετε πολυώνυμο τρίτου βαθμού παρεμβολής στο διάστημα [1,1 , 3].

ii. Να υπολογίσετε την τιμή $f(1{,}15)$

170. Να υπολογίσετε το ημ14° από τον παρακάτω πίνακα:

x	y	α	β	γ
15°	0,2588			
		832		
20°	0,3420		−26	
		806		−6
25°	0,4226		−32	
		774		−6
30°	0,500		−38	
		736		−6
35°	0,5736		−44	
		692		−6
40°	0,6428		−49	
		643		−6
45°	0,7071		−54	
		589		−6
50°	0,7660		−57	
		532		
55°	0,8192			

Παρατήρηση: Η παρεμβολή εδώ πρέπει να γίνει εκτός του διαστήματος [15,55] άρα έχουμε extrapolation.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΣΤΡΟΝΑΥΤΙΛΙΑΣ

171. Να βρείτε με παρεμβολή σύμφωνα με τον πίνακα I την εξίσωση του χρόνου την 20η Ιουνίου στις 6h, ώρα Γκρίνουιτς.

172. Να προσδιορίσετε σύμφωνα με τον πίνακα I την κλίση του Ηλίου την 29η Ιουνίου στις 18h ώρα Γκρίνουιτς.

173. Να υπολογίσετε με παρεμβολή σύμφωνα με τον πίνακα I την ορθή αναφορά του Ηλίου την 6η Ιουλίου στις 18h ώρα Γκρίνουιτς.

174. Να υπολογίσετε με παρεμβολή την ορθή αναφορά του Ηλίου στις 23 Ιουλίου στις 1 h 32 min 44,3 sec ώρα Γκρίνουιτς. Πάρετε τα δεδομένα από τον πίνακα Ι.

175. Να υπολογίσετε σύμφωνα με τον πίνακα Ι την κλίση του Ηλίου την 10η Ιουλίου στις 17h 12 min 30,3 sec ώρα Γκρίνουιτς.

176. Να βρείτε σύμφωνα με τον πίνακα Ι την εξίσωση του χρόνου την 2α Ιουλίου στις 4h 50 min 19,1 sec ώρα Γκρίνουιτς

177. Υπολογίστε σύμφωνα με τον πίνακα ΙΙ την τιμή της ετήσιας μετατοπίσεως των ισημερινών κατά την ορθή αναφορά για $\alpha =$ $= 1,08$ h , $\delta = +63°$.

178. Να βρείτε την ετήσια μετάπτωση των ισημεριών για $\alpha = 5,2h$, $\delta = +45,9°$

179. Ομοίως για $\alpha = 17,9$ h και $\delta = +56,9°$

180. Ομοίως για $\alpha = 19,8$ h και $\delta = +37,9°$.

Η Λ Ι Ο Σ

Πίνακας Ι

Ημερομηνία	Ημέρα της εβδομάδος	Μέση μεσημβρία Γκρήνουιτς (0^h διεθνούς χρόνου) Εξίσωση Χρόνου	Ωρική Μεταβολή	Φαινομένη ορθή αναφορά	Φαινομένη κλίση	Ωρική Μεταβολή	Ακτίνα	Αστρικός Χρόνος
Ιούνιος 13	Σ	0^m25^s,75	0^s,514	$5^h20^m58^s$,47	+ 23° 8′48″,9	9″,68	946″,30	$17^h21^m22^s$,223
14	Κ	0 13 ,31	0 ,522	5 25 5 ,47	23 12 28 ,9	8 ,60	940 ,29	17 25 18 ,782
15	Δ	0 0 ,70	0 ,520	5 29 14 ,04	23 15 44 ,4	7 ,03	940 ,20	17 29 15 ,341
16	Τ	+ 0 12 ,06	0 ,535	5 33 23 ,00	23 18 35 ,3	6 ,60	940 ,11	17 33 11 ,800
17	Τ	0 24 ,95	0 ,539	5 37 33 ,40	23 21 1 ,5	5 ,57	040 ,53	17 37 8 ,458
18	Π	0 37 ,93	0 ,542	5 41 42 ,94	23 23 2 ,0	4 ,54	045 ,98	17 41 5 ,017
19	Π	+ 0 50 ,97	0 ,545	5 45 52 ,55	+ 23 24 39 ,5	3 ,51	045 ,89	17 45 1 ,678
20	Σ	1 4 ,06	0 ,540	5 50 2 ,10	23 26 51 ,3	2 ,47	045 ,83	17 48 58 ,134
21	Κ	1 17 ,15	0 ,545	5 54 11 ,84	23 20 38 ,2	1 ,44	945 ,77	17 52 54 ,803
22	Δ	1 30 ,23	0 ,544	5 58 21 ,48	23 27 0 ,3	0 ,40	045 ,72	17 56 51 ,252
23	Τ	1 43 ,20	0 ,542	6 2 31 ,07	23 20 57 ,5	0 ,63	946 ,07	18 0 47 ,810
24	Τ	1 50 ,23	0 ,530	6 6 40 ,60	23 28 30 ,0	1 ,66	045 ,63	18 4 44 ,369
25	Π	+ 2 9 ,11	0 ,535	6 10 50 ,04	+ 23 26 37 ,7	2 ,70	945 ,59	18 8 40 ,928
26	Π	2 21 ,88	0 ,530	6 14 59 ,37	23 24 20 ,6	3 ,37	945 ,55	18 12 37 ,480
27	Σ	2 34 ,52	0 ,524	6 19 8 ,57	23 22 38 ,9	4 ,75	945 ,52	18 16 34 ,045
28	Κ	2 47 ,01	0 ,517	6 23 17 ,61	23 20 32 ,5	5 ,78	945 ,49	18 20 30 ,604
29	Δ	2 59 ,33	0 ,510	6 27 20 ,49	23 18 1 ,6	6 ,80	045 ,47	18 24 27 ,162
30	Τ	3 11 ,40	0 ,501	6 31 35 ,18	23 15 6 ,2	7 ,82	045 ,45	18 28 23 ,721
Ιούλιος 1	Τ	+ 3 23 ,39	0 ,492	6 35 43 ,87	+ 23 11 40 ,4	8 ,83	045 ,43	18 32 20 ,280
2	Π	3 35 ,10	0 ,483	6 39 51 ,93	23 8 2 ,3	9 ,94	045 ,41	18 36 16 ,838
3	Π	3 46 ,56	0 ,472	6 43 59 ,05	23 3 53 ,0	10 ,85	045 ,40	18 40 13 ,307
4	Σ	3 57 ,70	0 ,461	6 48 7 ,72	22 59 21 ,4	11 ,86	945 ,39	18 44 9 ,955
5	Κ	4 8 ,69	0 ,449	6 52 15 ,20	22 54 24 ,0	12 ,86	045 ,39	18 48 6 ,513
6	Δ	4 19 ,32	0 ,437	6 56 22 ,39	22 49 4 ,4	13 ,85	045 ,38	18 52 3 ,072
7	Τ	+ 4 29 ,64	0 ,423	7 0 29 ,26	+ 22 43 20 ,1	14 ,84	045 ,38	18 55 59 ,630
8	Τ	4 39 ,62	0 ,409	7 4 35 ,20	22 37 12 ,1	15 ,82	945 ,39	18 59 56 ,189
9	Π	4 49 ,25	0 ,394	7 8 41 ,00	22 30 40 ,5	16 ,80	046 ,40	19 3 52 ,747
10	Π	4 58 ,51	0 ,378	7 12 47 ,81	22 23 45 ,6	17 ,77	945 ,42	19 7 49 ,305
11	Σ	5 7 ,38	0 ,361	7 16 53 ,24	22 16 27 ,4	18 ,74	045 ,44	19 11 45 ,864
12	Κ	5 15 ,84	0 ,344	7 20 58 ,20	22 8 46 ,1	19 ,70	945 ,46	19 15 42 ,422
13	Δ	+ 5 23 ,88	0 ,326	7 25 2 ,66	+ 22 0 41 ,0	20 ,66	046 ,49	19 19 38 ,980
14	Τ	5 31 ,48	0 ,307	7 29 7 ,01	21 52 15 ,0	21 ,59	046 ,53	19 23 35 ,538
15	Τ	5 38 ,61	0 ,287	7 33 10 ,70	21 43 25 ,6	22 ,53	046 ,57	19 27 32 ,096
16	Π	5 45 ,25	0 ,267	7 37 13 ,91	21 34 13 ,8	23 ,45	045 ,62	19 31 28 ,654
17	Π	5 51 ,40	0 ,245	7 41 16 ,61	21 24 40 ,0	24 ,37	045 ,67	19 35 25 ,212
18	Σ	5 57 ,03	0 ,223	7 45 18 ,79	21 14 44 ,9	25 ,27	045 ,73	19 39 21 ,770

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ

ΕΤΗΣΙΑ ΜΕΤΑΠΤΩΣΗ ΙΣΗΜΕΡΙΩΝ

α \ δ	Μετάπτωση ως προς την ορθή αναφορά												Μετάπτωση ως προς κλίση
	−40°	−30°	−20°	−10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°	+70°	
0^h	3^s,1	3^s,1	3^s,1	3^s,1	3^s,1	3^s,1	3^s,1	3^s,1	3^s,1	3^s,1	3^s,1	3^s,1	+20″
1	2,8	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,7	4,0	+19
2	2,5	2,7	2,8	3,0	3,1	3,2	3,3	3,5	3,6	3,9	4,2	4,9	+17
3	2,3	2,5	2,7	2,9	3,1	3,2	3,4	3,6	3,9	4,2	4,7	5,7	+14
4	2,1	2,4	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5	3,7	4,0	4,4	5,1	6,2	+10
5	2,0	2,3	2,6	2,8	3,1	3,3	3,5	3,8	4,2	4,6	5,3	6,6	+5
6	2,0	2,3	2,6	2,8	3,1	3,3	3,6	3,8	4,2	4,7	5,4	6,7	0
7	2,0	2,3	2,6	2,8	3,1	3,3	3,5	3,8	4,2	4,6	5,3	6,6	−5
8	2,1	2,4	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5	3,7	4,0	4,4	5,1	6,2	−10
9	2,3	2,5	2,7	2,9	3,1	3,2	3,4	3,6	3,9	4,2	4,7	5,7	−14
10	2,5	2,7	2,8	3,0	3,1	3,2	3,3	3,5	3,6	3,9	4,2	4,9	−17
11	2,8	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,7	4,0	−19
12	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	−20
13	3,4	3,3	3,2	3,1	3,1	3,0	3,0	2,9	2,8	2,7	2,5	2,1	−19
14	3,6	3,5	3,3	3,2	3,1	3,0	2,8	2,7	2,5	2,3	1,9	1,2	−17
15	3,9	3,6	3,4	3,2	3,1	2,9	2,7	2,5	2,3	2,0	1,4	0,5	−14
16	4,0	3,7	3,5	3,3	3,1	2,9	2,7	2,4	2,1	1,7	1,1	0,1	−10
17	4,2	3,8	3,5	3,3	3,1	2,8	2,6	2,3	2,0	1,5	0,8	0,5	−5
18	4,2	3,8	3,6	3,3	3,1	2,8	2,6	2,3	2,0	1,5	0,8	0,6	0
19	4,2	3,8	3,5	3,3	3,1	2,8	2,6	2,3	2,0	1,5	0,8	0,5	+5
20	4,0	3,7	3,5	3,3	3,1	2,9	2,7	2,4	2,1	1,7	1,1	0,1	+10
21	3,9	3,6	3,4	3,2	3,1	2,9	2,7	2,5	2,3	2,0	1,4	0,5	+14
22	3,6	3,5	3,3	3,2	3,1	3,0	2,8	2,7	2,5	2,3	1,9	1,2	+17
23	3,4	3,3	3,2	3,1	3,1	3,0	3,0	2,9	2,8	2,7	2,5	2,1	+19
24	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	+20

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ.

1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΟΡΙΑ-ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

1.1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Εστω δύο μή κενά σύνολα X καί Y. Αν σε κάθε στοιχείο x τού συνόλου X αντιστοιχεί ένα καί μόνο στοιχείο y του συνόλου Y, δηλαδή

$$\forall x \in X \longrightarrow y \in Y$$

τότε λέμε ότι στο σύνολο X ορίζεται <u>συνάρτηση</u> f (απεικόνιση) με σύνολο τιμών στο Y:

$$X \xrightarrow{f} Y \quad \text{ή} \quad f: X \to Y.$$

Η συνάρτηση επίσης συμβολίζεται με τον τύπο:

$$y = f(x)$$

όπου x ονομάζεται μεταβλητή καί $f(x)$ τιμή της συναρτήσεως.

(η $y_0 = f(x_0)$ είναι μία συγκεκριμένη (μερική) τιμή της συναρτήσεως)

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ της συναρτήσεως $y = f(x)$ ονομάζεται το σύνολο των τιμών της μεταβλητής x στις οποίες η συνάρτηση παίρνει τιμή πραγματικού αριθμού.

Το πεδίο ορισμού συμβολίζεται με $\Delta(f)$.

ΠΕΔΙΟ ΤΙΜΩΝ της συναρτήσεως $y = f(x)$ ονομάζεται το σύνολο όλων των $y \in Y$ στις οποίες υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$.

Το πεδίο τιμών συμβολίζεται με $E(f)$.

Στα επόμενα θα θεωρούμε $X \subseteq R$, $Y \subseteq R$, δηλαδή θά μελετήσουμε μόνο πραγματικές συναρτήσεις.

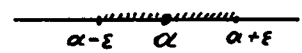
<u>Διάστημα</u> (a, b) ονομάζεται το σύνολο των x που ικανοποιεί τις ανισώσεις $a < x < b$.

<u>Κλειστό διάστημα</u> $[a, b]$ ονομάζεται το σύνολο των x

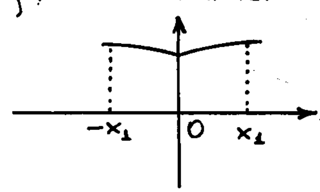
που ικανοποιεί τις ανισώσεις $\alpha \leq x \leq \beta$.

Υπάρχουν διάφορα διαστήματα όπως: $(-\infty, +\infty)$, $[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$, $(\alpha, +\infty)$, $(-\infty, \alpha)$.

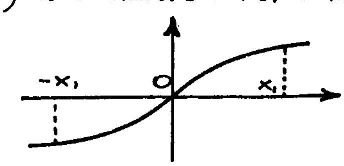
<u>ε-περιοχή</u> του σημείου α στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ονομάζεται κάθε διάστημα της μορφής $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ που περικλείει το σημείο $x=\alpha$.



Η συνάρτηση $y=f(x)$ ονομάζεται <u>άρτια</u> αν για κάθε $x \in \Delta(f)$ η τιμή $-x \in \Delta(f)$ και ικανοποιεί την συνθήκη $f(x)=f(-x)$.



Η συνάρτηση $y=f(x)$ ονομάζεται <u>περιττή</u> αν για κάθε $x \in \Delta(f)$, η τιμή $-x \in \Delta(f)$ και ικανοποιεί την συνθήκη $f(x)=-f(-x)$.



111. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ: Η συνάρτηση $y=f(x)$ ονομάζεται <u>αύξουσα</u> $(\uparrow)$ στο διάστημα $(\alpha, \beta) \subseteq \Delta(y)$, αν για κάθε $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ αληθεύουν οι συνεπαγωγές:

$$x_2 > x_1 \ (x_2 < x_1) \Longrightarrow f(x_2) > f(x_1) \ (f(x_2) < f(x_1))$$

Η συνάρτηση $y=f(x)$ ονομάζεται <u>φθίνουσα</u> $(\downarrow)$ στο διάστημα $(\alpha, \beta) \subseteq \Delta(y)$ αν για κάθε $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ αληθεύουν οι συνεπαγωγές:

$$x_2 > x_1 \ (x_2 < x_1) \Longrightarrow f(x_2) < f(x_1) \ (f(x_2) > f(x_1)).$$

Η συνάρτηση που είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα στο διάστημα $(\alpha, \beta) \subseteq \Delta(y)$ ονομάζεται <u>μονότονη</u> στο (α, β)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

181. Εστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1+x^2}$. Να βρεθούν οι τιμές: $f(0)$, $f(-x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$.

Λύση:

Αντικαθιστώντας το x με τις τιμές του, έχουμε:

$$f(0)=\sqrt{1+0^2}=\sqrt{1}=1$$

$$f(-x)=\sqrt{1+(-x)^2}=\sqrt{1+x^2}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \qquad (x\neq 0)$$

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

182 Εστω $f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}$. Να δείξετε ότι $f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

Λύση:

Έχουμε $f(y)=\log\frac{1+y}{1-y}$. Άρα:

$$f(x)+f(y)=\log\frac{1+x}{1-x}+\log\frac{1+y}{1-y}=\log\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1+y}{1-y}=$$

$$=\log\frac{1+xy+x+y}{1-xy-x-y}= (\text{διαιρώντας διά } 1+xy)=\log\frac{1+\frac{x+y}{1+xy}}{1-\frac{x+y}{1+xy}}=$$

$$=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

183. Εστω $f(x+1)=x^2-3x+2$. Να βρεθή η συνάρτηση $f(x)$.

Λύση:

Θέτουμε $x+1=t \Rightarrow x=t-1$.

οπότε $f(x+1)=f(t)=(t-1)^2-3(t-1)+2=$

$$=t^2-2t+1-3t+3+2=t^2-5t+6 \Rightarrow$$

$$f(x)=x^2-5x+6$$

184. Εστω η συνάρτηση $f(x)$ που δίδεται με την μορφή:

$$f(x)=\begin{cases} \eta\mu x & \forall x\in[0,+\infty) \\ \sigma\upsilon\nu x & \forall x\in(-\infty,0) \end{cases}$$

Νά βρεθούν οι τιμές των: $f(0), f(\pi), f\left(\frac{3\pi}{2}\right), f\left(-\frac{\pi}{4}\right), f(-\pi), f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση:

Επειδή $0\in[0,+\infty)$ έχουμε $f(0)=ημ0=0$. Ομοίως, $\pi\in[0,+\infty)$ άρα $f(\pi)=ημ\pi=0$.

$\frac{3\pi}{2}\in[0,+\infty)$, άρα $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=ημ\frac{3\pi}{2}=-1$.

$-\frac{\pi}{4}\in(-\infty,0)$, άρα $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=συν\left(-\frac{\pi}{4}\right)=συν\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\pi\in(-\infty,0)$, άρα $f(-\pi)=συν(-\pi)=συν\pi=-1$.

$-\frac{\pi}{2}\in(-\infty,0)$, άρα $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=συν\left(-\frac{\pi}{2}\right)=συν\frac{\pi}{2}=0$.

185. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $f(x)=\sqrt{x^2+2}$.

Λύση:

Η τετραγωνική ρίζα υπάρχει όταν $x^2+2\geqslant 0$ που ικανοποιείται για οποιαδήποτε τιμή του $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή $Δ(f)=(-\infty,+\infty)$

186. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $f(x)=\sqrt{6x-x^2-5}$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η ρίζα $\sqrt[2ν]{x}$ ορίζεται όταν ισχύει η σχέση $x\geqslant 0$ $\forall ν\in N$. Πρέπει λοιπόν $6x-x^2-5\geqslant 0 \iff x^2-6x+5\leqslant 0 \iff (x-5)(x-1)\leqslant 0$. Άρα $Δ(f)=[1,5]$ (βλ. και σχήμα):

187. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $y=\frac{x}{x^2-3x-4}$.

Λύση

Πρέπει $x^2-3x-4\neq 0$ ή $(x-4)(x+1)\neq 0 \Rightarrow x\neq 4,\ x\neq -1$.

Άρα $Δ(f)=\mathbb{R}-\{4,-1\}$.

188. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $y=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{2+x}}$

Λύση

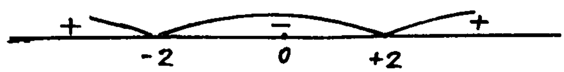
Πρέπει $-x\geqslant 0$ και $2+x>0$ ή $x\leqslant 0$ και $x>-2$. Η τομή αυτών των συνόλων είναι $-2<x\leqslant 0$, άρα $Δ(y)=(-2,0]$.

189. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $y=\log(x^2-4)$.

Λύση:

Η λογαριθμική συνάρτηση $y=\log x$ ορίζεται όταν $x>0$, συνεπώς πρέπει $x^2-4>0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)>0$, απ' όπου

$\Delta(f)=\mathbb{R}-\{[-2,2]\}$.



190 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $y=\log\frac{2+x}{2-x}$

Λύση.

Η συνάρτηση ορίζεται αν $\frac{2+x}{2-x}>0$, $x\neq 2$.

$\Leftrightarrow (2+x)(2-x)>0$. Άρα $\Delta(f)=(-2,2)$

191 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $y=\log\frac{x^2-3x+2}{x+1}$

Λύση

Πρέπει $\frac{x^2-3x+2}{x+1}>0$, $x+1\neq 0 \Leftrightarrow (x^2-3x+2)(x+1)>0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1)>0$. Άρα $\Delta(f)=(-1,1)\cup(2,+\infty)$

192. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $y=\sqrt{\eta\mu 2x}$.

Λύση

Πρέπει $\eta\mu 2x\geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi\leq 2x\leq 2k\pi+\pi \Leftrightarrow$

$k\pi\leq x\leq k\pi+\frac{\pi}{2}$ όπου $k\in Z$.

Έτσι $\Delta(f)=\left[k\pi, k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$, $k\in Z$.

193. Να διαπιστώσετε ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιές περιττές:

α') $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$ β') $f(x)=\log\frac{2+x}{2-x}$

γ') $y=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$ δ') $f(x)=\sqrt[3]{(1-2x)^2}$

Λύση

α') Σύμφωνα με τον ορισμό πρέπει να ελέγξουμε την $f(-x)$, όταν $-x \in \Delta(f)$.

Έχουμε $f(-x)=\frac{1}{2}\left(a^{-x}+a^{x}\right)=\frac{1}{2}\left(a^{x}+a^{-x}\right)=f(x)$

άρα η συνάρτηση είναι άρτια.

β') $f(-x)=\log\frac{2-x}{2+x}=\log\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{-1}=-\log\frac{2+x}{2-x}=-f(x)$.

άρα η συνάρτηση είναι περιττή.

γ') $y(-x)=\sqrt{1+(-x)^2}-\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}=y(x)$

άρα η συνάρτηση είναι άρτια.

δ') $f(-x)=\sqrt[3]{[1-2(-x)]^2}=\sqrt[3]{(1+2x)^2}$. Η συνάρτηση δέν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

194. Έστω η συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται σε διάστημα συμμετρικό ως πρός την αρχή των συντεταγμένων. Να δείξετε ότι:

α') Η συνάρτηση $F_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ είναι άρτια.

β') Η συνάρτηση $F_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ είναι περιττή

195. Δίδονται οι συναρτήσεις $f(x)=10^x$, $\phi(x)=\eta\mu^3 2x+3$ Να βρεθούν:

α') $\dfrac{\phi(0)+f(1)}{\phi(\pi)-f(0)}$ (ΑΠ: 17,

β') $\dfrac{f(2)+\phi\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f(3)-\phi\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$ (ΑΠ.: $\frac{103}{1.000}$)

1.1.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Γραφική παράσταση (γράφημα) της συναρτήσεως $y=f(x)$ ονομάζεται το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ ή
$\Gamma = \{(x, f(x)) : y = f(x)\}$.

Για την κατασκευή της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως $y=f(x)$ εργαζόμεθα ως εξής:

α΄) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως.

β΄) Βρίσκουμε τα σημεία τομής με τούς άξονες των συντεταγμένων $x=0$, $y=y_0$ και $y=0$, $x=x_0$.

γ΄) Αν η συνάρτηση είναι περιττή, τότε η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως πρός την αρχή των συντεταγμένων και κατασκευάζουμε το γράφημα γιά $x \geqslant 0$.

Αν η συνάρτηση είναι άρτια, τότε η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως πρός τον άξονα OY (άξονας τεταγμένων) και κατασκευάζουμε το γράφημα για $x \geqslant 0$.

δ΄) Αν η συνάρτηση είναι περιοδική τότε κατασκευάζουμε την γραφική παράσταση σέ διάστημα μήκους μιάς περιόδου T και μετά μεταφέρεται κατά μήκος τοῦ άξονα OX.

ε΄) Κατασκευάζουμε πίνακα τιμών x, y.

1.1.3. ΣΥΝΘΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.

Θεωροῦμε δύο συναρτήσεις $y=g(x)$ και $z=\varphi(y)$, οπου $\Delta(\varphi(y)) \geq E(g(x))$, δηλαδή το πεδίον ορισμοῦ της συναρτήσεως $z=\varphi(y)$ περικλείει το πεδίο τιμών της συναρτήσεως $y=g(x)$.

Η συνάρτηση $z=\varphi(g(x))$ ονομάζεται <u>σύνθετη συνάρτηση</u>. Συμβολίζεται επίσης και ως εξής: $\varphi(x) \circ g(x) = \varphi(g(x))$.

1.1.4. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Θεωροῦμε την συνάρτηση $y=f(x)$ που έστω ότι έχει πεδίο ορισμοῦ $\Delta = X$ και πεδίο τιμών $E = Y$

Αν σε κάθε σημείο $y \in Y$ αντιστοιχεί μοναδικό στοιχείο $x \in X$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$ τότε αυτή η αντιστοιχία (απεικόνιση) ορίζει κάποια συνάρτηση $x = g(y)$ που ονομάζεται αντίστροφη ως προς την $y = f(x)$. Η αντίστροφη συνάρτηση συμβολίζεται επίσης και έτσι: $g(y) = f^{-1}$.

Αν στην αντίστροφη συνάρτηση αντικαταστήσουμε τό x με τό y τότε αυτή θα πάρει την μορφή $y = g(x)$ που: και αυτή είναι αντίστροφη.

Η γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης $y = g(x)$ είναι συμμετρική της γραφικής παραστάσεως $y = f(x)$ ως πρός τήν διχοτόμο της πρώτης και τρίτης ορθής γωνίας του ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων XOY $(y = x)$.

Ικανή συνθήκη υπάρξεως αντίστροφης συνάρτησης στό διάστημα (a, b) είναι η μονοτονία στό (a, b).

1.15. ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

I. Δυναμική συνάρτηση $y = x^a$

Τό πεδίο ορισμού της γιά κάθε a περιέχει το διάστημα $(0, +\infty)$. Τό σημείο 0 ανήκει στό διάστημα αυτό αν $a > 0$ και δεν ανήκει αν $a < 0$.

Τό διάστημα $(-\infty, 0)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού. Όταν π.χ. $a = \pm 1$, $a = \pm 2, \ldots, a = \pm \frac{1}{3}, \ldots, a = \pm \frac{1}{2\nu+1}$.

II. Εκθετική συνάρτηση $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$. Τό πεδίο ορισμού της είναι τό $(-\infty, +\infty)$

III. Λογαριθμική συνάρτηση $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$. Τό πεδίο ορισμού της είναι $(0, +\infty)$. Αν $a = e$ τότε $y = \ln x$.

IV. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$y = \eta\mu x$ με πεδίο ορισμού $(-\infty, +\infty)$
$y = \sigma\upsilon\nu x$ με πεδίο ορισμού $(-\infty, +\infty)$
$y = \varepsilon\varphi x$ με πεδίο ορισμού $R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$
$y = \sigma\varphi x$ με πεδίο ορισμού $R - (k\pi, k \in Z)$.

V Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$y = \tau o\xi\eta\mu x$ με πεδίο ορισμού $|x| \leq 1$ ή $\Delta = [-1, 1]$.
$y = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu x$ με πεδίο ορισμού $|x| \leq 1$ η $\Delta = [-1, 1]$.
$y = \tau o\xi\varepsilon\varphi x$ με πεδίο ορισμού $(-\infty, +\infty)$
$y = \tau o\xi\sigma\varphi x$ με πεδίο ορισμού $(-\infty, +\infty)$

VI Πολυωνυμική (ακεραία) συνάρτηση: Ονομάζεται η συνάρτηση της μορφής:

$$y = a_0 x^{\nu} + a_1 x^{\nu-1} + a_2 x^{\nu-2} + \ldots + a_{\nu} \quad \text{όπου } a_1, a_2, \ldots, a_{\nu}$$

πραγματικοί αριθμοί, $\nu \in N$.

VII. Ρητή συνάρτηση: Ονομάζεται η συνάρτηση της μορφής:

$$f(x) = \frac{a_0 x^{\nu} + a_1 x^{\nu-1} + \ldots + a_{\nu} x}{\beta_0 x^{\mu} + \beta_1 x^{\mu-1} + \ldots + \beta_{\mu} x}, \text{ όπου } \nu \in N, \mu \in N \text{ και } \beta_0 x^{\mu} + \beta_1 x^{\mu-1} + \ldots + \beta_{\mu} \neq 0.$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

196 Να γίνει η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $y = x^3 - 3x$.

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού είναι $\Delta = (-\infty, +\infty)$

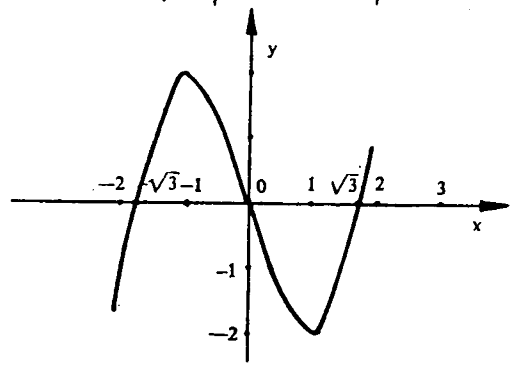
β) $y(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -y(x)$.

Άρα η συνάρτηση είναι περιττή.

γ) $y = x^3 - 3x = x(x^2-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$, δηλαδή τα σημεία τομής με τους άξονες συντεταγμένων είναι $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$, $(-\sqrt{3},0)$

Συμπληρωματικά κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα

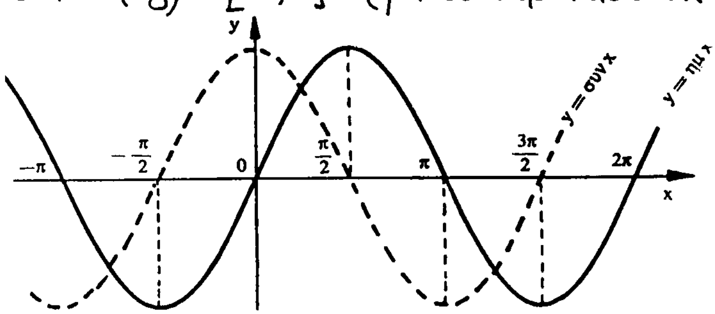
x	y
0	0
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{3}{8}$
1	-2
3	18



197. Να ορίσετε την συνάρτηση $y = \text{τοξημ}x$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $y = \eta\mu x$ όπου $\Delta(y) = (-\infty, +\infty)$ και $E(y) = [-1, 1]$ (βλ. το παρακάτω σχήμα). Αυτή είναι μονότονη στα διαστήματα $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right], k \in \mathbb{Z}$ συνεπώς στα διαστήματα αυτά είναι αντιστρέψιμη. Παίρνουμε ένα διάστημα



$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και ορίζουμε αντίστροφη συνάρτηση ως εξής:

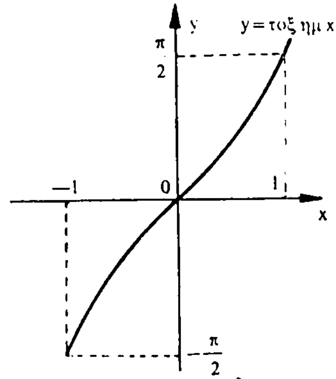
$f^{-1} : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ή $x = \text{τοξημ}y$

Εναλλάσουμε τώρα τα x με y και παίρνουμε την συνάρτηση $y = \text{τοξημ}x$ όπου $\Delta(\text{τοξημ}x) = [-1, 1]$,

$E(\text{τοξημ}x) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Βλέπουμε ακόμη ότι

$y(-x) = \text{τοξημ}(-x) = -\text{τοξημ}x = -y(x)$, δηλαδή είναι περιττή.

x	y
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{2}$



198. Να ορίσετε την συνάρτηση $y=$ τοξσυνx και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Λύση.

Θεωρούμε την συνάρτηση $y=$ συνx όπου $\Delta(y)=(-\infty,+\infty)$ και $E(y)=[-1,1]$. Τα διαστήματα μονοτονίας είναι $[k\pi, k\pi+\pi]$.

Στο διάστημα $[0,\pi]$ ορίζουμε την αντίστροφη συνάρτηση

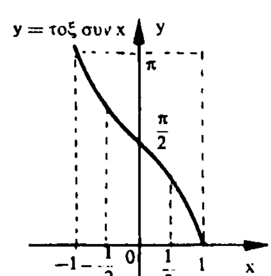
$f^{-1}:[-1,1]\longrightarrow[0,\pi]$ ή $x=$ τοξσυνy

Εναλλάσσουμε τώρα τα x με y και έχουμε $y=$ τοξσυνx όπου

$\Delta(y)=[-1,1]$ και $E(y)=[0,\pi]$

Η συνάρτησή μας δεν είναι ούτε περιττή ούτε άρτια διότι τοξσυν$(-x)=\pi-$ τοξσυνx

x	y
0	$\pi/2$
½	$1{,}1=\pi/3$
1	0
−1	π



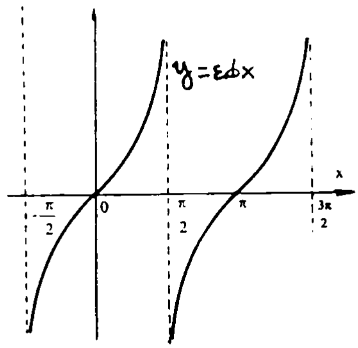
199. Να ορίσετε την συνάρτηση $y=$ τοξεφx και να γίνει η γραφική της παράσταση.

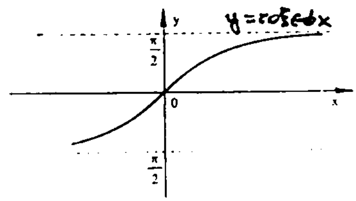
Λύση

Θεωρούμε την $y=$ εφx όπου $\Delta(y)=R-\left\{\frac{\pi}{2}(2k\pi+1)\right\}$ και $E(y)=(-\infty,+\infty)$. Τα διαστήματα μονοτονίας είναι

$\left(k\pi - \frac{\pi}{2} , k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

Ορίζουμε αντίστροφη συνάρτηση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με την μορφή: $f^{-1}: (-\infty, \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ή $x =$ τοξεφy.





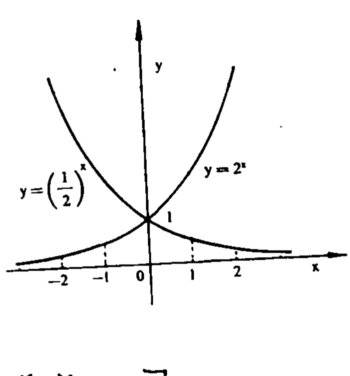
Εναλλάσσουμε τα x με y και γράφουμε $y =$ τοξεφx που έχει $\Delta(y) = (-\infty, +\infty)$ και $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Βλέπουμε ακόμη ότι $y(-x) =$ τοξεφ$(-x) = -$τοξεφ$x = -y(x)$. Άρα είναι περιττή συνάρτηση.

200. Να γίνει η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Λύση

Το πεδίο ορισμού είναι $\Delta(y) = (-\infty, +\infty)$. Η συνάρτησή μας είναι θετική, δηλαδή $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0 \ \forall x \in \Delta$. Όταν $x=0$ έχουμε $y=1$. Η συνάρτηση είναι φθίνουσα στο $\Delta(y)$ διότι για $x_2 > x_1 \Rightarrow$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} =$

x	y
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
−1	2
−2	4
−3	8



$= \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2 - x_1} - 1\right] < 0$ δηλαδή $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}$

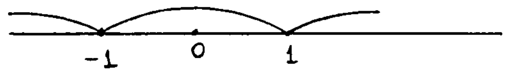
Σημείωση: Ομοίως κατασκευάζεται και η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $y = 2^x$.

201. Να γίνη η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $y = |x-1| - 2|x+1|$.

Λύση

Τό πεδίο ορισμού είναι $\Delta = (-\infty, +\infty)$. Χωρίζουμε τον άξονα στα διαστήματα:

$(-\infty, -1)$, $[-1, 1)$ και $[1, +\infty)$



Στο διάστημα $[1, +\infty)$ έχουμε $x-1 \geqslant 0 \quad x+1 \geqslant 0$.

άρα $y = x-1-2x-2 = -x-3$

Στό διάστημα $[-1, 1)$ έχουμε $x-1<0$, $x+1>0$

άρα $y = -x+1-2x-2 = -3x-1$.

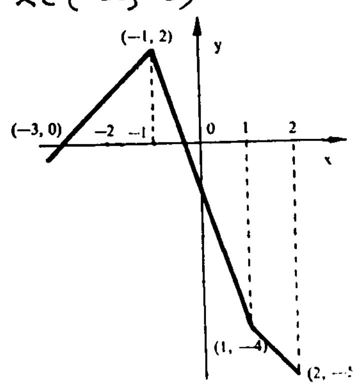
Στο διάστημα $(-\infty, 1)$ έχουμε $x-1<0$, $x+1<0$.

άρα $y = -x+1+2x+2 = x+3$.

Έτσι πήραμε:

$$y = \begin{cases} -x-3 & \text{όταν } x \in [1, +\infty) \\ -3x-1 & \text{όταν } x \in [-1, 1) \\ x+3 & \text{όταν } x \in (-\infty, -1) \end{cases}$$

Βρίσκουμε τα σημεία $(-1, 2)$, $(1, -4)$ και από ένα σημείο των διαστημάτων $(-\infty, -1)$ και $[1, +\infty)$. π.χ. τά $(-3, 0)$ και $(2, -5)$. Άρα έχουμε το παραπλεύρως γράφημα.



202. Δίδονται οι συναρτήσεις $\phi(x) = x^2$ και $f(x) = 2^x$. Να βρεθεί η σύνθετη συνάρτηση $\phi(x) \circ f(x)$ καθώς και η $f(x) \circ \phi(x)$

Λύση

Έχουμε: $\phi(x) \circ f(x) = \phi(f(x)) = (2^x)^2 = 2^{2x}$

$f(x) \circ \phi(x) = f(\phi(x)) = 2^{x^2}$.

203. Δίδονται οι συναρτήσεις $\phi(x) = $ τοξημx και $f(x) = x^2+4x+6$.

Είναι δυνατή η σύνδεση των συναρτήσεων $\phi(x)\circ f(x)$;

Λύση

Τυπικά μπορούμε νά γράψουμε:

$$\phi(x)\circ f(x) = \phi(f(x)) = \text{τοξημ}\,(x^2+4x+6)$$

Όμως το πεδίο τιμών της συναρτήσεως $f(x) = x^2+4x+6 =$
$= (x+2)^2+2$ είναι $E(f(x)) = [2,+\infty)$

Το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $\phi(x) = \text{τοξημ}x$ είναι $\Delta(\phi) = [-1, 1]$. Παρατηρούμε ότι το $E(f)$ δεν περικλείεται στο $\Delta(\phi)$ και επομένως δεν ορίζεται η σύνδεση των συναρτήσεων αυτών.

204. Να βρεθούν οι αντίστροφες συναρτήσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

α΄) $y=1+x$ β΄) $y=x^2-1$ γ΄) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$

δ) $y=\log\frac{x}{2}$.

Λύση

α) Έχουμε $y=1+x \Rightarrow x=y-1$. Εναλλάσσουμε τα x καί y και έχουμε $y=x-1$ που είναι η ζητουμένη αντίστροφη συνάρτηση.

β΄) $y=x^2-1 \Rightarrow x^2=y+1 \Rightarrow x=\sqrt{y+1}$, $x=-\sqrt{y+1}$

η $y=\sqrt{x+1}$, $y=-\sqrt{x+1}$. $\Delta(y)=[-1,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι πήραμε δύο αντίστροφες συναρτήσεις διότι η συνάρτηση $y=x^2-1$ έχει δυο διαστήματα μονοτονίας: Στο $[0,+\infty)$ είναι αύξουσα, στο $(-\infty,0)$ είναι φθίνουσα.

γ΄) $y=\sqrt[3]{1-x^3} \Rightarrow 1-x^3=y^3 \Rightarrow x^3=1-y^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{1-y^3}$ ή τελικά $y=\sqrt[3]{1-x^3}$ όπου $\Delta(y)=(-\infty,+\infty)$

δ΄) $y=\log\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2}=10^y \Rightarrow x=2\cdot10^y$ ή $y=2\cdot10^x$ όπου

$\Delta(y)=(-\infty,+\infty)$ και $E(y)=(0,+\infty)$.

205. Δίδεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{1-x}$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f(f(x))$ και $f(f(f(x)))$.

Λύση:

Έχουμε $f(f(x))=\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=-\dfrac{1-x}{x}$, $x\neq 0$, $x\neq 1$.

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{1-f(f(x))}=\frac{1}{1+\frac{1-x}{x}}=x\ ,\ x\neq 0,\ x\neq 1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να κατασκευασθούν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

206. $y=2+(x-1)^3$

207. $y=\log|x-1|$

208. $y=-|x-2|$

209. $y=|x|-x$

210. $y=|x-1|$

211. $y=\frac{1}{2}(x+|x|)$

212. $y=\sqrt{x+2}$

213. $y=2+x-x^2$

214. $y=x^2+1$

215. $y=2x-x^3$

216. $y=|x^2-1|$

217. $y=\log|x|$

218. $y=(x-2)^3+5$

219. $y=\eta\mu(x+1)+2$

220. $y=2^{x+1}+1$

221. $y=\log(x-1)+2$.

222. $y=\frac{|x|}{x}$

1.2. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ:

1ο: Ακολουθία ονομάζεται η συνάρτηση f που ορίζεται στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Στην γενική της μορφή η ακολουθία συμβολίζεται: $f(1), f(2), \ldots, f(\nu), \ldots$

Αν $f(\nu) = a_\nu$, τότε η ακολουθία γράφεται: $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$

Ο όρος a_ν ονομάζεται <u>γενικός όρος</u> της ακολουθίας.

2ο: Η ακολουθία a_ν ονομάζεται <u>αύξουσα</u> αν $\forall \nu \in N \ a_{\nu+1} > a_\nu$

3ο: Η ακολουθία a_ν ονομάζεται <u>φθίνουσα</u> αν $\forall \nu \in N \ a_{\nu+1} < a_\nu$

4ο: Η ακολουθία ονομάζεται <u>περιωρισμένη (φραγμένη) απ' τα πάνω</u> αν υπάρχει αριθμός M τέτοιος ώστε $\forall \nu \in N \ a_\nu \leq M$.

5ο: Η ακολουθία ονομάζεται <u>περιωρισμένη (φραγμένη) απ' τα κάτω</u> αν υπάρχει αριθμός k τέτοιος ώστε $\forall \nu \in N \ a_\nu \geq k$.

6ο: Η ακολουθία ονομάζεται <u>περιωρισμένη</u> αν αυτή είναι περιωρισμένη απ' τα πάνω και απ' τα κάτω, δηλαδή υπάρχουν αριθμοί M και k τέτοιοι ώστε $\forall \nu \in N \ \ k \leq a_\nu \leq M$.

Αν θέσουμε $B = \max\{|k|, |M|\}$, τότε η ακολουθία θα ονομάζεται <u>περιωρισμένη</u> αν υπάρχει αριθμός $B > 0$ τέτοιος ώστε $\forall \nu \in N$ να ισχύει η ανίσωση $|a_\nu| \leq B$.

2.1. ΟΡΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ:

Ο αριθμός a ονομάζεται <u>οριο της ακολουθίας</u> a_ν αν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει τετοιος φυσικός αριθμός $N(\varepsilon)$ ώστε $\forall \nu > N(\varepsilon)$ να ισχύει η ανίσωση $|a_\nu - a| < \varepsilon$ και γράφουμε:

$$\lim_{\nu \to \infty} a_\nu = a \quad \text{ή} \quad a_\nu \to a \quad \text{όταν } \nu \to \infty$$

Με άλλα λόγια ο αριθμός a ονομάζεται οριο της ακολουθίας a_ν
$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists N = N(\varepsilon))(\forall \nu > N) \ |a_\nu - a| < \varepsilon$.

Γεωμετρική ερμηνεία του οριου ακολουθίας:

Εκ του ορισμού του ορίου έχουμε, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε $\forall \nu > N(\varepsilon)$
$|a_\nu - a| < \varepsilon$ δηλαδή $-\varepsilon < a_\nu - a < \varepsilon \iff a - \varepsilon < a_\nu < a + \varepsilon$

Όλοι οι όροι της ακολουθίας a_ν αρχίζοντας από το $\nu > N$ $(a_{N+1},$

, $a_{N+2}, \dots$) πέφτουν στο διάστημα $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ όπως φαίνεται στο σχήμα :

Εκτός του διαστήματος αυτού θα βρίσκεται πεπερασμένο πλῆθος όρων.

Μηδενική Ακολουθία

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η ακολουθία a_ν ονομάζεται <u>μηδενική</u> αν το όριο της ισούται με μηδέν. Δηλαδή $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 0 \iff (\forall\varepsilon>0)(\exists N(\varepsilon))\ (\forall \nu > N(\varepsilon))$
$|a_\nu - 0| < \varepsilon$ δηλ. $|a_\nu| < \varepsilon$.

Συγκλίνουσα Ακολουθία

ΟΡΙΣΜΟΣ: Όταν μία ακολουθία έχει όριο ονομάζεται <u>συγκλίνουσα ακολουθία</u>. Όταν μία ακολουθία δεν έχει όριο ονομάζεται <u>μη συγκλίνουσα (αποκλίνουσα)</u> ακολουθία

1.2.2. Θεωρήματα ορίων Ακολουθιών

Αν οι ακολουθίες a_ν και β_ν συγκλίνουν, τότε:

α') $\lim\limits_{\nu\to\infty} (a_\nu + \beta_\nu) = \lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu + \lim\limits_{\nu\to\infty} \beta_\nu$

β') $\lim\limits_{\nu\to\infty} (a_\nu \cdot \beta_\nu) = \lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu \cdot \lim\limits_{\nu\to\infty} \beta_\nu$

γ') $\lim\limits_{\nu\to\infty} (c \cdot a_\nu) = c \cdot \lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu$, όπου $c =$ σταθερό

δ') Αν $\lim\limits_{\nu\to\infty} \beta_\nu \neq 0$ τότε $\lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{a_\nu}{\beta_\nu} = \dfrac{\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu}{\lim\limits_{\nu\to\infty} \beta_\nu}$.

1.2.3. Ακολουθία που το όριο τείνει στο άπειρο

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η ακολουθία a_ν ονομάζεται ακολουθία με όριο το άπειρο (<u>απειρίζουσα</u>) αν $\forall A>0$ μπορεί να βρεθεί τέτοιος φυσικός αριθμός $N(\varepsilon)$ ώστε $\forall \nu > N(\varepsilon)$ να ισχύει η ανίσωση
$|a_\nu| > A$ και γράφουμε: $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = \infty$

Ισχύουν οι εξής δύο χρήσιμες σχέσεις:

i) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{c}{a_\nu} = 0$, όταν a_ν είναι απειρίζουσα ακολουθία $(\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = \infty)$

ii) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{c}{a_\nu} = \infty$, όταν a_ν είναι μηδενική ακολουθία $(\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 0)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

223. Να δειχθεί ότι αν $\alpha_\nu = \frac{3\nu-1}{\nu}$ τότε $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = 3$.

Λύση

Εκ του ορισμού του ορίου έπεται ότι πρέπει να βρεθεί τέτοιος φυσικός αριθμός N ώστε $\forall \varepsilon > 0 \quad |\alpha_\nu - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$$\left|\frac{3\nu-1}{\nu} - 3\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-1}{\nu}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\nu} < \varepsilon \Leftrightarrow \nu > \frac{1}{\varepsilon}$$

Επειδή μας ενδιαφέρουν μόνο οι φυσικοί αριθμοί, λαμβάνουμε $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, όπου $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ είναι το ακέραιο μέρος του αριθμού $\frac{1}{\varepsilon}$. Έτσι για κάθε $\nu > N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ισχύει η $|\alpha_\nu - 3| < \varepsilon$ ώστε $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{3\nu-1}{\nu} = 3$.

224. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{3\nu+1}{2\nu-1} = \frac{3}{2}$

Λύση

Έχουμε $\forall \varepsilon > 0 \left|\frac{3\nu+1}{2\nu-1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$$\left|\frac{6\nu+2-6\nu+3}{2(2\nu-1)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{5}{2(2\nu-1)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow 5 < \varepsilon(4\nu-2) \Leftrightarrow$$

$$\nu > \frac{5+2\varepsilon}{4\varepsilon} \Leftrightarrow \nu > \frac{2{,}5+\varepsilon}{2\varepsilon}$$

Έτσι $\forall \nu > N = \frac{2{,}5+\varepsilon}{2\varepsilon}$ ισχύει η ανίσωση $\left|\frac{3\nu+1}{2\nu-1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$.

225. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu^2+1}$ είναι μηδενική.

Λύση

Εξετάζουμε την ανίσωση $\frac{1}{\nu^2+1} < \varepsilon$. Επειδή $\nu^2+1 > \nu^2 \Leftrightarrow$ $\frac{1}{\nu^2+1} < \frac{1}{\nu^2} \leq \frac{1}{\nu}$. Έτσι η ανίσωση $\frac{1}{\nu^2+1} < \varepsilon$ εκπληρώνεται όταν $\frac{1}{\nu} < \varepsilon \Leftrightarrow \nu > \frac{1}{\varepsilon}$.

Επομένως $\forall \nu > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ εκπληρώνεται η ανίσωση $\left|\frac{1}{\nu^2+1} - 0\right| < \varepsilon$ άρα η ακολουθία α_ν είναι μηδενική.

<u>Χρήσιμη πρόταση:</u> Κάθε μονότονη περιορισμένη ακολουθία έχει όριο (συγκλίνει).

226. Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{8\nu-3}{13-7\nu}$

Λύση

Ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι ακολουθίες που το όριό τους τείνει στο ∞, συνεπώς δεν μπορεί να εφαρμοσθεί το θεώρημα του ορίου ενός κλάσματος. Στην περίπτωση αυτή θα διαιρέσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή δια του ν.

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{8\nu-3}{13-7\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\frac{8-\frac{3}{\nu}}{\frac{13}{\nu}-7}=\frac{\lim 8-\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{3}{\nu}}{\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{13}{\nu}-\lim 7}$$

Επειδή δε $\lim 8=8$, $\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{3}{\nu}=0$, $\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{13}{\nu}=0$, $\lim 7=7$, έπεται

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{8\nu-3}{13-7\nu}=\frac{8}{-7}=-\frac{8}{7}.$$

227. Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{3\nu^2-3\nu-1}{4-5\nu-\nu^3}$

Λύση

Διαιρούντες δια ν^3 (διότι όπως και στην προηγούμενη άσκηση έχουμε $\frac{\infty}{\infty}$) παίρνουμε: $\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{3\nu^2-3\nu-1}{4-5\nu-\nu^3}=\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{\frac{3}{\nu}-\frac{3}{\nu^2}-\frac{1}{\nu^3}}{\frac{4}{\nu^3}-\frac{5}{\nu^2}-1}=$
$=\frac{0}{1}=0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

228. Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{1+2+3+\dots+\nu}{\nu^2}$

229. Να υπολογισθεί το όριο: $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sqrt{\nu^2+\nu+1}-\sqrt{\nu^2-\nu+1}\right)$

230. Να υπολογισθεί το όριο: $\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{\sqrt{\nu^2+1}+\sqrt{\nu}}{\sqrt[4]{\nu^3+\nu}-\sqrt{\nu}}$

Με την βοήθεια του ορισμού του ορίου ακολουθίας να δείξετε ότι αληθεύουν οι παρακάτω ισότητες:

231. $\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{2}{\nu^4}=0$

232. $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^\nu}\right)=1$

233. $\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{(-1)^\nu}{5^\nu}=0$

234. $\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{5\nu-1}{\nu+1}=5$

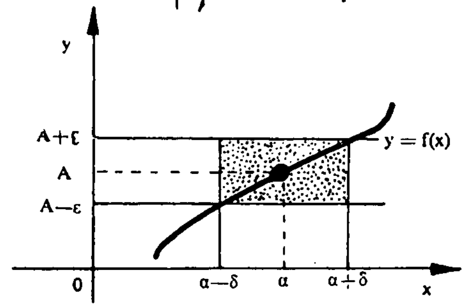
Να υπολογίσετε τα όρια:

235. $\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{3\nu^2+5\nu+4}{2+\nu^2}$ (Απ.: 3)

236. $\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{4\nu^2-4\nu+3}{2\nu^3+3\nu+4}$ (Απ.: 0).

13. ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ο αριθμός A ονομάζεται όριο της συναρτήσεως $f(x)$ με $x \to \alpha$, όταν $\forall \varepsilon > 0$ βρεθεί τέτοιος αριθμός $\delta > 0$ ώστε για όλες τις τιμές του $x \neq \alpha$ που ικανοποιούν την ανίσωση $0 < |x-\alpha| < \delta$, να αληθεύει η ανίσωση $|f(x) - A| < \varepsilon$



Γράφουμε $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = A$ ή $f(x) = A$ όταν $x \to \alpha$

<u>Παρατήρηση:</u> Το σημείο $x=\alpha$ στο οποίο εξετάζεται η συνάρτηση μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού Δ, μπορεί όμως και να μην ανήκει σ' αυτό. Η συνάρτηση πρέπει να ορίζεται στην περιοχή του σημείου α.

Η γεωμετρική σημασία του ορίου συναρτήσεως αποδίδεται στο παραπάνω σχήμα.

Ομοίως, ο αριθμός A ονομάζεται όριο της συναρτήσεως $f(x)$ με $x \to \infty$, αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ αριθμός $M(\varepsilon)$ τέτοιος ώστε όταν $|x| > M(\varepsilon)$, να αληθεύει η ανίσωση $|f(x) - A| < \varepsilon$ και γράφουμε $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Η συνάρτηση $\phi(x)$ ονομάζεται <u>συνάρτηση με όριο μηδέν</u> (απειροστό) όταν $x \to \alpha$, αν $\lim\limits_{x \to \alpha} \phi(x) = 0$ δηλαδή $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε όταν $0 < |x-\alpha| < \delta(\varepsilon)$ να αληθεύει η ανίσωση $|\phi(x)| < \varepsilon$

Η συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται συνάρτηση με όριο το άπειρο (απειρίζουσα) όταν $x \to \alpha$, αν $\forall N > 0$ υπάρχει τέτοιος αριθμός $\delta(N) > 0$ ώστε για όλες τις τιμές του $x \neq \alpha$ που ικανοποιούν την ανίσωση $0 < |x-\alpha| < \delta$, να αληθεύει η ανίσωση $|f(x)| > N$.

Ιδιότητες των ορίων

α') $\lim c = c$, όπου c σταθερά.

ϝ') $\lim_{x\to a} c f(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$

γ') Αν οι συναρτήσεις $\phi(x)$ και $f(x)$ έχουν όρια (συγκλίνουν) τότε:

γ'₁) $\lim_{x\to a}\left(\phi(x) \pm f(x)\right) = \lim_{x\to a}\phi(x) \pm \lim_{x\to a} f(x)$

γ'₂) $\lim_{x\to a} f(x)\cdot\phi(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a}\phi(x)$

γ'₃) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a}\phi(x)}$, $\left(\lim_{x\to a}\phi(x) \neq 0\right)$

γ'₄) $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\phi(x)} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim_{x\to a}\phi(x)}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

237. Να δείξετε ότι $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = 4$

Λύση

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ δεν ορίζεται στο $x=2$. Από τον ορισμό έχουμε ότι $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)>0$, $|x-2|<\delta \Rightarrow (x\neq 2)$

$|f(x)-4|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}-4\right|<\varepsilon \Leftrightarrow$

$|x-2|<\varepsilon$. Αν τώρα θέσουμε $\delta=\varepsilon$, τότε $\forall x$ που ικανοποιεί την ανίσωση $|x-2|<2$ αληθεύει η ανίσωση $\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon$ συνεπώς $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

238. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x-1$. Να δείξετε ότι $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$.

Λύση

Έχουμε $\forall\varepsilon>0$ $|2x-1-3|<\varepsilon \Leftrightarrow |2x-4|<\varepsilon \Leftrightarrow$

$2|x-2|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Αν τώρα θέσουμε $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ θα έχουμε $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\frac{\varepsilon}{2}$ ώστε $\forall x\neq 2$ που ικανοποιεί την ανίσωση $|x-2|<\delta$ αληθεύει η ανίσωση $|f(x)-3|<\varepsilon$ συνεπώς $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$.

239. Να δείξετε ότι $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = 1$.

Λύση

Εστω $\varepsilon>0$. Πρέπει να βρούμε τέτοιο $M>0$ ώστε $\forall x$ που ικανοποιεί την ανίσωση $|x|>M$ να αληθεύει η ανίσωση $\left|\frac{x^2}{1+x^2}-1\right|<\varepsilon$.

Πράγματι $\forall \varepsilon>0$ $\left|\frac{x^2}{1+x^2}-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-1}{1+x^2}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2}<\varepsilon$

Η τελευταία ανίσωση αληθεύει όταν $\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{x^2}<\varepsilon \Leftrightarrow$ $x^2>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |x|>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Αν τώρα θέσουμε $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}=M$, τότε $\forall x$ που ικανοποιεί την ανίσωση $|x|>M=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, αληθεύει και η ανίσωση $\left|\frac{x^2}{1+x^2}-1\right|<\varepsilon$ συνεπώς $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$.

240. Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

Λύση.

Οι ιδιότητες των ορίων εφαρμόζονται αν έχουν όρια οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-1$ και $\phi(x)=2x^2-x-1$ όταν $x\to 0$. Θέτουμε προς τούτο αντί x την οριακή τιμή του x, δηλαδή $x=0$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x^2-\lim 1}{2\lim\limits_{x\to 0}x^2-\lim\limits_{x\to 0}x-\lim 1}=\frac{0-1}{0-1}=1.$$

Υπολογισμός των ορίων συναρτήσεων.

Οπως είδαμε στην προηγούμενη άσκηση για τον υπολογισμό των ορίων πρέπει να θέσουμε αντί x την οριακή του τιμή, δηλαδή την τιμή πού τείνει. Είναι φανερό ότι πολλές φορές θα έχουμε σαν αποτέλεσμα της αντικαταστάσεως αυτής, εκφράσεις της μορφής

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^{\infty}.$$

οι εκφράσεις αυτές ονομάζονται συνήθως <u>αοριστίες</u> και αντιμετωπίζονται με διάφορους μετασχηματισμούς.

Σημειώνουμε ακόμη μερικούς χρήσιμους τύπους για τον υπολογισμό των ορίων.

1. $\lim\limits_{x\to a}\frac{c}{f(x)}=\infty$, αν $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ όπου c = σταθερά

2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{c}{f(x)}=0$, αν $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$

3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)}=0$, αν $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to a}\phi(x)=\infty$

241. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+10}$

Λύση

Έχουμε $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-x)=\lim\limits_{x\to\infty}x(2x-1)=\infty$ και $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+10)=\infty$ συνεπώς έχουμε αοριστία της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$ (Σ' αυτή την περίπτωση διαιρούμε με τον μεγιστοβάθμιο x , δηλαδή εδώ με το x^2)

Έτσι $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+10}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{10}{x^2}}=\frac{2-0}{1+0}=\frac{2}{1}=2$.

242. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$

Λύση

Διαιρούμε με x , επειδή έχουμε $\frac{\infty}{\infty}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}-6}{3+\frac{1}{x}}=\frac{-6}{3}=-2$.

243. Ομοίως να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x+5}{0,01x^2-6x}$

Λύση

Επειδή έχουμε $\frac{\infty}{\infty}$ έχουμε: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2}}{0,01-\frac{6}{x}}=\frac{0}{0,01}=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να υπολογίσετε τα όρια:

244. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$

245. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$

246. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2}{1-x^2}+2^{\frac{1}{x}}\right)$

247. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$

248. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+3}$

249. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$

250. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+3}$

251. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$

252 $\lim\limits_{x\to\infty}5^{\frac{2x}{x+3}}$

253. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

1.3.1 ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΑ ΟΡΙΑ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Εστω οτι η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται στο διάστημα (a,b). Ο αριθμός B ονομάζεται <u>δεξιό</u> (δεξιόπλευρο) όριο της συναρτήσεως $f(x)$ στο σημείο a, αν $\forall \varepsilon>0$ υπάρχει τέτοιο $\delta>0$ ώστε για κάθε x που ικανοποιεί την σχέση $a<x<a+\delta$ να ισχύει η ανίσωση $|f(x)-B|<\varepsilon$.

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=B \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0) \qquad (1)$$

Ομοίως ο αριθμός Γ ονομάζεται <u>αριστερό</u> (αριστερόπλευρο) όριο της συναρτήσεως $f(x)$ στο σημείο b αν $\forall \varepsilon>0$ υπάρχει τέτοιο $\delta>0$ ώστε για κάθε x που ικανοποιεί την σχέση $\beta-\delta<x<\beta$ να ισχύει η ανίσωση $|f(x)-\Gamma|<\varepsilon$

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{\substack{x\to \beta\\ x<\beta}} f(x)=\Gamma \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to \beta-0} f(x)=f(\beta-0) \qquad (2)$$

Από τον ορισμό συμπεραίνουμε ότι:

α) Αν υπάρχει όριο στο $x=x_0$, δηλαδή αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, τότε και τα μονόπλευρα όρια υπάρχουν και $f(x_0+0)=f(x_0-0)=A$.

β) Αντιστρόφως, αν τα μονόπλευρα όρια στο $x=x_0$ υπάρχουν και $f(x_0+0)=f(x_0-0)=A$ συνεπάγεται ότι υπάρχει και το όριο της συναρτήσεως και είναι $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$.

Επομένως: Για την διαπίστωση της υπάρξεως ορίου της συναρτήσεως $f(x)$ στο σημείο a είναι ικανό και αναγκαίο να ελεγχθεί η εκπλήρωση των εξής τριών συνθηκών: α) Ύπαρξη αριστερού ορίου β) Ύπαρξη δεξιού ορίου και γ) ισότητα μονοπλεύρων ορίων.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

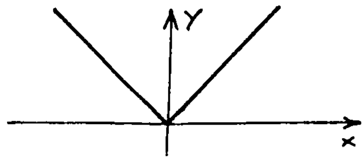
254. Να βρεθούν τα μονόπλευρα όρια της συναρτήσεως

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Λύση

$\Delta(f(x)) = (-\infty, +\infty)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (-x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0$



Έτσι $f(+0) = f(-0) = 0$ δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$.

255. Να βρεθούν τα μονόπλευρα όρια της συναρτήσεως

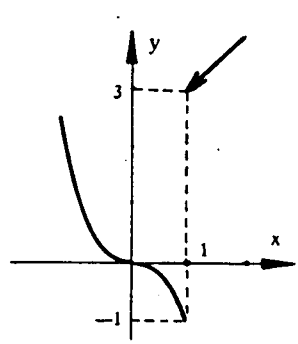
$$f(x) = \begin{cases} -x^3, & x \le 1 \\ 2+x, & x > 1 \end{cases}$$

Λύση

Βρίσκουμε τα μονόπλευρα όρια στο $x=1$

$$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (-x^3) = -1$$

$$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (2+x) = 3$$



Άρα $f(1+0) = 3 \neq f(1-0) = -1$, συνεπώς η συνάρτηση δεν έχει όριο (δεν συγκλίνει στο $x=1$ (βλ. και σχήμα).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

Να βρεθούν τα μονόπλευρα όρια των συναρτήσεων:

256. $f(x)=\frac{|x|+x}{x}$

257. $f(x)=\frac{x-1}{|x-1|}$

1.4. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η συνάρτηση $f(x)$, $x\in(\alpha,\beta)$ ονομάζεται <u>συνεχής</u> στο σημείο (θέση) $x_0\in(\alpha,\beta)$, όταν το όριο της συναρτήσεως $f(x)$ υπάρχει στο σημείο x_0 και ισούται με την τιμή της συναρτήσεως στο σημείο αυτό:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \qquad (1)$$

Έτσι για να είναι συνεχής η συνάρτηση $f(x)$ στο σημείο x_0 πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες:

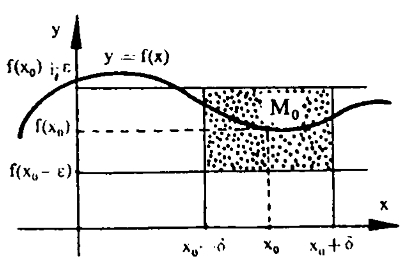
α') Η $f(x)$ πρέπει να είναι ορισμένη στο σημείο x_0

β') Να υπάρχει το όριο της συναρτήσεως στό σημείο x_0.

και γ') Το όριο της $f(x)$ στο σημείο x_0 να συμπίπτει με την τιμή της συναρτήσεως στο σημείο x_0

Στην περίπτωση που στό σημείο x_0 δεν ικανοποιείται έστω και μία από τις πάρα πάνω συνθήκες, τότε λέμε πως σ' αυτό το σημείο η συνάρτηση είναι <u>ασυνεχής</u>

Γεωμετρικώς η συνέχεια της συναρτήσεως $f(x)$ στο σημείο x_0 αποδίδεται με το παρακάτω σχήμα



Αν θέσουμε $x=x_0+\Delta x$ $(\Delta x=x-x_0)$ τότε η συνθήκη (1) γράφεται

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0) \implies$$

$\lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \right] = 0$ ή θέτοντας $\Delta f(x) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

έχουμε $\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0}$

όπου $\Delta f(x)$ ονομάζεται αύξηση της συναρτήσεως και Δx ονομάζεται αύξηση της μεταβλητής.

14.1. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η συνάρτηση ονομάζεται συνεχής στο διάστημα (α,β) αν αυτή είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος.

Στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ η συνάρτηση είναι συνεχής αν σε κάθε σημείο του (α,β) είναι συνεχής από δεξιά στο σημείο α και συνεχής από αριστερά στο σημείο β.

Το σημείο x_0 ονομάζεται σημείο <u>ασυνεχείας</u> (διακοπής) πρώτης κατηγορίας αν η συνάρτηση έχει στο σημείο αυτό πεπερασμένα όρια μονόπλευρα:

$$f(x_0+0) \neq f(x_0-0) \quad \text{ή} \quad f(x_0+0) = f(x_0-0) \neq f(x_0)$$

Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις το σημείο ασυνεχείας (διακοπής) ονομάζεται σημείο ασυνεχείας δευτέρας κατηγορίας.

14.2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

(Εξετάζουμε τις συναρτήσεις που ορίζονται σε κάποιο διάστημα (α,β))

I. Το άθροισμα πεπερασμένου πλήθους συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο $x=x_0$ αποτελεί συνάρτηση συνεχή στο σημείο αυτό.

II. Το γινόμενο πεπερασμένου πλήθους συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο σημείο x_0 αποτελεί συνάρτηση συνεχή στο σημείο αυτό.

III. Το πηλίκο δύο συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο σημείο x_0 είναι συνάρτηση συνεχής στο σημείο αυτό αν η συνάρτηση του παρονομαστή είναι διάφορη του μηδενός στο σημείο x_0.

IV. Το πολυώνυμο (ακεραία συνάρτηση) $f(x) = \alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu$ είναι συνεχές στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

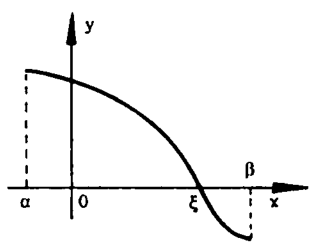
V. Η ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ όπου

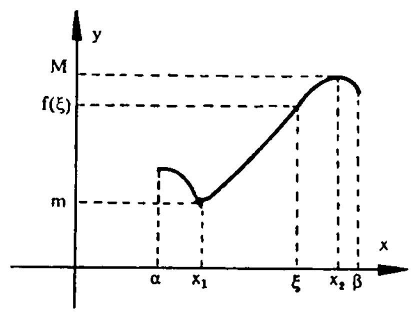
$P(x) = \alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu$ και $Q(x) = \beta_0 x^\mu + \beta_1 x^{\mu-1} + \ldots + \beta_\mu$

είναι συνεχής σε κάθε σημείο που ανήκει στο πεδίο ορισμού.

Αναφέρουμε ακόμα τις βασικές ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων σε διάστημα

VI Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και στα άκρα παίρνει τιμές αντιθέτων προσήμων $\left(f(\alpha)>0,\ f(\beta)<0\right.$ ή $\left.f(\alpha)<0,\ f(\beta)>0\right)$, τότε στο $[\alpha, \beta]$ θα βρεθεί τουλάχιστον ένα σημείο ξ στο οποίο η συνάρτηση αυτή μηδενίζεται $\left(f(\xi)=0\right)$. (βλ. κάτω αριστερό σχήμα)





VII Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε αυτή παίρνει τουλάχιστον μία φορά την μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή m. Εκτός αυτού παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ της μέγιστης και ελάχιστης των τιμών της (βλ. άνω σχήμα δεξιά)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Να εξετάσετε τις συναρτήσεις ως προς την συνέχεια και να κατασκευάσετε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

258. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

Λύση:

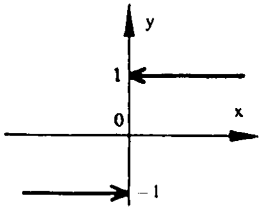
Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $\Delta = R - \{0\}$

Αν $x > 0 \Rightarrow f(x) = 1$ και αν $x < 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x}{-x} = -1$

Έτσι η συνάρτηση στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ είναι συνεχής.

Πρέπει τώρα να ελέγξουμε το σημείο $x=0$. Βρίσκουμε:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -1 \quad \text{και} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +1$$



Συνεπώς $f(-0) \neq f(+0)$.

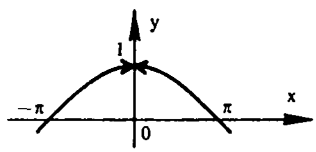
Άρα η συνάρτηση είναι ασυνεχής στο $x=0$.

259. $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x}, & \text{αν } x\neq 0 \\ 1, & \text{αν } x=0 \end{cases}$$

Λύση

Η συνάρτηση ορίζεται στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$, αλλά στο σημείο $x=0$ η συνάρτηση $\dfrac{\eta\mu x}{x}$ δεν ορίζεται, γι' αυτό βρίσκουμε τα μονόπλευρα όρια:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$ (λόγω του αξιοσημείωτου ορίου $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$)



Βρίσκουμε τώρα την τιμή της συναρτήσεως στο $x=0$.

Έχουμε $f(0)=1$, συνεπώς $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής.

260. $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1}x-1, & \text{αν } x\neq -1 \\ 1, & \text{αν } x=-1. \end{cases}$$

Λύση

$\Delta(f)=(-\infty,+\infty)$

Εξετάζουμε την συνάρτηση στα διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $(-1,+\infty)$.

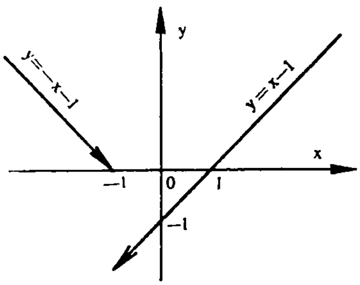
Αν $x+1>0 \Rightarrow x>-1$ δηλαδή $\forall x\in(-1,+\infty)$ έχουμε $f(x) = \dfrac{x+1}{x+1}x-1 = x-1$. Έτσι η συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $(-1,+\infty)$ είναι συνεχής σαν πολυώνυμο πρώτου βαθμού.

Αν $x+1<0 \Rightarrow x<-1$, δηλαδή $\forall x\in(-\infty,-1)$ έχουμε $f(x) = \dfrac{-(x+1)}{x+1}x-1 = -x-1$, που σημαίνει ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty,-1)$.

Πρέπει τώρα να μελετήσουμε το σημείο $x=-1$. Βρίσκουμε τα μονόπλευρα όρια: $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = f(-1-0) = -(-1)-1 = 1-1 = 0$ και

$\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = f(-1+0) = (-1)-1 = -2$

Συνεπώς $f(-1-0)=0 \neq f(-1+0)=-2$ και η συνάρτηση είναι ασυνεχής.



$$f(x)=\begin{cases} x-1 & , \ \forall x\in(-1,+\infty) \\ 1 & , \ x=-1 \\ -x-1 & , \ \forall x\in(-\infty,-1). \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να εξετασθούν οι παρακάτω συναρτήσεις ως προς την συνέχεια και να κατασκευασθούν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

261. $$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{5}(2x^2+3) & , \ \forall x\in(-\infty,1] \\ 6-5x & , \ \forall x\in(1,3) \\ x-3 & , \ \forall x\in[3,+\infty). \end{cases}$$

262. $$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & , \ \forall x\in[1,+\infty) \\ x, & \forall x\in(-\infty,1). \end{cases}$$

263. $f(x)=[x]$

264. $$f(x)=\begin{cases} \eta\mu\frac{\pi}{x} & , \ x\neq 0 \\ 0 & , \ x=0 \end{cases}$$

265. $f(x)=\eta\mu x.$

266. $f(x)=x+\dfrac{|x+1|}{x+1}$

267. $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$

15. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΟΡΙΟ ΜΗΔΕΝ (ΑΠΕΙΡΟΣΤΩΝ)

Α'. Έστω μερικές συναρτήσεις $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, ... που τα όριά τους είναι μηδέν όταν $x \to x_0$ ή $x \to \infty$

Για να χαρακτηρίσουμε την τάση αυτών των συναρτήσεων προς το μηδέν θα χρησιμοποιήσουμε το πηλίκο (λόγο), αφού δεχθούμε ότι η συνάρτηση που θα είναι στον παρονομαστή δεν μηδενίζεται σε κάποια περιοχή του σημείου $x = x_0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1: Αν $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = A \neq 0$, τότε οι συναρτήσεις $\alpha(x)$ και $\beta(x)$ ονομάζονται συναρτήσεις που έχουν όριο μηδέν <u>της αυτής</u> τάξεως.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: Αν $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$, τότε $\beta(x)$ είναι συνάρτηση με όριο μηδέν ανωτέρας τάξεως ως προς την συνάρτηση $\alpha(x)$ που έχει όριο μηδέν.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3: Αν $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$, οι $\alpha(x)$ και $\beta(x)$ ονομάζονται συναρτήσεις με όριο μηδέν <u>ισοδύναμες</u> και γράφουμε $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $\alpha(x) = x$ και $\beta(x) = \eta\mu 2x$ όταν $x \to 0$ είναι της αυτής τάξεως.

Λύση

Οι συναρτήσεις αυτές έχουν όριο μηδέν όταν $x \to 0$:

$\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ και $\lim\limits_{x \to 0} \eta\mu 2x = 0$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\eta\mu 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\eta\mu 2x \cdot 2} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2x}{\eta\mu 2x}\right) \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Άρα $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \dfrac{1}{2} \neq 0$ που σημαίνει, σύμφωνα με τον ορισμό 1, ότι είναι της αυτής τάξεως.

268. Να εκτιμήσετε τις συναρτήσεις που έχουν όριο μηδέν αν $x \to 0$.

α') $\phi(x) = x$, $f_1(x) = \varepsilon\phi x^3$

β') $\phi(x) = x$, $f_2(x) = \sqrt[3]{\eta\mu^2 x}$

γ') $\phi(x) = x$, $f_3(x) = \sqrt{9+x} - 3$.

Λύση

α') $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\phi(x)}{f_1(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\varepsilon\phi x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^3}{\varepsilon\phi x^3}\right) \cdot \dfrac{1}{x^2} = \infty$ $\left(\text{διότι } \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{\varepsilon\phi x^3} = 1\right)$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f_1(x)}{\phi(x)} = 0$, άρα η $\varepsilon\phi x^3$ είναι συνάρτηση με όριο μηδέν ανωτέρας τάξεως σε σχέση με την συνάρτηση x.

β') $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{\eta\mu^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{\eta\mu^2 x}}\cdot\sqrt[3]{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{\left(\dfrac{x}{\eta\mu x}\right)^2}\cdot\sqrt[3]{x}\right) = 0 \Rightarrow$

η $\phi(x) = x$ είναι συνάρτηση με όριο μηδέν ανωτέρας τάξεως σε σχέση με την συνάρτηση $f_2(x) = \sqrt[3]{\eta\mu^2 x}$.

γ') $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{9+x}-3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(\sqrt{9+x}+3)}{9+x-9} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{9+x}+3\right) = 6$

$\Rightarrow \phi(x) = x$ και $f_3(x) = \sqrt{9+x}-3$ είναι συναρτήσεις με όριο μηδέν της αυτής τάξεως.

ΑΣΚΗΣΗ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

269. Να βρείτε τις τάξεις των συναρτήσεων πού έχουν όριο μηδέν (απειροστών) όταν $x\to 0$.

α') $\phi(x) = x$, $f(x) = 2\eta\mu^4 x - x^5$

β') $\phi(x) = x$, $f_1(x) = \sqrt{1+x^3}-1$

γ') $\phi_2(x) = \frac{1}{3}x$, $f_4(x) = \sqrt[3]{1+x}-1$

δ') $\phi_3(x) = x$, $f_5(x) = e^x - 1$.

Β'. Εφαρμογή στον υπολογισμό ορίων, των συναρτήσεων που έχουν όριο μηδέν και είναι ισοδύναμες.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Το όριο του πηλίκου δύο συναρτήσεων πού έχουν όριο μηδέν δεν μεταβάλλεται, αν τον αριθμητή και παρονομαστή αντικαταστήσουμε με οποιαδήποτε ισοδύναμη συνάρτηση πού έχει όριο μηδέν.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

270. Να υπολογισθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\eta\mu(x-3)}{x^2-4x+3}$

Λύση

Όταν $x\to 3$ τότε $\eta\mu(x-3)\to 0$ και $x^2-4x+3\to 0$ καθώς και $\eta\mu(x-3) \sim x-3$. Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\eta\mu(x-3)}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}$$

271. Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{συν}4x-\text{συν}2x}{(\text{τοξημ}3x)^2}$

Λύση

Έχουμε $\text{συν}4x-\text{συν}2x=-2\text{ημ}\dfrac{4x+2x}{2}\,\text{ημ}\dfrac{4x-2x}{2}=-2\text{ημ}3x\,\text{ημ}x$

Όταν $x\to 0$, $\text{ημ}3x\sim 3x$ και $\text{ημ}x\sim x$, $\text{τοξημ}3x\sim 3x$

Έτσι: $$\lim_{x\to 0}\frac{\text{συν}4x-\text{συν}2x}{(\text{τοξημ}3x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2(3x)x}{(3x)^2}=-\frac{2}{3}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να υπολογίσετε τα όρια

272. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\text{συν}\,ax}{x^2}$

273. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\,\text{τοξημ}x}{3x}$

274. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\text{τοξημ}x}{2x+\text{τοξεφ}x}$ (Υπόδειξη: Να διαιρεθεί διά x το κλάσμα)

2. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ

2.1. ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

1ος ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω η συνάρτηση $f(x), x\in(\alpha,\beta)$ και κάποιο σημείο x_0 του διαστήματος (α,β). Το όριο

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

αν αυτό υπάρχει, ονομάζεται <u>παράγωγος</u> της συναρτήσεως $f(x)$ στο σημείο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Έτσι έχουμε

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Αν $x-x_0=\Delta x \Rightarrow x_0=x+\Delta x$, $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y$, όπου Δx ονομάζεται αύξηση της μεταβλητής και Δy αύξηση της συναρτήσεως, τότε

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad ή$$

$$\forall x\in(\alpha,\beta) \quad \boxed{f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$$

Η πράξη της ευρέσεως της παραγώγου μιας συναρτήσεως ονομάζεται <u>παραγώγιση</u> (διαφόριση)

2ο: ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η συνάρτηση $f(x)$, $x\in(\alpha,\beta)$ που έχει σε κάθε σημείο του διαστήματος (α,β) παράγωγο, ονομάζεται <u>παραγωγίσιμη</u> στο διάστημα αυτό.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει παράγωγο στο σημείο x_0 τότε αυτή είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

3ο: ΔΕΞΙΑ ΚΑΙ ΑΡΙΣΤΕΡΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δίδεται συνάρτηση $f(x)$, $x\in(\alpha,\beta)$ και σημείο x_0 του διαστήματος (α,β). Το δεξιόπλευρο όριο $\lim\limits_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ αν αυτό υπάρχει, ονομάζεται <u>δεξιά παράγωγος</u> της συναρτήσεως $f(x)$ στό σημείο x_0 καί συμβολίζεται με $f'_+(x_0)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δίδεται συνάρτηση $f(x)$, $x\in(\alpha,\beta)$ και σημείο x_0 του διαστήματος (α,β). Το αριστερόπλευρο όριο $\lim\limits_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ αν αυτό υπάρχει, ονομάζεται <u>αριστερά παράγωγος</u> της συναρτήσεως $f(x)$ στο σημειό x_0 και συμβολίζεται με $f'_-(x_0)$

Αναγκαία και ικανή συνθήκη υπάρξεως της παραγώγου στο σημείο x_0, όπου η $f(x)$ ορίζεται σε κάποια περιοχή του x_0 είναι η σχέση

$$\boxed{f'_-(x_0) = f'_+(x_0)}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

275. Έστω $f(x) = c$, $x \in R$, όπου c είναι σταθερά. Να βρεθεί η παράγωγος $f'(x)$.

Λύση

α') Βρίσκουμε την διαφορά $f(x) - f(x_0) = c - c = 0$.

β') Βρίσκουμε το πηλίκο $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{0}{x - x_0} = 0$

γ') Βρίσκουμε το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim 0 = 0$.

Άρα $f'(x) = (c)' = 0$.

276. Να βρεθεί η παράγωγος της συναρτήσεως $y = kx + \beta$

Λύση

Βρίσκουμε κατά σειράν:

α') την διαφορά $f(x) - f(x_0) = (kx + \beta) - (kx_0 + \beta) = k(x - x_0)$

β') το πηλίκο $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{k(x - x_0)}{x - x_0} = k$.

γ') το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} k = k$

Άρα $(kx + \beta)' = k$.

277. Να παραγωγίσετε την συνάρτηση $y = x^3$.

Λύση

Βρίσκουμε κατά σειράν:

α') την διαφορά $y(x) - y(x_0) = x^3 - x_0^3 = (x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)$

β') το πηλίκο $\dfrac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} = x^2 + xx_0 + x_0^2$.

γ') το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} (x^2 + xx_0 + x_0^2) = x_0^2 + x_0^2 + x_0^2 = 3x_0^2$

Άρα $(x^3)'=3x_0^2$. Επειδή $x_0=x\in\mathbb{R}$ είναι αυθαίρετο σημείο μπορούμε να γράψουμε $(x^3)'=3x^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Με την βοήθεια του ορισμού να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

278. $y=\dfrac{1}{x^2+2}$ 279. $y=\eta\mu^2 x$

280. $y=\sqrt{x}$ 281. $y=\dfrac{1}{x}$

2.2. ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΤΩΝ ΚΥΡΙΟΤΕΡΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. $\left(f^{\nu}(x)\right)'=\nu f^{\nu-1}(x)\cdot f'(x)$ [αντιστ. $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$]
2. $\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ [αντιστ. $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$]
3. $\left(\ln f(x)\right)'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ [αντιστ. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$]
4. $\left(\alpha^{f(x)}\right)'=\alpha^{f(x)}\cdot\ln\alpha\cdot f'(x)$ [αντιστ. $(\alpha^x)'=\alpha^x\ln\alpha$]
5. $\left(e^{f(x)}\right)'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$ [αντιστ. $(e^x)'=e^x$]
6. $\left(\eta\mu f(x)\right)'=\sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)$ [αντιστ. $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$]
7. $\left(\sigma\upsilon\nu f(x)\right)'=-\eta\mu f(x)\cdot f'(x)$ [αντιστ. $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$]
8. $\left(\varepsilon\varphi f(x)\right)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}\cdot f'(x)$ [αντιστ. $(\varepsilon\varphi x)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$]
9. $\left(\sigma\varphi f(x)\right)'=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 f(x)}\cdot f'(x)$ [αντιστ. $(\sigma\varphi x)'=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$]
10. $\left(\tau o\xi\eta\mu f(x)\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}}\cdot f'(x)$ [αντιστ. $(\tau o\xi\eta\mu x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$]
11. $\left(\tau o\xi\sigma\upsilon\nu f(x)\right)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}}\cdot f'(x)$ [αντιστ. $(\tau o\xi\sigma\upsilon\nu x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$]
12. $\left(\tau o\xi\varepsilon\varphi f(x)\right)'=\dfrac{1}{1+f^2(x)}\cdot f'(x)$ [αντιστ. $(\tau o\xi\varepsilon\varphi x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$]
13. $\left(\tau o\xi\sigma\varphi f(x)\right)'=-\dfrac{1}{1+f^2(x)}\cdot f'(x)$ [αντιστ. $(\tau o\xi\sigma\varphi x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$]
14. $\left(\ln|f(x)|\right)'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ [αντιστ. $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$]

2.3. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Έστω η συνάρτηση $y = g(x)$, $x \in (a, \beta)$ ότι έχει παράγωγο στο σημείο $x_0 \in (a, \beta)$ και ότι η συνάρτηση $z = \varphi(y)$ ορίζεται σε διάστημα που περιέχει το πεδίο τιμών της συναρτήσεως f και έχει παράγωγο στο σημείο $y_0 = g(x_0)$.

Τότε η σύνθετη συνάρτηση $\Phi(x) = \varphi(g(x))$ έχει παράγωγο στο σημείο x_0 που υπολογίζεται από τον τύπο

$$\Phi'(x_0) = \varphi'(y_0) \cdot g'(x_0) \quad \text{ή}$$

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}}$$

2.4. ΒΑΣΙΚΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΕΩΣ

1. $(x)' = 1$
2. $(c)' = 0$ όπου c = σταθερά.
3. $\left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_k(x)\right]' = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \ldots \pm f_k'(x)$
4. $\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right]' = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_2'(x) \cdot f_1(x)$
5. $\left(k f(x)\right)' = k \cdot f'(x)$, όπου k = σταθερά.
6. $\left(\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\varphi(x) - \varphi'(x) f(x)}{(\varphi(x))^2}$
7. $\left(\dfrac{f(x)}{k}\right)' = \dfrac{f'(x)}{k}$
8. $\left(\dfrac{k}{f(x)}\right)' = -\dfrac{k f'(x)}{(f(x))^2}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

282. $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$.

Λύση

$$y' = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' - (2x^2)' + (4x)' - 5' =$$

$$= \frac{1}{3} 3x^2 - 2 \cdot 2x + 4 \cdot 1 - 0 = x^2 - 4x + 4.$$

283. $y=\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x$

Λύση

$$y'=\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x\right)'=\left(\frac{x^5}{5}\right)'-\left(\frac{2x^3}{3}\right)'+(x)' \Rightarrow$$

$$y'=\frac{1}{5}5x^4-\frac{2}{3}3x^2+1 = x^4-2x^2+1.$$

284. $y=x+2\sqrt{x}$

Λύση

$$y'=(x+2\sqrt{x})'=(x)'+2(\sqrt{x})'=1+2\frac{1}{2\sqrt{x}}=1+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

285. $y=\frac{10}{x^3}$

Λύση

$$y'=\left(\frac{10}{x^3}\right)'=\frac{10'\cdot x^3-10\cdot(x^3)'}{(x^3)^2}=\frac{0\cdot x^3-10\cdot 3x^2}{x^6}=-\frac{30}{x^4}$$

286. $y=6\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x}$

Λύση

$$y'=(6\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x})'=6\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'-4\left(x^{\frac{1}{4}}\right)' \Rightarrow$$

$$y'=6\cdot\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}-4\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}=2x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{3}{4}}=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$$

287. $y=x-\eta\mu x$

Λύση

$$y'=(x-\eta\mu x)'=(x)'-(\eta\mu x)'=1-\sigma\upsilon\nu x.$$

288. $y=x^2\sigma\upsilon\nu x$

Λύση

$$y'=(x^2\sigma\upsilon\nu x)'=(x^2)'\sigma\upsilon\nu x+(\sigma\upsilon\nu x)'x^2=2x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\cdot x^2=$$

$$=x\,(2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x).$$

289. $y=\frac{\varepsilon\varphi x}{\sqrt{x}}$

Λύση

$$y'=\left(\frac{\varepsilon\varphi x}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{(\varepsilon\varphi x)'\sqrt{x}-\varepsilon\varphi x(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}=\frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\sqrt{x}-\varepsilon\varphi x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=$$

$$=\frac{2x-\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x}{2x\sqrt{x}\,\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{4x-\eta\mu 2x}{4x\sqrt{x}\,\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

290. $y=\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}$

Λύση

$$y'=\left(\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)'(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)-(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)'(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}{(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2}=$$

$$=\frac{(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)-(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}{(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2}=$$

$$=\frac{-(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)^2-(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2}{(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2}=\frac{-2(\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x)}{(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2}=-\frac{2}{(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2}$$

291. $y=e^x\sigma\upsilon\nu x$

Λύση

$$y'=(e^x\sigma\upsilon\nu x)'=(e^x)'\sigma\upsilon\nu x+e^x(\sigma\upsilon\nu x)'=e^x\sigma\upsilon\nu x-e^x\eta\mu x=e^x(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)$$

292. $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$

Λύση

$$y'=\left(\frac{x^2}{\ln x}\right)'=\frac{(x^2)'\ln x-x^2(\ln x)'}{(\ln x)^2}=\frac{2x\ln x-x^2\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=$$

$$=\frac{x(2\ln x-1)}{\ln x}$$

Να παραγωγίσετε τις παρακάτω σύνθετες συναρτήσεις:

293. $y=(1+3x-5x^2)^{10}$

Λύση

Θέτουμε $f(x)=1+3x-5x^2$

Άρα $y=f^{10}(x)$ και $y'=\left(f^{10}(x)\right)'$ άρα

$$y'=10f^9(x)f'(x)=10(1+3x-5x^2)^9(1+3x-5x^2)'=$$

$$=10(1+3x-5x^2)^9(3-10x)$$

294. $y=\sqrt{1-x^2}$

Λύση

Εδώ $f(x)=1-x^2$

Άρα $y'=\dfrac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

295. $y=(3-2\eta\mu x)^5$

Λύση

$$y'=\left[(3-2\eta\mu x)^5\right]'=5\,(3-2\eta\mu x)^4\,(3-2\eta\mu x)'=$$
$$=5\,(3-2\eta\mu x)^4\,(-2\sigma\upsilon\nu x)=-10\,\sigma\upsilon\nu x\,(3-2\eta\mu x)^4.$$

296. $y=\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^3 x$

Λύση

$$y=(\eta\mu^3 x)'+(\sigma\upsilon\nu^3 x)'=3\eta\mu^2 x\,(\eta\mu x)'+3\,\sigma\upsilon\nu^2 x\,(\sigma\upsilon\nu x)'=$$
$$=3\eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu x-3\,\sigma\upsilon\nu^2 x\,\eta\mu x=3\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x\,(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)=\frac{3}{2}\,\eta\mu 2x\,(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x).$$

297. $f(x)=\ln(2x+7)$

Λύση

$$f'(x)=\left[\ln(2x+7)\right]'=\frac{(2x+7)'}{2x+7}=\frac{2}{2x+7}.$$

298. $f(x)=x^2\,10^{2x}$

Λύση

$$f'(x)=(x^2 10^{2x})'=(x^2)'10^{2x}+x^2(10^{2x})'=2x\,10^{2x}+x^2\,10^{2x}\ln 10\,(2x)'=$$
$$=2x\,10^{2x}+2x^2\,10^{2x}\ln 10=2x\,10^{2x}(1+x\ln 10).$$

299. $f(x)=\sqrt{\ln x+1}+\ln(\sqrt{x}+1)$

Λύση

$$f'(x)=\left(\sqrt{\ln x+1}\right)'+\left(\ln(\sqrt{x}+1)\right)'=$$
$$=\frac{(\ln x+1)'}{2\sqrt{\ln x+1}}+\frac{(\sqrt{x}+1)'}{\sqrt{x}+1}=\frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x+1}}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}=$$
$$=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

2.5. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Λογαριθμική παράγωγος της συναρτήσεως $y=f(x)$ ονομάζεται η παράγωγος του λογαρίθμου της συναρτήσεως αυτής, δηλαδή

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

2.6. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $y=f(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση $F(x,y)=0$, τότε η συνάρτηση λέγεται συνήθως <u>πεπλεγμένη</u>, δηλαδή στην περίπτωση αυτή η y δεν εκφράζεται άμεσα μέσω της x, π.χ.

$$x^2+y^2=R^2 \quad , \quad x^3+xy+y^2=1 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Για να παραγωγίσουμε την συνάρτηση $\boxed{F(x,y)=0}$ πρέπει:

α΄) Να υπολογίσουμε την παράγωγο ως προς x του πρώτου μέλους της $F(x,y)=0$, θεωρώντας το y σαν συνάρτηση της x.

β΄) Να εξισώσουμε την παράγωγο αυτή με το μηδέν, δηλαδή νά θέσουμε $F_x'(x,y)=0$

και γ΄) Να λύσουμε την εξίσωση $F_x'(x,y)=0$ ως προς y'.

2.7. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΤΑΞΕΩΝ.

Έστω η συνάρτηση $y=f(x)$ που ορίζεται στο διάστημα (α,β), και έστω ότι αυτή σε κάθε σημείο του διαστήματος έχει παράγωγο $f'(x)$. Την παράγωγο αυτή $f'(x)$ μπορούμε να την ονομάσουμε <u>πρώτη παράγωγο</u> (ή παράγωγο πρώτης τάξεως) της συναρτήσεως $f(x)$.

Αν η $g(x)=f'(x)$ έχει παράγωγο στο σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$, τότε την παράγωγο αυτή την ονομάζουμε <u>δευτέρα παράγωγο</u> (ή παράγωγο δευτέρας τάξεως) και την συμβολίζουμε:

$$f''(x_0) = \left(f'(x_0)\right)' \quad \text{ή} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Ομοίως μπορούμε να ορίσουμε την παράγωγο οποιασδήποτε τάξεως.

Έτσι <u>n-στή παράγωγος</u> (ή παράγωγος n-στης τάξεως) της συναρτήσεως $y=f(x)$ στο σημείο x, ονομάζεται η παράγωγος της παραγώγου

$(n-1)$-στης τάξεως στο σημείο αυτό και συμβολίζεται:

$$y^{(n)} = \left(y^{n-1}\right)' \quad \text{ή} \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

Για να βρούμε την παράγωγο n-στης τάξεως πρέπει να βρούμε όλες τις παραγώγους μέχρι την $(n-1)$-στή παράγωγο. Μόνο σε εξαιρετικές περιπτώσεις είναι δυνατό να βρούμε απ' ευθείας την n-στή παράγωγο, όταν ανακαλύψουμε τον γενικό τύπο πού μας δίνει την παράγωγο οποιασδήποτε τάξεως.

Αν η συνάρτηση δίδεται με μορφή <u>πεπλεγμένη</u> $F(x,y)=0$ η πρώτη παράγωγος y' βρίσκεται όπως είπαμε παραπάνω (παράγωγος πεπλεγμένης συναρτήσεως). Έστω $y' = f(x,y)$ (1)
δηλαδή η πρώτη παράγωγος εκφράζεται μέσω των x και y.

Για να βρούμε την δεύτερη παράγωγο παραγωγίζουμε την (1) (θεωρούμε πάλι το y σαν συνάρτηση του x) καί μετά αντικαθιστούμε το y' με τό δεξιό μέλος της (1). Κατά τον ίδιο τρόπο βρίσκονται καί οι παράγωγοι των άλλων τάξεων.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.

300. Να παραγωγίσετε την συνάρτηση $f(x) = x^{\eta\mu x}$

Λύση

Η εφαρμογή του τύπου $\left(a^{f(x)}\right)' = a^{f(x)} \ln a\, f'(x)$ δεν είναι εδώ δυνατή διότι το a είναι σταθερά, ενώ το x όχι.

Γι' αυτό λογαριθμίζουμε και κατόπιν παραγωγίζουμε:

$$\ln f(x) = \eta\mu x \ln x \quad \text{και} \quad \left(\ln f(x)\right)' = \left(\eta\mu x \ln x\right)' \Rightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\eta\mu x)' \ln x + \eta\mu x\, (\ln x)' \Rightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sigma\upsilon\nu x \ln x + \eta\mu x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = f(x)\left(\sigma\upsilon\nu x \ln x + \frac{1}{x}\eta\mu x\right)$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = x^{\eta\mu x}\left(\ln x\, \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{x}\eta\mu x\right)$$

301. Να βρεθεί η παράγωγος της συναρτήσεως: $x^3+y^3-3axy=0$

Λύση

Η συνάρτηση αυτή δεν είναι δυνατόν να εμφανισθεί με την μορφή $y=f(x)$. Επομένως θα την παραγωγίσουμε σαν πεπλεγμένη $F(x,y)=0$ γνωρίζοντας ότι y είναι συνάρτηση του x.

Άρα
$$(x^3)'+(y^3)'-3a(xy)'=0 \Longrightarrow$$
$$3x^2+3y^2y'-3a(\,{}'y+y'x)=0$$

Προσέχουμε ότι η y είναι συνάρτηση και γι' αυτό $y'\neq 1$

Για να βρούμε την παράγωγο y' έχουμε:
$$y'(3y^2-3ax)=3ay-3x^2 \Longrightarrow$$
$$y'=\frac{3(ay-x^2)}{3(y^2-ax)}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$$

302. Να παραγωγισθεί η συνάρτηση $x^3+x^2y+y^2=0$

Λύση

Έχουμε $(x^3)'+(x^2y)'+(y^2)'=0$

$\Longrightarrow \quad 3x^2+(x^2)'y+x^2y'+2yy'=0$

$\Longrightarrow \quad 3x^2+2xy+x^2y'+2yy'=0$

$\Longrightarrow \quad y'(x^2+2y)=-3x^2-2xy$

$\Longrightarrow \quad y'=-\dfrac{3x^2+2xy}{x^2+2y}$

303. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $y=3+\frac{5}{x}$ ικανοποιεί την εξίσωση $xy'+y=3$.

Λύση

Βρίσκουμε $y'=\left(3+\frac{5}{x}\right)'=(3)'+5\left(\frac{1}{x}\right)'=5\left(-\frac{x}{x^2}\right)=-\frac{5}{x^2}$

Θέτοντας τώρα στην εξίσωση $y'=-\frac{5}{x^2}$ και $y=3+\frac{5}{x}$ έχουμε
$$x\left(-\frac{5}{x^2}\right)+\left(3+\frac{5}{x}\right)=-\frac{5}{x}+3+\frac{5}{x}=3$$

304. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $y=\ln\frac{1}{1+x}$ ικανοποιεί την σχέση

$xy' + 1 = e^y$

Λύση

Έχουμε $y' = \left(\ln 1 - \ln(1+x)\right)' = -\dfrac{(1+x)'}{1+x} = -\dfrac{1}{1+x}$

Τότε $xy'+1 = x\left(-\dfrac{1}{1+x}\right)+1 = -\dfrac{x}{1+x}+1 = \dfrac{1}{1+x}$

Από την δοθείσα $y = \ln\dfrac{1}{1+x} \Rightarrow \dfrac{1}{1+x} = e^y$, συνεπώς

$xy'+1 = \dfrac{1}{1+x} = e^y$

305. Έστω η συνάρτηση $y=(1+x)^5$. Να βρείτε την y'''.

Λύση

Βρίσκουμε διαδοχικά πρώτη, δεύτερη και τρίτη παράγωγο:

$y' = 5(1+x)^4(1+x)' = 5(1+x)^4$

$y'' = \left[5(1+x)^4\right]' = 20(1+x)^3(1+x)' = 20(1+x)^3$

$y''' = \left[20(1+x)^3\right]' = 60(1+x)^2(1+x)' = 60(1+x)^2$

306. Έστω η συνάρτηση $y=a^x$. Να βρείτε την $y^{(n)}$.

Λύση

Βρίσκουμε διαδοχικά:

$y' = (a^x)' = a^x \ln a$

$y'' = (a^x \ln a)' = \ln a\,(a^x)' = \ln^2 a\, a^x$

$y''' = \left(\ln^2 a\,(a^x)\right)' = \ln^3 a\, a^x.$

Ο τρόπος σχηματισμού διαδοχικά των παραγώγων έγινε γνωστός, συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$y^{(n)} = (\ln a)^n a^x.$

307. Να βρεθεί η παράγωγος n-στης τάξεως της συναρτήσεως $y=\eta\mu x$

Λύση

Έχουμε: $y' = (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$, $y'' = (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

$y''' = (-\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x$. Παρατηρούμε την εναλλαγή των διαδοχικών παραγώγων: $\sigma\upsilon\nu x$, $-\eta\mu x$, $-\sigma\upsilon\nu x$, $\eta\mu x$ αντίστοιχα.

Είναι φανερό πως $y^{(5)}=y'$, $y^{(6)}=y''$, $y^{(7)}=y'''$, $y^{(8)}=y^{(4)}$ κ.ο.κ.

Έτσι βρήκαμε τον νόμο με βάση του οποίου υπολογίζουμε τις παραγώγους της συναρτήσεως ημx.

Μπορούμε να δώσουμε και γενικό τύπο:

$$y = \text{ημ}x$$
$$y' = \text{συν}x = \text{ημ}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$y'' = -\text{ημ}x = \text{ημ}\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$
$$y''' = -\text{συν}x = \text{ημ}\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = \qquad = \text{ημ}\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

308. $y = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2{,}5x^2 - 0{,}3x + 0{,}1$.

309. $y = \sqrt{x}\,(x^3 - \sqrt{x} + 1)$

310. $y = (1+\sqrt[3]{x})^2$

311. $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

312. $y = (x^2-3x+3)(x^2+2x-1)$

313. $y = \dfrac{2}{x^3-1}$

314. $y = x^3\,\text{συν}x$

315. $y = \dfrac{\text{εφ}x}{\sqrt{x}}$

316. $y = e^x(\text{ημ}x - \text{συν}x)$

317. $y = 3^x\,\text{τοξημ}x$

318. $y = (1+2x)^{30}$

319. $y=\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^5$

320. $y=συν^2x$

321. $y=3ημ^2x-ημ^3x$

322. $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$

323. $y=\ln^2 x$

324. $y=10^{2x-3}$

325. $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$.

Να βρεθεί η δευτέρα παράγωγος των συναρτήσεων:

326. $y=xe^{x^2}$

327. $y=\sqrt{a^2-x^2}$

328. $y=\frac{1}{a+\sqrt{x}}$

Να βρεθεί η νιοστή παράγωγος $y^{(ν)}$ των συναρτήσεων:

329. $y=xe^x$

330. $y=ημ^2x$

331. $y=ημ\,αx+συν\,βx$.

332. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $y=e^x ημx$ ικανοποιεί την σχέση $y''-2y'+2y=0$ και η συνάρτηση $y=e^{-x}ημx$ την σχέση $y''+2y'+2y=0$.

333. Να βρεθεί η παράγωγος n-στης τάξεως της συναρτήσεως $y=συνx$.

334. Να βρεθεί η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ της συναρτήσεως $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$

2.8. ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

2.8.1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

Διαφορικό πρώτης τάξεως της συναρτήσεως $y=f(x)$ ονομάζεται η σχέση

$$dy = f'(x)dx \qquad (1)$$

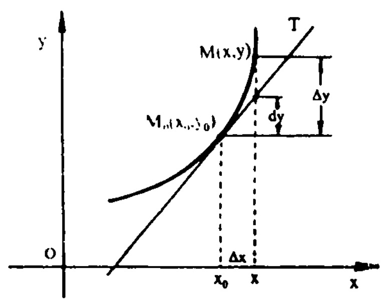
Η αύξηση της συναρτήσεως $y=f(x)$ εκφράζεται ως εξής:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = A(x)\Delta x + a(x,\Delta x)\Delta x$$

όπου $\lim\limits_{\Delta x \to 0} a(x,\Delta x) = 0$ και $A(x)\Delta x$ το κύριο μέρος της αυξήσεως που ονομάζεται διαφορικό. Είναι δε $A(x) = f'(x)$ και $\Delta x = dx$

Αν Δx είναι αρκετά μικρή μεταβλητή, τότε $\Delta y \approx dy$.

Η γεωμετρική ερμηνεία του διαφορικού αποδίδεται στο παρακάτω σχήμα



2.8.2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ

1. $dc = 0$ όπου $c =$ σταθερά.
2. $dx = \Delta x$
3. $d(cf(x)) = c\,df(x)$
4. $d(f(x) \pm g(x)) = df(x) \pm dg(x)$
5. $d(f(x)\cdot g(x)) = f(x)dg(x) + g(x)df(x)$
6. $d\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{(g(x))^2} \qquad (g(x) \neq 0)$
7. $df(\varphi(x)) = f'(\varphi(x))d\varphi(x)$

2.9. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΣΤΙΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

Αν Δx είναι μικρή μεταβλητή κατ' απόλυτη τιμή, τότε

$$\Delta y \approx dy$$

$$\Rightarrow \quad f(x) - f(x_0) \approx f'(x)\Delta x$$

ή , αν $x = x_0 + \Delta x$

$$\Rightarrow f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x}$$

2.10. ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΤΑΞΕΩΝ:

Το διαφορικό dy της συναρτήσεως $y = f(x)$ είναι συνάρτηση του x

$$dy = f'(x)dx$$

Συνεπώς το διαφορικό δευτέρας τάξεως είναι

$$d^2y = d(dy) = f''(x)(dx)^2$$

Ομοίως και των άλλων τάξεων:

$$d^3y = d(d^2y) = f'''(x)(dx)^3.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d^{(n)}y = d(d^{(n-1)}y) = y^{(n)}(dx)^n$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

335. Έστω η συνάρτηση $y = (1+\varepsilon\varphi x)^8$. Να βρείτε το διαφορικό dy.

Λύση

Έχουμε $dy = y'dx$. Βρίσκουμε την παράγωγο:

$$y' = 8(1+\varepsilon\varphi x)^7(\varepsilon\varphi x)' = 8(1+\varepsilon\varphi x)^7 \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

Άρα $\quad dy = 8(1+\varepsilon\varphi x)^7 \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx.$

336. Να βρείτε το διαφορικό και την αύξηση της συναρτήσεως $y = 3x^3 + x - 1$ στο σημείο $x = 1$ όταν $\Delta x = 0{,}1$.

337. Να βρείτε το απόλυτο και σχετικό σφάλμα που προκύπτουν από την αντικατάσταση του Δy με dy.

Λύση

Η αύξηση είναι:

$$\Delta y = f(x+\Delta y) - f(x) = 3(x+\Delta x)^3 + (x+\Delta x) - 1 - (3x^2+x-1)$$

$$\Rightarrow \Delta y = 9x^2\Delta x + 9x(\Delta x)^2 + 3(\Delta x)^3\Delta x.$$

Το διαφορικό είναι:

$$dy = (3x^3+x-1)'dx = (9x^2+1)\Delta x \qquad (\Delta x = dx)$$

Συνεπώς η διαφορά:

$$\Delta y - dy = 9x(\Delta x)^2 + 3(\Delta x)^3.$$

Αντικαθιστώντας όπου $x=1$ και $\Delta x = 0{,}1$ παίρνουμε:

$$\Delta y - dy = 0{,}09 + 0{,}003 = 0{,}093$$

$$dy = 1, \quad \Delta y = 1{,}093$$

Το απόλυτο σφάλμα είναι $|\Delta y - dy| = |1{,}093 - 1| = 0{,}093$

Το σχετικό σφάλμα είναι: $\left|\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \dfrac{0{,}093}{1{,}093} \approx 0{,}085$ ή $8{,}5\%$

332. Με τη βοήθεια του διαφορικού να βρείτε κατά προσέγγιση την τιμή της συνάρτησης: $y = \sqrt[5]{\dfrac{2-x}{2+x}}$, όταν $x = 0{,}15$

Λύση

Εφαρμόζοντας τον τύπο $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

έχουμε για $x_0 = 0$ και $\Delta x = 0{,}15$

$$f(0+0{,}15) \approx f'(0)\cdot 0{,}15 + f(0) \qquad (1)$$

Βρίσκουμε:

$$y' = f'(x) = \frac{1}{5}\sqrt[5]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^4}\cdot\frac{(-4)}{(2+x)^2} \quad \text{απ' όπου}$$

$$f'(0) = -\frac{1}{5} \quad \text{Επίσης} \quad f(0) = \sqrt[5]{\frac{2-0}{2+0}} = 1.$$

Από την (1) τώρα έχουμε:

$$f(0+0{,}15) \approx -\frac{1}{5}\cdot 0{,}15 + 1 \Longrightarrow f(0{,}15) \approx -0{,}03 + 1 = 0{,}97$$

Τελικά επειδή $y = f(x)$, έχουμε:

$$y(0{,}15) = f(0{,}15) = 0{,}97.$$

333. Να βρείτε προσεγγιστικά το συν $31°$.

Λύση

Για να εφαρμόσουμε τον τύπο $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

γράφουμε την συνάρτηση $y = \text{συν}\,x$ με $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$, $\Delta x = 1° = \dfrac{\pi}{180}$

Έτσι $\text{συν}\,31° \approx (\text{συν}\,x)'_{x=\frac{\pi}{6}}\cdot\Delta x + (\text{συν}\,x)_{x=\frac{\pi}{6}}$

Βρίσκουμε $(\text{συν}\,x)' = -\text{ημ}\,x \Rightarrow (\text{συν}\,x)'_{x=\frac{\pi}{6}} = -\text{ημ}\dfrac{\pi}{6} = 0{,}5$

και $(\text{συν}\,x)_{x=\frac{\pi}{6}} = \text{συν}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Συνεπώς $\sigma υν\, 31^\circ \approx -0{,}5 \cdot \frac{\pi}{180} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}851$.

340. Να βρείτε τα διαφορικά dy, d^2y της συναρτήσεως
$y = 4x^5 - 7x^2 + 3$

Λύση

Έχουμε
$$dy = y'dx = (4x^5 - 7x^2 + 3)'dx = (20x^4 - 14x)dx$$
$$d^2y = d(dy) = (20x^4 - 14x)'(dx)^2 = (80x^3 - 14)(dx)^2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

Να υπολογίσετε το διαφορικό των συναρτήσεων:

341. $y = \frac{x}{1-x}$

342. $y = \tau o\xi\, \eta\mu \frac{x}{a}$

343. $y = x \ln x - x$

344. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$

345. $y = e^{-\frac{x}{y}}$

Να υπολογίσετε κατά προσέγγιση την τιμή των συναρτήσεων·

346. $f(x) = \sqrt{1+x}$, όταν $x = 0{,}2$

347. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, όταν $x = 0{,}1$

2.11. ΤΥΠΟΙ TAYLOR-MACLAURIN

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής και έχει συνεχείς παραγώγους ως την $(\nu-1)$-στή τάξη στο κλειστό διάστημα $[a,\beta]$.

Αν σε κάθε σημείο του διαστήματος (a,β) έχει παράγωγο ν-στής τάξεως τότε $\forall x\in[a,\beta]$ αληθεύει ο τύπος του Taylor:

$$\boxed{f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{1\cdot 2}(x-a)^2+\dots+f^{(\nu-1)}(a)\frac{(x-a)^{\nu-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\nu-1)}+f^{(\nu)}(\xi)\frac{(x-a)^{\nu-1}}{1\cdot 2\cdots \nu}} \quad (1)$$

όπου $\xi=a+\vartheta(x-a)$ και $0<\vartheta<1$

Αν στον τύπο (1) θέσουμε $a=0$, τότε θα πάρουμε τον τύπο του Maclaurin:

$$\boxed{f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{1\cdot 2}x^2+\dots+f^{(\nu-1)}(0)\frac{x^{\nu-1}}{1\cdot 2\cdots(\nu-1)}+f^{(\nu)}(\xi)\frac{x^{\nu}}{1\cdot 2\cdots \nu}} \quad (2)$$

όπου $\xi=\vartheta x$, $0<\vartheta<1$.

Ο τελευταίος όρος του τύπου Taylor γράφεται:

$$R_\nu(x)=\frac{f^{(\nu)}(a+\vartheta(x-a))}{1\cdot 2\cdots \nu}(x-a)^\nu \quad (3)$$

και αντίστοιχα του Maclaurin:

$$R_\nu(x)=\frac{f^{(\nu)}(\vartheta x)}{1\cdot 2\cdots \nu}x^\nu \quad (4)$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

346. Να αναλύσετε το πολυώνυμο $P(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$ με την βοήθεια του τύπου Taylor στο σημείο $x=1$.

Λύση

Εφαρμόζοντας τον τύπο (1) έχουμε $a=1$ και η παράγωγος είναι

$$P'(1)=(x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1)'_{x=1}=(5x^4-8x^3+3x^2-2x+2)_{x=1}=$$
$$=5-8+3-2+2=0$$

$$P''(1)=(5x^4-8x^3+3x^2-2x+2)'_{x=1}=(20x^3-24x^2+6x-2)_{x=1}=$$
$$=20-24+6-2=0$$

$$P'''(1)=(20x^3-24x^2+6x-2)'_{x=1}=(60x^2-48x+6)_{x=1}=$$
$$=60-48+6=18.$$

$$P^{(4)}(1) = (60x^2-48x+6)'_{x=1} = (120x-48)_{x=1} = 120-48=72.$$

$$P^{(5)}(1) = (120x-48)'_{x=1} = 120$$

$P^{(6)}(1) = 0$ και όλες οι άλλες παράγωγοι είναι μηδέν.

Τέλος βρίσκουμε: $P(1) = 1-2+1-1+2-1=0.$

Αντικαθιστώντας τώρα τις τιμές των παραγώγων και την τιμή του πολυωνύμου όταν $x=1$ στον τύπο Taylor έχουμε:

$$P(x) = \frac{18(x-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{72(x-1)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{120(x-1)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$\Longrightarrow \quad P(x) = 3(x-1)^3 + 3(x-1)^4 + (x-1)^5.$$

349. Να αναλυθεί η συνάρτηση $y=\eta\mu x$ με τον τύπο του Maclaurin

Λύση

Βρίσκουμε την τιμή της συναρτήσεως και τις τιμές των παραγώγων ως την ν-οστή στο σημείο $x=0$.

Έχουμε $f(0) = \eta\mu 0 = 0$

Έχουμε βρεί σε προηγούμενη άσκηση (βλ. κεφάλαιο παραγώγων) ότι $y^{(\nu)} = \eta\mu\left(x+\nu\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, όπου $\nu = 0, 1, \ldots$

Αν $\nu=2k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ τότε $y^{(2k)} = 0 = \eta\mu k\pi = 0$ και γι'αυτό στην ανάλυση θα απουσιάζουν οι όροι με άρτιους δείκτες.

Αν $\nu = 2k-1$ $(k=0,1,2,\ldots)$ τότε

$$y^{(2k-1)}(0) = \eta\mu\frac{2k-1}{2}\pi = (-1)^{k-1} \quad \left(\text{διότι } \eta\mu\frac{\pi}{2}=1,\right.$$

$\left.\eta\mu\frac{3\pi}{2} = -1,\ \eta\mu\frac{5\pi}{2} = 1, \ldots\right)$. Έτσι το πρόσημο των περιττών όρων θα εναλλάσσεται

Αν $\nu=2k+1$ τότε

$$\eta\mu x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{(-1)^k}{1\cdot 3\cdots(2k-1)}x^{2k-1} + R_{2k+1}(x),$$

όπου $R_{2k+1}(x) = \dfrac{y^{(2k+1)}(\xi)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}\, x^{2k+1} \Longrightarrow$

$$R_{2k+1}(x) = \frac{\eta\mu\left(\xi + \frac{2k+1}{2}\pi\right)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}\cdot x^{2k+1} = (-1)^k \frac{\sigma\upsilon\nu\xi}{1\cdot 3\cdots(2k+1)}\, x^{2k+1}$$

Έτσι μπορούμε να γράψουμε τελικά:

$$ημx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k-1)!}x^{k-1} + \frac{(-1)^k συνξ}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

όπου $ξ = xθ$, $0 < θ < 1$ και $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots ν = ν!$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

350. Να αναλυθεί η συνάρτηση $y = \ln(1+x)$ που ορίζεται στο $[0,1]$ με τον τύπο Maclaurin. Να εκτιμηθεί το σφάλμα όταν διατηρηθούν οι δέκα πρώτοι όροι.

351. Να χρησιμοποιηθεί η ανάλυση της συναρτήσεως $y = ημx$ από την προηγούμενη λυμένη άσκηση, για την εκτίμηση του σφάλματος, διατηρώντας τρεις όρους $(0 \leq x \leq 0,1)$.

352. Να αναλυθεί με τον τύπο Taylor η συνάρτηση $P(x) = x^4 - 2x^3 + 7x - 4$ όταν $x = a = 1$.

353. Να αναλυθεί το πολυώνυμο $P(x) = (x^2 - 2x + 3)^2$ με τον τύπο του Maclaurin

354. Να εκτιμηθεί το σφάλμα του προσεγγιστικού τύπου

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$ στο διάστημα $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

3. ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

3.1. ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ (ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ).

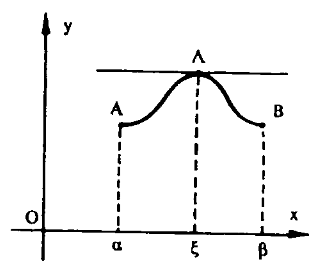
1ο: ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE: Αν η συνάρτηση $y=f(x)$

α') είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$

β') είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β)

γ') ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστο σημείο ξ του διαστήματος (α,β) στο οποίο $f'(\xi)=0$



Το παραπάνω σχήμα μας δίνει την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος και σημαίνει ότι: Στο τόξο της καμπύλης ΑΒ θα βρεθεί τουλάχιστο ένα σημείο Λ στο οποίο η εφαπτομένη θα είναι παράλληλη πρός τον άξονα ΟΧ.

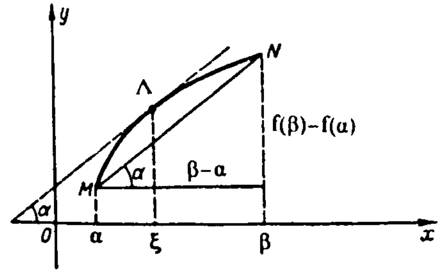
2ο: ΘΕΩΡΗΜΑ LAGRANGE: Αν η συνάρτηση $y=f(x)$

α') είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$

β') είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β)

τότε στο διάστημα (α,β) θά υπάρχει τουλάχιστο ένα σημείο ξ στο οποίο $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\xi)\qquad(\alpha<\xi<\beta)$

Στο παρακάτω σχήμα μας δίνεται η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος που σημαίνει ότι: Στό τόξο ΜΝ θά βρεθεί τουλάχιστον ένα σημείο Λ στο οποίο η εφαπτομένη θά είναι παράλληλη πρός την χορδή ΜΝ



3ο: ΘΕΩΡΗΜΑ CAUCHY: Αν δύο συναρτήσεις $\varphi(x)$ και $y(x)$

α') είναι συνεχείς στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$

β') είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα (α,β) και

γ') $y'(x) \neq 0$ στο διάστημα (α,β)

τότε στο διάστημα (α,β) θα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ξ στο οποίο θα ισχύει η ισότητα

$$\frac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{y(\beta)-y(\alpha)} = \frac{\varphi'(\xi)}{y'(\xi)} \qquad \text{όπου} \quad \alpha < \xi < \beta$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

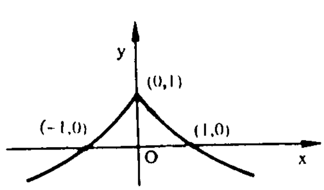
355. Να ελέγξετε αν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την συνάρτηση $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ στο διάστημα $[-1,1]$.

Λύση

α') Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο $[-1,1]$.

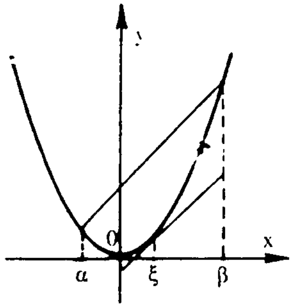
β') $f'(x) = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

Αν θέσουμε $x=0 \in [-1,1]$, τότε $f'(0) \to \infty$, συνεπώς η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,1)$. Επομένως το θεώρημα του Rolle δεν εφαρμόζεται. Από το σχήμα φαίνεται ότι στο διάστημα $[-1,1]$ δεν υπάρχει σημείο στην καμπύλη στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη προς τον άξονα OX.



356. Να γράψετε τον τύπο Lagrange της συναρτήσεως $f(x)=x^2$ στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και να βρείτε το $\xi \in (\alpha,\beta)$.

Λύση



Βρίσκουμε: $f(\beta)=\beta^2$, $f(\alpha)=\alpha^2$

$f'(x)=2x \Rightarrow f'(\xi)=2\xi$.

Τότε σύμφωνα με τον τύπο

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\xi) \text{ έχουμε}$$

$$\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=2\xi \Rightarrow 2\xi=\alpha+\beta \Rightarrow \xi=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Έτσι η ενδιάμεση τιμή $\xi\in(\alpha,\beta)$ ισούται με την μέση τιμή των άκρων του διαστήματος. Αυτή είναι και ιδιότητα της παραβολής $y=x^2$

357. Να διαπιστώσετε αν οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+2$ και $\phi(x)=x^3-1$ εκπληρώνουν τις συνθήκες του θεωρήματος Cauchy και να βρείτε το ξ στο κλειστό διάστημα $[1,2]$.

Λύση

Βρίσκουμε: $f(2)=2^2+2=6$, $f(1)=1^2+2=3$

$\phi(2)=2^3-1=7$, $\phi(1)=1^3-1=0$

$f'(x)=2x \Rightarrow f'(\xi)=2\xi$, $\phi'(x)=3x^2 \Rightarrow \phi'(\xi)=3\xi^2$

Τότε ο τύπος του θεωρήματος $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}=\dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ μας δίνει

$$\frac{6-3}{7-0}=\frac{2\xi}{3\xi^2} \Rightarrow \frac{3}{7}=\frac{2}{3\xi} \Rightarrow \xi=\frac{14}{9}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

358. Με την χρήση του θεωρήματος του Rolle να δειχθεί ότι η παράγωγος $f'(x)$ της συναρτήσεως $f(x)=\begin{cases} x\,\eta\mu\frac{\pi}{x}, & \text{αν } x>0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$ μηδενίζεται σε απειροσύνολο σημείων του διαστήματος $(0,1)$.

359. Να διαπιστωθεί αν αληθεύει το θεώρημα Rolle για την συνάρτηση $y=3\sqrt[3]{x^2-3x+2}$ στο κλειστό διάστημα $[1,2]$.

360. Αληθεύει τό θεώρημα Lagrange γιά την συνάρτηση $f(x)=x-x^3$ στο κλειστό διάστημα $[-2,1]$; Να βρεθεί η τιμή του ξ.

3.2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΕΩΣ (ΚΑΝΟΝΑΣ L'HOSPITALE)

Αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στην περιοχή του σημείου α με εξαίρεση το ίδιο το σημείο α και $g'(x)\neq 0$ και αν $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=0$ ή $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\infty$

τότε

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

με την προϋπόθεση ότι το όριο $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει.

Η μεταβλητή x μπορεί να τείνει στο α ή στο ∞ ($x\to\alpha$ ή $x\to\infty$)

Σημείωση: Η παραπάνω σχέση καλείται κανόνας του L'Hospital (Λοπιτάλ) και αντιμετωπίζουμε με αυτήν αοριστίες της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$ και ακόμα της μορφής 0^0 , ∞^0 , 1^∞

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

361. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

Λύση

Έχουμε $\lim\limits_{x\to1}(x^2-1)=0$, $\lim\limits_{x\to1}(x^3-1)=0$, άρα έχουμε $\frac{0}{0}$

καταφεύγουμε λοιπόν στον κανόνα του L'Hospital:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)'}{(x^3-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{2x}{3x^2}=\frac{2}{3}$$

362. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

Λύση

Παρατηρούμε αμέσως ότι πρόκειται για αοριστία $\frac{0}{0}$, συνεπώς βάσει του L'Hospital $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^3-3x+2)'}{(x^3-x^2-x+1)'}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$

Αλλά εδώ έχουμε και πάλι αοριστία $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζουμε ξανά τον κανόνα L'Hospital, και

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(3x^2-3)'}{(3x^2-2x-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

363. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}{\eta\mu^3 x}$

Λύση

Επειδή έχουμε αοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$, εφαρμόζουμε τον κανόνα L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}{\eta\mu^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\varepsilon\varphi x-\eta\mu x)'}{(\eta\mu^3 x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\sigma\upsilon\nu x}{3\eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu x}$$

Εδώ πήραμε $\frac{0}{0}$, αλλά η εφαρμογή του κανόνα L'Hospital δεν συνιστάται. Είναι προτιμότερο να μετασχηματίσουμε την παράσταση

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}:\quad \frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\sigma\upsilon\nu x}{3\eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu^3 x}{3\eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu^2 x}$$ και παρατηρώντας ότι

$\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu^2 x=1$ έχουμε τελικά $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}{\eta\mu^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^3 x}{3\eta\mu^2 x}$

Εφαρμόζοντας τώρα τον κανόνα L'Hospital ακόμα μία φορά έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}{\eta\mu^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu^3 x)'}{3(\eta\mu^2 x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sigma\upsilon\nu^2 x\,\eta\mu x}{6\,\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

364. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$

365. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-\beta^x}{x\sqrt{1-x^2}}$

366. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\sigma\varphi x}$

367. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^5}$.

3.3. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΤΗΝ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Κριτήρια μονοτονίας της συναρτήσεως: Επαναλαμβάνουμε τον ορισμό της αύξουσας και φθίνουσας συναρτήσεως:

Η συνάρτηση $f(x)$, $x\in(a,\beta)$ ονομάζεται <u>αύξουσα</u> στο διάστημα (a,β) αν αυτή ικανοποιεί την συνθήκη:

$$(\forall x_1\in(a,\beta)),\ (\forall x_2\in(a,\beta))\ \ (x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)<f(x_2))$$

Η συνάρτηση $f(x)$, $x\in(a,\beta)$ ονομάζεται <u>φθίνουσα</u> στο διάστημα (a,β) αν αυτή ικανοποιεί την συνθήκη:

$$(\forall x_1\in(a,\beta)),\ (\forall x_2\in(a,\beta))\ \ (x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)>f(x_2))$$

Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα ονομάζονται <u>διαστήματα μονοτονίας</u>.

α') Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει θετική παράγωγο σε κάθε σημείο του διαστήματος (a,β) τότε η συνάρτηση f είναι αύξουσα στο (a,β), δηλαδή η παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,β) $f(x)$, αυξάνει στο (a,β) αν εκπληρώνεται η συνθήκη

$$(\forall x\in(a,\beta))\ \ f'(x)>0.$$

β') Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει αρνητική παράγωγο σε κάθε σημείο του διαστήματος (a,β) τότε η συνάρτηση f είναι φθίνουσα στο (a,β), δηλαδή η παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,β) $f(x)$ φθίνει στο (a,β) αν εκπληρώνεται η συνθήκη

$$(\forall x\in(a,\beta))\ \ f'(x)<0.$$

Πως βρίσκονται τα διαστήματα μονοτονίας: Για να βρούμε τα διαστήματα μονοτονίας εργαζόμεθα ως εξής:

α') Βρίσκουμε την παράγωγο $f'(x)$ της δεδομένης συναρτήσεως $f(x)$ και μετά βρίσκουμε τα σημεία στα οποία η $f'(x)$ μηδενίζεται ή δεν υπάρχει. Τα σημεία αυτά ονομάζουμε <u>κρίσιμα σημεία</u> της συναρτήσεως.

β') Χωρίζουμε το πεδίον ορισμού της συναρτήσεως σε διαστήματα με τα κρίσιμα σημεία. Σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά η $f'(x)$ διατηρεί το πρόσημό της. Τα διαστήματα αυτά θα είναι διαστήματα μονοτονίας.

γ') Ερευνούμε το πρόσημο της $f'(x)$ σε καθένα από τα διαστήματα πού βρήκαμε.

Αν στό εξεταζόμενο διάστημα $f'(x)<0$ τότε η $f(x)$ είναι φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Αν δέ στό εξεταζόμενο διάστημα $f'(x)>0$ τότε η $f(x)$ είναι αύξουσα σε αυτό.

Για την κατανόηση των παραπάνω δίνουμε τα εξής παραδείγματα:

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο:</u> Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της συναρτήσεως $y=x^2-2x+5$

Λύση

α) Βρίσκουμε την παράγωγο : $y'=(x^2-2x+5)'=2x-2$

β) Μηδενίζουμε την παράγωγο: $y'=0$

$$\Rightarrow 2x-2=0$$

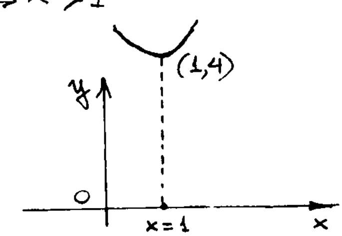
$$\Rightarrow x=1.$$

Το πεδίον ορισμού $(-\infty,+\infty)$ χωρίζεται στα διαστήματα μονοτονίας

$$(-\infty,1),\ (1,+\infty).$$

$$\gamma')\quad f'(x)>0 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow x>1$$

Επομένως στο διάστημα $(-\infty,1)$ η συνάρτηση φθίνει (↓) και στο διάστημα $(1,+\infty)$ είναι αύξουσα, όπως φαίνεται και στό σχήμα.



<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο:</u> Να μελετηθή η συνάρτηση $y=\frac{1}{x+2}$ ως πρός την μονοτονία.

Λύση α) $y'=-\frac{(x+2)'}{(x+2)^2}=-\frac{1}{(2+x)^2}$, $y'=0 \Rightarrow -\frac{1}{(2+x)^2}\neq 0$

Η παράγωγος λοιπόν δεν μηδενίζεται, όμως στο $x=-2$ δεν υπάρχει, άρα αυτό είναι κρίσιμο σημείο.

β') Το πεδίο ορισμού είναι: $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$ και αυτά είναι και τα διαστήματα μονοτονίας.

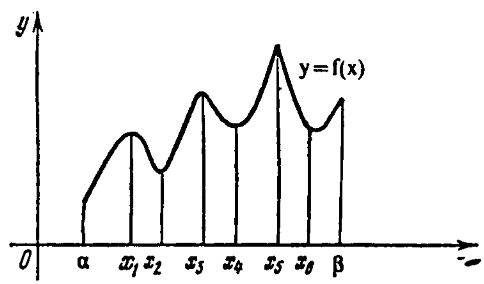
γ') Εξετάζουμε το πρόσημο της $f'(x)$: $y'=-\frac{1}{(2+x)^2}<0\ \forall x\in (-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$, άρα η συνάρτηση είναι φθίνουσα (↓) στο πεδίο ορισμού.

3.4. ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ (Μέγιστα και Ελάχιστα)

ΟΡΙΣΜΟΣ 1: Το σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της συναρτήσεως $f(x)$ ονομάζεται <u>ελάχιστο</u> της συναρτήσεως αυτής, αν υπάρχει τέτοια δ-περιοχή $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ του σημείου x_0 ώστε $\forall x \neq x_0$ της δ-περιοχής να εκπληρώνεται η ανίσωση $\boxed{f(x) > f(x_0)}$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: Το σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της συναρτήσεως $f(x)$ ονομάζεται <u>μέγιστο</u> της συναρτήσεως αυτής, αν υπάρχει τέτοια δ-περιοχή $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ του σημείου x_0 ώστε $\forall x \neq x_0$ της δ-περιοχής να εκπληρώνεται η ανίσωση $\boxed{f(x) < f(x_0)}$

Τα σημεία που η συνάρτηση έχει ελάχιστο και μέγιστο ονομάζονται <u>ακρότατα</u> της συναρτήσεως. Στο σχήμα δίνεται η γραφική άποψη των ακροτάτων.



Στο διάστημα (α,β) έχουμε έξι σημεία όπου η συνάρτηση έχει ακρότατα. Στο σημείο $x=x_4$ έχει ελάχιστο, όμως $f(x_4) > f(x_1)$ όπου x_1 είναι μέγιστο. Αυτό δεν αντιβαίνει στον ορισμό γιατί τα ακρότατα έχουν τοπικό χαρακτήρα κοντά στο δεδομένο σημείο.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΗ ΣΥΝΘΗΚΗ ΥΠΑΡΞΕΩΣ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ: Αν το σημείο x_0 είναι ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) της $f(x)$ που ορίζεται σε κάποια περιοχή του x_0 και στο σημείο αυτό υπάρχει παράγωγος $f'(x)$ τότε αυτή μηδενίζεται, δηλαδή $f'(x_0)=0$.

Τό σημείο x_0 στο οποίο $f'(x_0)=0$ ή η $f'(x_0)$ δεν υπάρχει, ονομάζεται <u>κρίσιμο σημείο</u>.

ΙΚΑΝΗ ΣΥΝΘΗΚΗ ΥΠΑΡΞΕΩΣ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ: Δεχόμεθα ότι η συνάρτηση

$f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο x_0 και στην δ-περιοχή του έχει παράγωγο εκτός του σημείου x_0 (που μπορεί και να μην έχει).

Τότε:

α') Αν η παράγωγος $f'(x) > 0$, όταν $x < x_0$ και $f'(x) < 0$, όταν $x > x_0$ (δηλαδή περνώντας μέσω του x_0 η παράγωγος από αριστερά πρός τα δεξιά αλλάζει πρόσημο από + σε −) τότε στο σημείο x_0 η συνάρτηση έχει μέγιστο (maximum)

β') Αν $f'(x) < 0$ όταν $x < x_0$ και $f'(x) > 0$ όταν $x > x_0$ (δηλαδή περνώντας μέσω του x_0 η παράγωγος από αριστερά πρός τα δεξιά αλλάζει πρόσημο από − σε +) τότε στο σημείο x_0 η συνάρτηση έχει ελάχιστο (minimum).

γ') Αν υπάρχει περιοχή $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ του σημείου x_0 που η παράγωγος $f'(x)$ διατηρεί το πρόσημο τότε στο σημείο x_0 η δεδομένη συνάρτηση $f(x)$ δεν έχει ούτε max, ούτε min.

3.4.1. ΤΡΟΠΟΣ ΕΥΡΕΣΕΩΣ ΤΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ: Έστω ότι η $f(x)$ ορίζεται και είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα (α, β). Τότε για να βρούμε τα ακρότατα:

α') Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της συναρτήσεως, δηλαδή τα σημεία που $f'(x) = 0$ ή $f'(x)$ δεν υπάρχει.

β') Εξετάζουμε το πρόσημο της παραγώγου $f'(x)$ σε κάποια δ-περιοχή καθενός κρίσιμου σημείου.

Και αν Ι. $\left.\begin{array}{l} f'_{x<x_0}(x) = + \\ f'_{x>x_0}(x) = - \end{array}\right\}$ έχουμε max

ΙΙ. $\left.\begin{array}{l} f'_{x<x_0}(x) = - \\ f'_{x>x_0}(x) = + \end{array}\right\}$ έχουμε min

III $\left.\begin{array}{l} f'_{x<x_0}(x) = + \ (-) \\ f'_{x>x_0}(x) = + \ (-) \end{array}\right\}$ δεν έχουμε ούτε min ούτε max

Παρατήρηση: Το μέγιστο και το ελάχιστο συνεχούς συναρτήσεως εναλλάσσονται διαδοχικά.

342 ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ:

Έστω ότι στο κρίσιμο σημείο x_0 η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη δύο φορές $[f'(x)=0]$

Αν συγχρόνως $f''(x_0)>0$, τότε η συνάρτηση $f(x)$ έχει στο σημείο x_0 ελάχιστο (min).

Αν $f''(x_0)<0$ τότε στο σημείο x_0 η συνάρτηση έχει μέγιστο (max).

Αν $f''(x_0)=0$ το ζήτημα υπάρξεως max ή min παραμένει άλυτο (καταφεύγουμε στην πρώτη παράγωγο).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

368. Να βρείτε τα ακρότατα, τα διαστήματα μονοτονίας και να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της συναρτήσεως $y=x^3-6x^2+9x-3$

Λύση

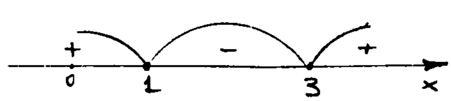
α) Παραγωγίζουμε για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία:

$$y'=(x^3-6x^2+9x-3)'=3x^2-12x+9$$

$$y'=0 \Rightarrow 3x^2-12x+9=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0$$

$$\Rightarrow x_1=1 \ , x_2=3$$

β) Εξετάζουμε το πρόσημο της παραγώγου από το εξής σχήμα:



Έχουμε $y'=3(x-1)(x-3)$ και από το σχήμα:

$x=1$: $\left.\begin{array}{l} y'_{x<1}=+ \\ y'_{x>1}=- \end{array}\right\}$ max $\qquad x=3$: $\left.\begin{array}{l} y'_{x<3}=- \\ y'_{x>3}=+ \end{array}\right\}$ min

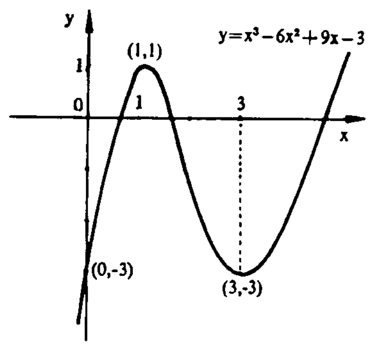
Τα διαστήματα μονοτονίας είναι $(-\infty, 1)\uparrow$, $(1,3)\downarrow$, $(3,+\infty)\uparrow$

γ') Βρίσκουμε τις τιμές της συναρτήσεως όταν $x=1$ και $x=3$.

$y(1) = 1-6+9-3 = 1$, $y(3) = 27-54+27-3 = -3$.

Έτσι, τα ακρότατα είναι: $(1,1)$ και $(3,-3)$

Για να κατασκευάσουμε την γραφική παράσταση, σημειώνουμε τα σημεία των ακροτάτων στο επίπεδο συντεταγμένων, βρίσκουμε το σημείο $x=0$ και $y=-3$ και αν χρειασθεί βρίσκουμε συμπληρωματικά και άλλα σημεία.



369. Να βρείτε τα ακρότατα και να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως $y = \frac{x^4}{4} - x^3$

Λύση

Το πεδίο ορισμού είναι $\Delta = (-\infty, +\infty)$

$$y' = \frac{4x^3}{4} - 3x^2 \Rightarrow y' = x^3 - 3x^2$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ και } x_2 = 3.$$

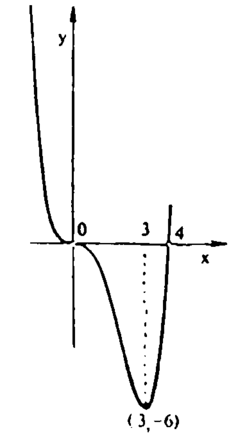
Έτσι τα κρίσιμα σημεία είναι $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Τα διαστήματα μονοτονίας είναι $(-\infty, 0)$, $(0,3)$, $(3,+\infty)$

Εξετάζουμε το πρόσημο της παραγώγου

$$y' = x^2(x-3)$$

Για $x=0$: $\left.\begin{array}{l} y'_{x<0} = - \\ y'_{x>0} = - \end{array}\right\}$ δεν υπάρχει ούτε min ούτε max



Βρίσκουμε $f(0)=0$ και το min $(3,-6)$.
Η γραφική παράσταση φαίνεται στο παραπλεύρως σχήμα.

Συμπληρωματικά βρίσκουμε το σημείο $x=4$, $y=0$.

370. Να βρεθούν τα ακρότατα και να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της συναρτήσεως $y=x+\sigma\upsilon\nu 2x$ στο διάστημα $(0,\pi)$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού δεσμεύεται στο $(0,\pi)$.

$y'=1-2\eta\mu 2x$, $y'=0 \Rightarrow 1-2\eta\mu 2x=0 \Rightarrow$

$\eta\mu 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow 2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ και $2x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ $\quad k\in Z$.

Στο διάστημα $(0,\pi)$ έχουμε τα κρίσιμα σημεία

$$x_1=\frac{\pi}{12}, \quad x_2=\frac{5\pi}{12}$$

Εδώ καλύτερα να εφαρμόσουμε την δευτέρα παράγωγο γιά να βρούμε το ακρότατο. Βρίσκουμε λοιπόν την β' παράγωγο:

$y''=(1-2\eta\mu 2x)'=-4\sigma\upsilon\nu 2x$.

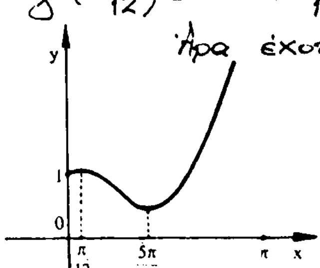
Εξετάζουμε το πρόσημό της στα σημεία $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$:

$y''\left(\frac{\pi}{12}\right)=-4\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{12}=-4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=-4\frac{\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}<0$

Άρα έχουμε μέγιστο

$y''\left(\frac{5\pi}{12}\right)=-4\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{12}\cdot 2=-4\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}=4\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}>0$

Άρα έχουμε ελάχιστο.



Βρίσκουμε

$y\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 1{,}1$, $y\left(\frac{5\pi}{12}\right)\approx 0{,}4$.

Έτσι

max $\left(\frac{\pi}{12}, 1{,}1\right)$ και min $\left(\frac{5\pi}{12}, 0{,}4\right)$.

371. Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως $y = x^2(x-12)^2$.

Λύση

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο:

$$y' = (x^2)'(x-12)^2 + x^2\left[(x-12)^2\right]' = 2x(x-12)^2 + x^2\, 2(x-12)$$

$$\Rightarrow y' = 2x(x-12)(x-12+x) = 2x(x-12)(2x-12) = 4x(x-12)(x-6)$$

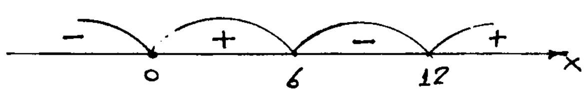
Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$y' = 0 \Rightarrow 4x(x-12)(x-6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 12, \quad x_3 = 6$$

Ώστε τα κρίσιμα σημεία είναι: $x=0$, $x=12$, $x=6$.

Εξετάζουμε το πρόσημο της παραγώγου στην περιοχή των κρισίμων σημείων: $y' = 4x(x-12)(x-6)$

$x=0$	$x=6$	$x=12$
$\left.\begin{array}{l} y'_{x<0} = - \\ y'_{x>0} = + \end{array}\right\}$ min $(0,0)$	$\left.\begin{array}{l} y'_{x<6} = + \\ y'_{x>6} = - \end{array}\right\}$ max $(6, 36^2)$	$\left.\begin{array}{l} y'_{x<12} = - \\ y'_{x>12} = + \end{array}\right\}$ min $(12,0)$



Βρίσκουμε τώρα:

$$y(0) = 0 \qquad y(6) = 36(6-12)^2 = 36^2 \qquad y(12) = 12^2(12-12) = 0$$

Άρα τα ακρότατα της συναρτήσεως είναι $(0,0)$, $(6,36^2)$, $(12,0)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

372. Χρησιμοποιώντας την δευτέρα παράγωγο να βρείτε τα ακρότατα της συναρτήσεως $y = 2ημx + συν2x$

373. Να βρείτε τα ακρότατα της συναρτήσεως $y = x - \ln(1+x)$

374. Ομοίως της συναρτήσεως $y = \dfrac{x^3}{x^2+3}$

375 Ομοίως της συναρτήσεως $f(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

Να βρεθούν τα ακρότατα και να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων

376. $y = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$ 377. $y = x^2+2x-3$.

3.4.3. ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

Εστω ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Τότε η συνάρτηση μπορεί να πάρει την ελάχιστη (μέγιστη) τιμή, στο κλειστό διάστημα, στα κρίσιμα σημεία ή στα άκρα του διαστήματος. Το μέγιστο και το ελάχιστο της συναρτήσεως στο $[a, \beta]$ θα τα ονομάζουμε γενικά ακρότατα.

Για να βρούμε τα γενικά ακρότατα της συναρτήσεως στό διάστημα $[a, \beta]$: α') Υπολογίζουμε τις τιμές της συναρτήσεως σε όλα τα κρίσιμα σημεία του διαστήματος $[a, \beta]$.

β') Υπολογίζουμε τις τιμές της συναρτήσεως στα άκρα, δηλαδή υπολογίζουμε τα $f(a)$ και $f(\beta)$.

γ') Επιλέγουμε απ' αυτές την μέγιστη και την ελάχιστη.

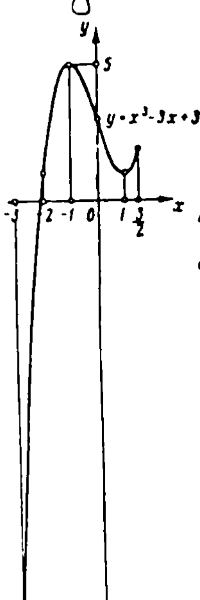
Αν η συνάρτηση ορίζεται και είναι συνεχής σε ανοικτό διάστημα (a, β) τότε η συνάρτηση μπορεί να μην έχει γενικά ακρότατα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο στο διάστημα $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$ της συναρτήσεως $y = x^3 - 3x + 3$

Λύση

α') Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της συναρτήσεως :

$y' = 3x^2 - 3$ και γιά $y' = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ και $x_2 = -1$.



Ετσι τα κρίσιμα σημεία είναι $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

β') Υπολογίζουμε τις τιμές της συναρτήσεως στα κρίσιμα σημεία:

$y(1) = 1 - 3 + 3 = 1$, $y(-1) = -1 + 3 + 3 = 5$.

γ') Υπολογίζουμε τις τιμές της συναρτήσεως στα άκρα του διαστήματος, δηλαδή:

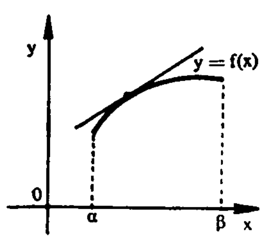
$$y(-3) = (-3)^3 - 3(-3) + 3 = -27 + 9 + 3 = -15$$
$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 3 = \frac{27}{8} - \frac{9}{2} + 3 = \frac{15}{8}$$

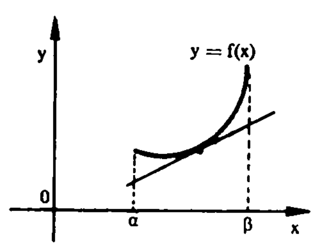
Τελικά έχουμε τις τιμές από τις οποίες θα διαλέξουμε το μέγιστο καί ελάχιστο : $-15, 1, \frac{15}{8}, 5$ απ' όπου το μέγιστο είναι $y(-1) = 5$ και το ελάχιστο $y(-3) = -15$.

3.5. ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ - ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1: Λέμε ότι στό διάστημα (α,β) η γραφική παράσταση της συνεχούς παραγωγίσιμης συναρτήσεως $f(x)$, $x\in(\alpha,\beta)$ είναι <u>στραμένη προς τα πάνω με το κυρτό μέρος (κυρτή)</u>, αν η παράγωγος $f'(x)$ είναι φθίνουσα στο (α,β). Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε σημείο της γραφικής παραστάσεως $y=f(x)$, $x\in(\alpha,\beta)$ υπάρχει εφαπτομένη καί βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της συναρτήσεως (βλ. σχήμα αριστερά).

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: Λέμε ότι στο διάστημα (α,β) η γραφική παράσταση της συνεχούς παραγωγίσιμης συναρτήσεως $f(x)$, $x\in(\alpha,\beta)$ είναι <u>στραμένη πρός τα κάτω με το κυρτό μέρος (κοίλη)</u>, αν η παράγωγος $f'(x)$ είναι αύξουσα στό (α,β). Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε σημείο της γραφικής παραστάσεως $y=f(x)$, $x\in(\alpha,\beta)$ υπάρχει εφαπτομένη καί βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της συναρτήσεως (βλ. σχήμα δεξιά).





3.5.1. ΙΚΑΝΗ ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ:

Εστω ότι η συνάρτηση $y=f(x)$, $x\in(\alpha,\beta)$ έχει πρώτη και δευτέρα παράγωγο. Τότε:

α') Αν $f''(x)<0$ $\forall x\in(\alpha,\beta)$, η καμπύλη είναι στραμένη με το κυρτό μέρος πρός τα πάνω (κυρτή) στο (α,β).

β') Αν $f''(x)>0$ $\forall x\in(\alpha,\beta)$, η καμπύλη είναι στραμένη με το κυρτό μέρος πρός τα κάτω (κοίλη) στο (α,β).

Για να βρούμε τα διαστήματα κυρτότητας της καμπύλης $y=f(x)$ πρέπει:

α. Να βρούμε τα κρίσιμα σημεία (ως προς την δευτέρα παράγωγο) που ανήκουν στο διάστημα (α,β), δηλαδή τα σημεία εκείνα όπου $f''(x)=0$ ή $f''(x)$ δεν υπάρχει.

β. Σε κάθε διάστημα από το σύνολο των διαστημάτων που τα κρίσιμα σημεία χωρίζουν το πεδίο ορισμού, διαπιστώνεται το πρόσημο της $f''(x)$.

Αν $f''(x)>0$, τότε στο διάστημα αυτό η καμπύλη είναι κοίλη, αν δε $f''(x)<0$ τότε στο διάστημα αυτό είναι κυρτή.

3.5.2. ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Σημείο καμπής της γραφικής παραστάσεως (καμπύλης) $y=f(x)$ ονομάζεται το σημείο της καμπύλης f που χωρίζει τα διαστήματα κυρτότητας της καμπύλης αυτής.

Εστω ότι η $y=f(x)$, $x\in(\alpha,\beta)$ έχει στο διάστημα αυτό συνεχείς παραγώγους πρώτης και δευτέρας τάξεως και $f''(x)$ έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων που μηδενίζεται. Τότε για να βρούμε τα σημεία καμπής πρέπει:

α. Να βρούμε τα κρίσιμα σημεία, δηλαδή τα σημεία που $f''(x)=0$ ή δεν υπάρχει, της συναρτήσεως $y=f(x)$ που ανήκουν στο (α,β).

β'. Να εξετάσουμε το πρόσημο της $f''(x)$ σε κάποια περιοχή κάθε κρίσιμου σημείου x_0. Και, αν $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο στο πέρασμα της μεταβλητής από το σημείο x_0 τότε το σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της καμπύλης $y=f(x)$, $x\in(\alpha,\beta)$.

Παρατήρηση: Στο σημείο καμπής η εφαπτομένη της καμπύλης από την μία πλευρά θα βρίσκεται πάνω από την καμπύλη και από την άλλη κάτω από την καμπύλη (βλ. σχήμα της παρακάτω λυμένης ασκήσεως).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να βρείτε τα διαστήματα κυρτότητας και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων:

378. $y=x^3$.

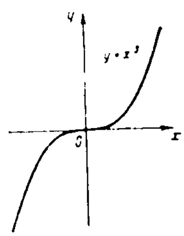
Λύση

α΄. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$y'=3x^2,\quad y''=6x,\quad \text{για } y''=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0$$

Έτσι έχουμε κρίσιμο σημείο $x=0$ που χωρίζει το πεδίο ορισμού $(-\infty,+\infty)$ σε δύο διαστήματα κυρτότητας $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

β΄. Διαπιστώνουμε το πρόσημο της $f''(x)$ στα διαστήματα $(-\infty,0)$ $(0,+\infty)$.



$$\left.\begin{array}{l} y''_{x<0} = - \\ y''_{x>0} = + \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ έχουμε σημείο καμπής και}$$

στο $(-\infty,0)$ η καμπύλη είναι κυρτή.

Στο $(0,+\infty)$ είναι κοίλη. Τό σημείο καμπής είναι $(0,0)$. (βλ. σχήμα).

379. $y=xe^{-x}$

Λύση

α΄. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$y'=e^{-x}-e^{-x}x$

$y''=-e^{-x}+e^{-x}x-e^{-x}=e^{-x}(x-2)$

$y''=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

Το σημείο $x=2$ χωρίζει το διάστημα $\Delta=(-\infty,+\infty)$ στα διαστήματα $(-\infty,2)$, $(2,+\infty)$.

β΄. Εξετάζουμε το πρόσημο της y''

$$\left.\begin{array}{l} y''_{x<2} = - \\ y''_{x>2} = + \end{array}\right\} \Rightarrow x=2 \text{ είναι σημείο καμπής}$$

Η καμπύλη είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty,2)$ γιατί $y''<0$ και κοίλη στο διάστημα $(2,+\infty)$ γιατί $y''>0$.

380. $y = x^4 + x^3 - 18x^2 + 24x - 12$

Λύση

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία: $y' = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 24$

$y'' = 12x^2 + 6x - 36 \qquad y'' = 0 \Rightarrow 12x^2 + 6x - 36 = 0$

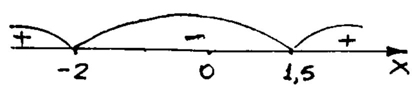
$\Rightarrow 2x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \quad , x_2 = \frac{3}{2} = 1{,}5$

Γράφουμε την δευτέρα παράγωγο υπό την μορφή

$y'' = 6(x+2)(x-1{,}5)$

Τα διαστήματα κυρτότητας είναι $(-\infty, -2), (-2, 1{,}5), (1{,}5, \infty)$.

Για να βρούμε το πρόσημο της δευτέρας παραγώγου χρησιμοποιούμε το εξής σχήμα



Έτσι τα σημεία $x = -2$, $x = 1{,}5$ είναι σημεία καμπής και στα διαστήματα $(-\infty, -2) \cup (1{,}5, +\infty)$ είναι κοίλη.

Στο διάστημα $(-2, 1{,}5)$ είναι κυρτή.

381. $y = x^2 + 2\eta\mu x$

Λύση

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$y' = 2x + 2\sigma\upsilon\nu x \quad , y'' = 2 - 2\eta\mu x$

$y'' = 0 \Rightarrow 2(1 - \eta\mu x) = 0 \Rightarrow \eta\mu x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$.

Παρατηρούμε ότι:

$y'' = 2(1 - \eta\mu x) \geq 0$, επειδή $\eta\mu x \leq 1$, συνεπώς η καμπύλη είναι παντού κοίλη στο $(-\infty, +\infty)$ και σημεία καμπής δεν υπάρχουν.

382. Ποιά συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές α, β, γ, ώστε η καμπύλη $y = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$ να έχει σημεία καμπής;

Λύση

Βρίσκουμε την δευτέρα παράγωγο:

$y' = 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + \delta$

$y'' = 12\alpha x^2 + 6\beta x + 2\gamma$

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$y''=0 \Rightarrow 12ax^2+6\beta x+2\gamma=0$$

Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση δευτέρου βαθμού έχει ρίζες πραγματικές και διάφορες όταν η διακρίνουσα $\Delta>0$, άρα

$$\Delta=9\beta^2-24a\gamma>0 \Leftrightarrow$$

$3\beta^2-8a\gamma>0$. Αυτή είναι και η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές a, β, γ.

383. Για ποιές τιμές των a και β το σημείο $(1,3)$ είναι σημείο καμπής της καμπύλης $y=ax^3+\beta x^2$;

Λύση

Έχουμε $y'=3ax^2+2\beta x$, $y''=6ax+2\beta$.

Το σημείο καμπής πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες: α) Να μηδενίζει την δευτέρα παράγωγο. β) Να ικανοποιεί την εξίσωση της καμπύλης. Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} 6a\cdot 1+2\beta=0 \\ a\cdot 1+\beta\cdot 1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+\beta=0 \\ a+\beta=3 \end{cases}$$

Απ' όπου παίρνουμε $a=-1,5$ και $\beta=4,5$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

Να βρείτε τα διαστήματα κυρτότητας και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων:

384. $y=x^3-6x^2+12x+h$

385. $y=(x+1)^4$

386. $y=\dfrac{x^3}{x^2+12}$

387. $y=x^2\ln x$

4. ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

4.1. ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΚΑΙ ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1: Η συνάρτηση $F(x)$ ονομάζεται παράγουσα της συναρτήσεως $f(x)$ στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, αν σε όλα τα σημεία του διαστήματος αυτού ισχύει η σχέση:

$$F'(x)=f(x)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν $F_1(x)$ και $F_2(x)$ δύο παράγουσες της συναρτήσεως $f(x)$ στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε η διαφορά τους ισούται με σταθερό αριθμό, δηλαδή

$$F_1(x)-F_2(x)=C.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: Αν η συνάρτηση $F(x)$ είναι παράγουσα της συναρτήσεως $f(x)$, τότε $F(x)+C$ ονομάζεται <u>αόριστο ολοκλήρωμα</u> της συναρτήσεως $f(x)$ και συμβολίζεται:

$\int f(x)\,dx$ όπου x ονομάζεται μεταβλητή της συναρτήσεως.

Έτσι έχουμε: $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ αν $F'(x)=f(x)$.

Το αόριστο λοιπόν ολοκλήρωμα παρουσιάζει οικογένεια συναρτήσεων $y=F(x)+C$.

4.1.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΑΟΡΙΣΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

I. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x).$

II. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$

III. $\int dF(x) = F(x)+C$

IV: $\int \left(f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_k(x)\right)dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx \pm\cdots\pm \int f_k(x)\,dx.$

V: $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha\int f(x)\,dx$, όπου α σταθερά.

VI: Αν $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, τότε $\int f(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x)+C.$

4.2. ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Η πράξη της ευρέσεως του αορίστου ολοκληρώματος $\int f(x)dx$ ονομάζεται <u>ολοκλήρωση</u> της συναρτήσεως $f(x)$.

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε υπάρχει η παράγουσα και συνεπώς το αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$

Οι παρακάτω τύποι ολοκληρώσεως μπορούν να ελεγχθούν με την βοήθεια της παραγωγίσεως.

1. $\int x^\nu dx = \dfrac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + C \qquad (\nu \neq -1)$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int \eta\mu x\, dx = -\sigma\upsilon\nu x + C$

4. $\int \sigma\upsilon\nu x\, dx = \eta\mu x + C$

5. $\int \dfrac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \varepsilon\varphi x + C$

6. $\int \dfrac{dx}{\eta\mu^2 x} = -\sigma\varphi x + C$

7. $\int \sigma\varphi x\, dx = \ln|\eta\mu x| + C$

8. $\int \varepsilon\varphi x\, dx = -\ln|\sigma\upsilon\nu x| + C$

9. $\int e^x dx = e^x + C$

10. $\int \alpha^x dx = \dfrac{\alpha^x}{\ln\alpha} + C$

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \tau o\xi\varepsilon\varphi x + C \qquad$ 11΄. $\int \dfrac{dx}{\alpha^2+x^2} = \dfrac{1}{\alpha}\tau o\xi\varepsilon\varphi \dfrac{x}{\alpha} + C$

12. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tau o\xi\eta\mu x + C \qquad$ 13΄. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \tau o\xi\eta\mu \dfrac{x}{a} + C$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ - ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να βρεθούν τα ολοκληρώματα

388. $\int (2x^3 - 3\eta\mu x)dx$

Λύση

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες IV, V έχουμε:

$$\int (2x^3 - 3\eta\mu x)dx = 2\int x^3 dx - 3\int \eta\mu x\, dx = (\text{τύποι } 1,3) =$$

$$= 2\,\frac{x^{3+1}}{3+1} + 3\,\sigma\upsilon\nu x = \frac{x^4}{2} + 3\,\sigma\upsilon\nu x + C.$$

389. $\int \frac{x-2}{x^3}dx$

Λύση:

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα IV έχουμε:

$$\int \frac{x-2}{x^3}dx = \int \frac{x}{x^3}dx - \int \frac{2}{x^3}dx = \int x^{-2}dx - 2\int x^{-3}dx \Rightarrow (\text{τύπος } 1)$$

$$\int \frac{x-2}{x^3}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - 2\,\frac{x^{-3+1}}{-3+1} = -x^{-1} + x^{-2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + C.$$

390. $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})dx$

Λύση

Έχουμε $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} =$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{4}x\sqrt{x} + C$$

391. $\int e^x\left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$

Λύση

$$\int e^x\left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx = \int e^x dx - \int \frac{dx}{x^2} = e^x - \int x^{-2}dx =$$

$$= e^x - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = e^x + \frac{1}{x} + C.$$

392. $\int \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu^2 x}dx$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x$. Άρα

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu^2 x}dx = \int \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x\, \eta\mu^2 x}dx = \int \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x\, \eta\mu^2 x}dx - \int \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x\, \eta\mu^2 x}dx$$

$$= \int \frac{dx}{\eta\mu^2 x} - \int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = (\text{τύποι 5 και 6}) = -\sigma\varphi x - \varepsilon\varphi x + C.$$

393. $\int \frac{dx}{\eta\mu^2 x\, \sigma\upsilon\nu^2 x}$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$. Άρα:

$$\int \frac{dx}{\eta\mu^2 x\, \sigma\upsilon\nu^2 x} = \int \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x\, \sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \int \frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x\, \sigma\upsilon\nu^2 x}dx + \int \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x\, \sigma\upsilon\nu^2 x}dx$$

$$= \int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \int \frac{dx}{\eta\mu^2 x} = \varepsilon\varphi x - \sigma\varphi x + C.$$

394. $\int \eta\mu\eta\rho\, x\, dx$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\eta\rho\, x = \eta\mu^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{2}$

Άρα $\int \eta\mu\eta\rho\, x\, dx = \int \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu x\, dx =$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\eta\mu x + C.$$

Να βρείτε τα ολοκληρώματα και να ελέγξετε τις απαντήσεις με την βοήθεια της παραγωγίσεως

395. $\int \sigma\varphi^2 x\, dx$

Λύση

$$\int \sigma\varphi^2 x\, dx = \int \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x}dx = \int \frac{1-\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x}dx = \int \frac{dx}{\eta\mu^2 x} - \int dx = -\sigma\varphi x - x + C$$

Έλεγχος: $(-\sigma\varphi x - x + C)' = -(\sigma\varphi x)' - (x)' = -\left(-\frac{1}{\eta\mu^2 x}\right) - 1 = \frac{1}{\eta\mu^2 x} - 1 =$

$= \frac{1-\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x} = \sigma\varphi^2 x$, δηλαδή πήραμε $(F(x)+C)' = f(x)$.

396. $\int \left(\eta\mu\frac{x}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right)^2 dx$

Λύση

$$\int\left(\eta\mu\frac{x}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right)^2dx=\int\left(\eta\mu^2\frac{x}{2}-2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}\right)dx=$$

$$=\int dx-\int\eta\mu x\,dx=x+\sigma\upsilon\nu x+C$$

Έλεγχος:

$$\left(x+\sigma\upsilon\nu x+C\right)'=1-\eta\mu x=\eta\mu^2\frac{x}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}-2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}=$$

$$=\left(\eta\mu\frac{x}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right)^2.$$

397. $\displaystyle\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$

Λύση

Φέρνουμε το ολοκλήρωμα σε μιά από τις μορφές του πίνακα, ως εξής:

$$\int\frac{1+2x+x^2}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{(1+x^2)}{x(1+x^2)}dx+2\int\frac{x\,dx}{x(1+x^2)}$$

ή $$\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{1+x^2}=\ln|x|+2\tau o\xi\varepsilon\varphi x+C$$

Έλεγχος: $$\left(\ln|x|+2\tau o\xi\varepsilon\varphi x+C\right)'=\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{1+x^2+2x}{x(1+x^2)}=\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να βρείτε τα ολοκληρώματα και να ελέγξετε τις απαντήσεις με την βοήθεια της παραγωγίσεως:

398. $\displaystyle\int\frac{10x^8+3}{x^4}dx$

399. $\displaystyle\int\frac{(x^2+1)^2}{x^3}dx$

400. $\displaystyle\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$

401. $\displaystyle\int\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

402. $\displaystyle\int\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}dx$

403. $\displaystyle\int\varepsilon\varphi^2x\,dx$

4.3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ

4.3.1. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ Η ΑΛΛΑΓΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ (1) αλλά δεν μπορούμε να βρούμε την παράγουσα της συναρτήσεως $f(x)$ στον γνωστό πίνακα. Είναι γνωστό όμως ότι η παράγουσα υπάρχει.

Εκλέγουμε τότε κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής, θέτοντας

$$x=\phi(t) \qquad (2)$$

όπου $\phi(t)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο που έχει επίσης αντίστροφη συνάρτηση.

Τότε $dx=\phi'(t)dt$ και ισχύει η ισότητα

$$\int f(x)dx=\int f(\phi(t))\phi'(t)dt \qquad (3)$$

Η συνάρτηση $\phi(t)$ εκλέγεται έτσι ώστε να είναι δυνατή η ολοκλήρωση του δεξιού μέλους της (3).

Παρατήρηση: Πολλές φορές η αλλαγή της μεταβλητής δεν γίνεται με την αντικατάσταση $x=\phi(t)$ αλλά με την $t=\psi(x)$.

π.χ. αν έχουμε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}dx \quad ή \quad \int f(x)f'(x)dx$$

τότε είναι προτιμότερη η αντικατάσταση: $\psi(x)=t \Rightarrow \psi'(x)dx=dt$

οπότε $$\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}dx=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|=\ln|\psi(x)|+C$$

ή $f(x)=t \Rightarrow f'(x)dx=dt$ οπότε

$$\int f(x)f'(x)dx=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}=\frac{f^2(x)}{2}+C$$

Μπορούμε ακόμα χρησιμοποιώντας το διαφορικό, να γράψουμε $(d\psi(x)=\psi'(x)dx,\ df(x)=f'(x)dx)$:

$$\int\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}dx=\int\frac{d(\psi(x))}{\psi(x)}=\ln|\psi(x)|+C$$

ή

$$\int f(x)f'(x)dx=\int f(x)d(f(x))=\frac{f^2(x)}{2}+C$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να βρεθούν τα ολοκληρώματα

404. $\int (x^2-3x+1)^{10}(2x-3)\,dx$

Λύση

Επειδή $(2x-3)dx = d(x^2-3x+1)$, έχουμε

$$\int (x^2-3x+1)^{10}(2x-3)dx = \int (x^2-3x+1)\,d(x^2-3x+1) = \frac{(x^2-3x+1)^2}{2} + C$$

405. $\int \sqrt{1+x^2}\; x\,dx$

Λύση

Επειδή $x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}d(1+x^2)$, γράφουμε

$$\int \sqrt{1+x^2}\; x\,dx = \int (1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}d(1+x^2) = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+x^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} = \frac{1}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2} + C$$

(Εφαρμόσαμε τον τύπο 1 του πίνακα, θεωρώντας ως μεταβλητή το $1+x^2$ που μπορούμε να το συμβολίσουμε και με t δηλαδή $t=1+x^2$)

406. $\int \sqrt{\eta\mu x}\;\sigma\upsilon\nu x\,dx$

Λύση

Ισχύει $d\,\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x\,dx$, άρα

$$\int \sqrt{\eta\mu x}\;\sigma\upsilon\nu x\,dx = \int (\eta\mu x)^{\frac{1}{2}}d\,\eta\mu x = \frac{(\eta\mu x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}\,\eta\mu x\sqrt{\eta\mu x} + C.$$

407. $\int \frac{x\,dx}{1+x^2}$

Λύση $\quad x\,dx = \frac{1}{2}d(1+x^2)$, άρα

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

408. $\int \sigma\upsilon\nu^2 x\,dx$

Λύση

Εφαρμόζουμε τον τύπο $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ έχουμε

$$\int \sigma\upsilon\nu^2 x\,dx = \int \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 2x\,dx$$

Επειδή $dx = d(2x)\cdot\frac{1}{2}$ έχουμε

$$\int \sigma\upsilon\nu^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 2x\,d(2x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\eta\mu 2x + C.$$

409. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Λύση

Ισχύει $x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}d(1+x^2)$. Άρα

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}d(1+x^2) = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1+x^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \sqrt{1+x^2} + C.$$

410. $\displaystyle\int (\ell n x)^2\frac{dx}{x}$

Λύση

Ισχύει $\frac{dx}{x} = d(\ell n x)$. Συνεπώς

$$\int (\ell n x)^2\frac{dx}{x} = \int (\ell n x)^2 d(\ell n x) = \frac{(\ell n x)^3}{3} + C$$

411. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+5}$

Λύση

Γράφουμε $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+5} = \int \frac{dx}{(\sqrt{3}x)^2+(\sqrt{5})^2}$ και επειδή $dx = \frac{1}{\sqrt{3}}d(\sqrt{3}x)$

έχουμε $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+5} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}x)}{(\sqrt{3}x)^2+(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\,\tau o\xi\epsilon\varphi\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{5}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{15}}\,\tau o\xi\epsilon\varphi\sqrt{\frac{3}{5}}\,x + C.$$

412. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$

Λύση

Παρατηρούμε ότι η παράσταση $\dfrac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$ έχει περίπου την μορφή της $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, συνεπώς

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{8}x)^2+(\sqrt{7})^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\int \frac{d(\sqrt{8}x)}{\sqrt{(\sqrt{8}x)^2+(\sqrt{7})^2}} = (\beta\lambda.\ \tau\acute{\upsilon}\pi o\ 14) =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{8}}\ \ell n\left|\sqrt{8}x+\sqrt{8x^2+7}\right|+c=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ \ell n\left|2\sqrt{2}\,x+\sqrt{8x^2+7}\right|+C$$

413. $\int\frac{dx}{\eta\mu x}$

Λύση

$$\int\frac{dx}{\eta\mu x}=\int\frac{dx}{2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}=$$ (διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή μέ $\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}$)

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}}{\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}$$ και επειδή $\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}=2d\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)$, έχουμε

$$\int\frac{dx}{\eta\mu x}=\int\frac{d\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}=\ell n\left|\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right|+C.$$

414. $\int\varepsilon\varphi x\,dx$

Λύση

$$\int\varepsilon\varphi x\,dx=\int\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx=-\int\frac{d(\sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu x}=-\ell n|\sigma\upsilon\nu x|+C.$$

415. $\int\eta\mu^3 6x\ \sigma\upsilon\nu\, 6x\,dx$

Λύση

Επειδή $\sigma\upsilon\nu 6x\,dx=\frac{1}{6}d\,(\eta\mu 6x)$, θά έχουμε

$$\int\eta\mu^3 6x\,\sigma\upsilon\nu 6x\,dx=\frac{1}{6}\int(\eta\mu 6x)^3d\,(\eta\mu 6x)=\frac{1}{6}\,\frac{(\eta\mu 6x)^4}{4}=\frac{\eta\mu^4 6x}{24}+C$$

416. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$

Λύση

Έχουμε: $$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{(x+a)-(x-a)}{2a(x-a)(x+a)}=$$

$$=\frac{1}{2a(x-a)}-\frac{1}{2a(x+a)}.$$ Ώστε

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x-a}-\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a}=\frac{1}{2a}\int\frac{d(x-a)}{x-a}-$$

$$-\frac{1}{2a}\int\frac{d(x+a)}{x+a}=\frac{1}{2a}\ell n|x-a|-\frac{1}{2a}\ell n|x+a|=\frac{1}{2a}\ \ell n\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

417. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{x^8-2}$

Λύση

Επειδή $x^3dx = \frac{1}{4}d(x^4)$ έχουμε

$$\int \frac{x^3dx}{x^8-2} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2-(\sqrt{2})^2} = (\text{προηγ. άσκηση}) = \frac{1}{4\cdot 2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|$$

418. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο αντικαταστάσεως να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$$

Λύση

Θέτουμε $\sqrt{2-x} = t \Rightarrow 2-x = t^2 \Rightarrow x^2 = (2-t^2)^2$

$d(2-x) = d(t^2) \Rightarrow -dx = 2t\,dt$, οπότε

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}} = -\int \frac{4-4t^2+t^4}{t}2t\,dt = -2\int (4-4t^2+t^4)dt =$$

$$= -2\left(4t-4\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right) = -\frac{2}{15}t(60-20t^2+3t^4)+C =$$

$$= -\frac{2}{15}\sqrt{2-x}\left[60-20(2-x)+3(2-x)^2\right]+C = -\frac{2}{15}\sqrt{2-x}\,(32+8x-3x^2)+C \quad (x<2).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

Με την μέθοδο της αντικαταστάσεως να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

419. $\displaystyle\int \text{συν}^5x\sqrt{\text{ημ}x}\,dx$

420. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

421. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$

422. $\displaystyle\int \text{ημ}\frac{x}{2}\,dx$

423. $\displaystyle\int \frac{dx}{\text{συν}^2 4x}$

424. $\displaystyle\int \left(e^{-\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{2}}\right)dx$

425. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\;x\,dx$

426. $\displaystyle\int x^3(1-2x^4)^3dx$

427. $\displaystyle\int \text{ημ}(2-3x)dx$

428. $\displaystyle\int x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}dx$

429. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$

430. $\displaystyle\int \frac{2x-5}{3x^2-2}dx$

4.3.2. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΤΡΙΩΝΥΜΟ

I. $J_1=\int \frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$

Μετασχηματίζουμε τον παρονομαστή στη μορφή αθροίσματος ή διαφοράς τετραγώνων:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha\left(\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)=$$

$$=\alpha\left(\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)\right)$$

Θέτοντας $\pm k^2=\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}$ και $x+\frac{\beta}{2\alpha}=t \Rightarrow dx=dt$, τότε

$$J_1=\frac{1}{\alpha}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}$$

που αυτό βρίσκεται στον πίνακα ολοκληρωμάτων (τύποι 11΄ & 12)

Παρατήρηση: Στο $\pm k^2$ το πρόσημο εκλέγεται ανάλογα με το αν η παράσταση $\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}$ παίρνει + ή −, δηλαδή αν το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει μιγαδικές ή πραγματικές ρίζες.

II. $J_2=\int\frac{Ax+B}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx$

Μετασχηματίζουμε την συνάρτηση ως εξής:

$$J_2=\int\frac{Ax+B}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\int\frac{\frac{A}{2\alpha}(2\alpha x+\beta)+\left(B-\frac{A\beta}{2\alpha}\right)}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx \Rightarrow$$

$$J_2=\frac{A}{2\alpha}\int\frac{2\alpha x+\beta}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx+\left(B-\frac{A\beta}{2\alpha}\right)\int\frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα κάνουμε την αντικατάσταση

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=t \Rightarrow (2\alpha x+\beta)dx=dt$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι το J_1 που το υπολογίζουμε, άρα

$$J_2=\frac{A}{2\alpha}\int\frac{dt}{t}+\left(B-\frac{A\beta}{2\alpha}\right)J_1=\frac{A}{2\alpha}\ln|\alpha x^2+\beta x+\gamma|+\left(B-\frac{A\beta}{2\alpha}\right)J_1$$

III. $J_3=\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$

Εργαζόμενοι όπως και για τα J_1, J_2 ανάλογα με το πρόσημο του a, έχουμε

$$J_3=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}}=\begin{cases}\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}}, & \text{αν } a>0\\[2ex] \displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}, & \text{αν } a<0.\end{cases}$$

Τα δύο τελευταία ολοκληρώματα είναι στον πίνακα (13΄ και 14)

IV $\quad J_4=\displaystyle\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}}dx$

Μετασχηματίζοντας την συνάρτηση όπως και στο J_2 έχουμε:

$$J_4=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+\beta)+\left(B-\frac{A\beta}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+\beta}{\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}}dx+\left(B-\frac{A\beta}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}}=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+\beta x+\gamma)}{\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}}+\left(B-\frac{A\beta}{2a}\right)J_3\Rightarrow$$

$$J_4=\frac{A}{2a}\cdot 2\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}+\left(B-\frac{A\beta}{2a}\right)J_3$$

<u>Παρατήρηση</u>: Δεν είναι απαραίτητη η απομνημόνευση των τελικών τύπων των ολοκληρωμάτων J_1, J_2, J_3, J_4, αρκεί η γνώση της μεθόδου.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

431. $I=\displaystyle\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}$

Λύση

Έχουμε $2x^2+8x+20=2(x^2+4x+10)=2\left((x+2)^2+(10-4)\right)=2\left((x+2)^2+6\right)$

Τότε $\quad I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{dx}{(x+2)^2+6}$

Κάνουμε την αντικατάσταση: $x+2=t \Rightarrow dx=dt$

$$\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt6}\,\text{τοξεφ}\,\frac{t}{\sqrt6}+C=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt6}\,\text{τοξεφ}\,\frac{x+2}{\sqrt6}+C.$$

432. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-x^2}}$

Έχουμε $2+3x-x^2=-(x^2-3x-2)=-\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-2\right]=$

$=-\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}\right]=\frac{17}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$ οπότε

$I=\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{17}{4}\right)-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}$. Κάνουμε την αντικατάσταση $x-\frac{3}{2}=t \Rightarrow dx=dt$

$I=\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{17}{4}-t^2}}=(\text{τύπος } 13')=\text{τοξημ}\frac{t}{\sqrt{\frac{17}{4}}}+C \Longrightarrow$

$I=\text{τοξημ}\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{17}}+C=\text{τοξημ}\frac{2x-3}{\sqrt{17}}+C.$

433. $I=\int \frac{x\,dx}{x^4-4x^2+3}$

Λύση

Κάνουμε την αντικατάσταση $x^2=t \Rightarrow 2x\,dx=dt$ οπότε

$I=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-4t+3}$

Τώρα $t^2-4t+3=(t-2)^2-4+3=(t-2)^2-1$ και

$I=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t-2)^2-1}=\frac{1}{2}\int \frac{d(t-2)}{(t-2)^2-1}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2-1}{t-2+1}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-3}{t-1}\right|+C$

$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2-1}\right|+C.$

434. $I=\int \frac{\text{συν}x}{\text{ημ}^2x-6\text{ημ}x+12}dx$

Λύση

Κατ' αρχήν κάνουμε την αντικατάσταση: $\text{ημ}x=t \Rightarrow dt=\text{συν}x\,dx$

οπότε $I=\int \frac{dt}{t^2-6t+12}$

Γράφουμε $t^2-6t+12=(t-3)^2-9+12=(t-3)^2+3$ συνεπώς

$I=\int \frac{dt}{(t-3)^2+3}=\int \frac{d(t-3)}{(t-3)^2+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\text{τοξεφ}\frac{t-3}{\sqrt{3}}+C \Longrightarrow$

$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\text{τοξεφ}\left(\frac{\text{ημ}x-3}{\sqrt{3}}\right)+C.$

4.3.3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΜΕΡΗ

Ας εξετάσουμε δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f(x)$ και $\varphi(x)$. Γνωρίζουμε ότι το διαφορικό του γινομένου $f(x)\cdot\varphi(x)$ βρίσκεται από τον τύπο:

$$d\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)=d f(x)\cdot\varphi(x)+d\varphi(x)\cdot f(x) \qquad (1)$$

Ολοκληρώνοντας την (1) παίρνουμε:

$$\int d\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)=f(x)\cdot\varphi(x)=\int\varphi(x)df(x)+\int f(x)d\varphi(x)\Rightarrow$$

$$\int f(x)d\varphi(x)=f(x)\varphi(x)-\int\varphi(x)df(x). \qquad (2)$$

Ο τύπος (2) ονομάζεται <u>τύπος ολοκληρώσεως κατά μέρη</u>. Ο (2) γράφεται επίσης και στην μορφή:

$$\int f(x)\varphi'(x)dx=f(x)\varphi(x)-\int\varphi(x)f'(x)dx \qquad (2')$$

Ο τύπος ολοκληρώσεως κατά μέρη εφαρμόζεται σε παραστάσεις που μπορούν να εμφανισθούν υπό μορφήν γινομένου δύο παραγόντων $f(x)$ και $d\varphi(x)$ έτσι ώστε η αναζήτηση της συναρτήσεως $\varphi(x)$ με βάση το διαφορικό της και ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int\varphi(x)df(x)$ να αποτελούν πρόβλημα ευκολώτερο από την ολοκλήρωση του αρχικού ολοκληρώματος $\int f(x)d\varphi(x)$. Στις παρακάτω λυμένες ασκήσεις θα δείξουμε πώς παρουσιάζεται κάθε φορά η παράσταση του ολοκληρώματος στην μορφή του γινομένου των $f(x)$ και $d\varphi(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

435. $I=\int x2^{-x}dx$

Λύση

Θέτουμε $x=f(x)\Rightarrow df(x)=dx$

και $2^{-x}dx=d\varphi(x)\Rightarrow\quad\varphi(x)=-\frac{2^{-x}}{\ln 2}$ Άρα

$$I=\int x2^{-x}dx=-\frac{2^{-x}}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 2}\int 2^{-x}dx=-\frac{2^{-x}\cdot x}{\ln 2}-\frac{2^{-x}}{\ln^2 2}+C\Rightarrow$$

$$I=-\frac{1}{\ln^2 2\cdot 2^x}(x\ln 2+1)+C$$

436. $I=\int e^x \sigma\upsilon\nu x\,dx$

Λύση

Θέτουμε $f(x)=e^x \Rightarrow df(x)=e^x dx$

και $d\varphi(x)=\sigma\upsilon\nu x\,dx \Rightarrow \varphi(x)=\eta\mu x$. Τότε

$$I=\int e^x\sigma\upsilon\nu x\,dx = e^x\eta\mu x-\int e^x\eta\mu x\,dx$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος του β΄ μέλους, χρησιμοποιούμε τον ίδιο τρόπο, δηλαδή θέτουμε:

$$f(x)=e^x \Rightarrow df(x)=e^x dx$$

και $d\varphi(x)=\eta\mu x\,dx \Rightarrow \varphi(x)=-\sigma\upsilon\nu x$. Τότε

$$I=e^x\eta\mu x-\left(-e^x\sigma\upsilon\nu x+\int e^x\sigma\upsilon\nu x\,dx\right) \Rightarrow$$

$$I=e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x-\int e^x\sigma\upsilon\nu x\,dx$$. Η εξίσωση όμως αυτή είναι μία εξίσωση με άγνωστο το ολοκλήρωμα $\int e^x\sigma\upsilon\nu x\,dx$.

Χωρίζουμε λοιπόν γνωστούς από αγνώστους:

$$2\int e^x\sigma\upsilon\nu x\,dx = e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x) \Rightarrow$$

$$I=\frac{e^x}{2}(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)+C$$

437. $I=\int \ln x\,dx$

Λύση

Θέτουμε $f(x)=\ln x \Rightarrow df(x)=\frac{dx}{x}$

$d\varphi(x)=dx \Rightarrow \varphi(x)=x$. Τότε

$$I=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-\int dx = x\ln x - x + C.$$

438. $I=\int x\,\sigma\upsilon\nu 3x\,dx$

Λύση

Θέτουμε $f(x)=x \Rightarrow df(x)=x$

και $d\varphi(x)=\sigma\upsilon\nu 3x\,dx \Rightarrow \varphi(x)=\frac{1}{3}\eta\mu 3x$. Τότε

$$I=\frac{1}{3}x\,\eta\mu 3x-\frac{1}{3.3}\int \eta\mu 3x\,d(3x)=\frac{1}{3}x\,\eta\mu 3x-\frac{1}{9}\sigma\upsilon\nu 3x+C.$$

439. $I=\int x\,\text{ημ}x\,\text{συν}x\,dx$

Λύση

Κάνουμε τον μετασχηματισμό $\text{ημ}x\,\text{συν}x=\frac{1}{2}\text{ημ}2x$, οπότε

$$I=\frac{1}{2}\int x\,\text{ημ}2x\,dx$$

Θέτουμε: $\text{ημ}2x\,dx=d\varphi(x)\Rightarrow\varphi(x)=-\frac{1}{2}\text{συν}2x$

$x=f(x)\Rightarrow dx=df(x)$ τότε

$$I=\frac{1}{2}\int x\,\text{ημ}2x\,dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x\,\text{συν}2x+\frac{1}{2}\int\text{συν}2x\,dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}x\,\text{συν}2x+\frac{1}{8}\text{ημ}2x+C$$

440. $I=\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$

Λύση

Έχουμε $I=\int\frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}+\int\frac{x\cdot x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=$

$$=a^2\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+\int x\,d\left(\sqrt{a^2+x^2}\right).$$

Εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$I=a^2\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}+x\sqrt{a^2+x^2}-\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx\Rightarrow$$

$$I=\frac{1}{2}\left(a^2\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}+x\sqrt{a^2+x^2}\right)+C.$$

441. $I=\int\frac{x^2dx}{(x+1)^2}$

Λύση

$$I=\int\frac{x\cdot x\,dx}{(x+1)^2}=(\text{εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά μέρη})=$$

$$=\int x\,d\left(-\frac{1}{2(x^2+1)}\right)=-\frac{1}{2(x^2+1)}x+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}\Rightarrow$$

$$\int\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\,\text{τοξεφ}x+C$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

442. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$

443. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x-1}}$

444. $\displaystyle\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}\,dx$

445. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

446. $\displaystyle\int x\,\ell n x\,dx$

447. $\displaystyle\int x\,\eta\mu x\,dx$

448. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{e^x}$

449. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\eta\mu^2 x}$

450. $\displaystyle\int 3^x \sigma\upsilon\nu x\,dx$

451. $\displaystyle\int \frac{\ell n x}{\sqrt{x}}\,dx$

452. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$

453. $\displaystyle\int x^2 e^x \eta\mu x\,dx$

4.4. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Είναι γνωστό ότι κάθε ρητή συνάρτηση είναι δυνατό να παρουσιασθεί υπό μορφή κλάσματος:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A_0x^m+A_1x^{m-1}+\dots+A_m}{B_0x^n+B_1x^{n-1}+\dots+B_n} \qquad (1)$$

Χωρίς να περιορίζεται η γενικότητα των παρακάτω συλλογισμών, υποθέτουμε ότι τα πολυώνυμα $F(x)$ και $f(x)$ δεν έχουν κοινές ρίζες.

Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή $(m<n)$, τότε το κλάσμα θα λέγεται **κανονικό**. Στην αντίθετη περίπτωση $(m\geqslant n)$ θα το λέμε **μη κανονικό**.

Αν το κλάσμα είναι μη κανονικό, τότε διαιρώντας αριθμητή διά του παρονομαστή έχουμε:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=M(x)+\frac{P(x)}{f(x)} \qquad (2)$$

όπου $M(x)$ είναι ακέραια συνάρτηση (πολυώνυμο) και $\frac{P(x)}{f(x)}$ είναι κανονικό κλάσμα.

Έστω ότι δίνεται για ολοκλήρωση η ρητή συνάρτηση $\frac{F(x)}{f(x)}$, δηλαδή έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int\frac{F(x)}{f(x)}dx \qquad (3)$$

Τότε από την (2) παίρνουμε

$$\int\frac{F(x)}{f(x)}dx=\int M(x)\,dx+\int\frac{P(x)}{f(x)}dx \qquad (4)$$

Η ολοκλήρωση του πολυωνύμου είναι γνωστή, επομένως πρέπει να εξετάσουμε την ολοκλήρωση του κανονικού κλάσματος $\frac{P(x)}{f(x)}$.

Αν ο παρονομαστής $f(x)$ μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο ως εξής:

$$f(x)=(x-a)^k(x-\beta)^\ell\dots(x^2+Ax+B)^\mu(x^2+\gamma x+\delta)^s \qquad (5)$$

όπου τα διώνυμα εδώ και τα τριώνυμα είναι διακεκριμένα και τα τριώνυμα δεν έχουν πραγματικές ρίζες, τότε:

$$\frac{P(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} +$$

$$+ \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \cdots + \frac{B_l}{(x-\beta)^l} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+Ax+B} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+Ax+B)^2} + \cdots + \frac{M_rx+N_r}{(x^2+Ax+B)^r} + \cdots +$$

$$\cdots + \frac{R_1x+L_1}{x^2+\gamma x+\delta} + \frac{R_2x+L_2}{(x^2+\gamma x+\delta)^2} + \cdots + \frac{R_\sigma x+L_\sigma}{(x^2+\gamma x+\delta)^\sigma} + \cdots, \qquad (6)$$

όπου $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, R_1, L_1, R_2, L_2, \ldots$ είναι πραγματικοί αριθμοί που ονομάζονται προσδιοριστέοι συντελεστές και απαιτείται ο προσδιορισμός τους.

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών αυτών, τα δύο μέλη της ταυτότητας (6) τα φέρουμε σε κοινό παρονομαστή και μετά εξισώνουμε τους συντελεστές των ισοβάθμιων όρων της μεταβλητής x.

Έτσι παίρνουμε σύστημα γραμμικό ως προς τους προσδιοριστέους συντελεστές. Μπορούμε επίσης να πάρουμε σύστημα εξισώσεων των συντελεστών, αν και στα δύο μέλη της ταυτότητας (6) θέσουμε κατάλληλες τιμές της μεταβλητής x. Μπορεί να γίνει και συνδυασμός των δύο τούτων τρόπων.

Έτσι καταλήγουμε στα εξής:

Αν έχουμε να ολοκληρώσουμε ρητό κλάσμα μη κανονικό τότε με την διαίρεση αριθμητή δια παρονομαστή, ξεχωρίζουμε ένα ακέραιο πολυώνυμο, που η ολοκλήρωσή του είναι γνωστή και ένα κανονικό κλάσμα που το εμφανίζουμε με την μορφή (6) και κατόπιν το ολοκληρώνουμε.

Από τον τύπο (6) συνάγεται ότι η ολοκλήρωση του ρητού κλάσματος ανάγεται στην ολοκλήρωση των παρακάτω παραστάσεων που θα τις ονομάζουμε απλούστατα κλάσματα:

I $\quad \dfrac{A}{x-a}$

II $\quad \dfrac{A}{(x-a)^k} \qquad (k \in Z \text{ και } k \geq 2)$

III $\quad \dfrac{Ax+B}{ax^2+px+q}$ $\left(\dfrac{p^2}{4}-q<0\right.$, δηλ. ο παρονομαστής έχει ρίζες μιγαδικές)

IV $\quad \dfrac{Ax+B}{(ax^2+px+q)^k}$ $\left((k\in\mathbb{Z}\wedge k\geq 2\right)$, οι ρίζες του παρονομαστή μιγαδικές)

Είναι γνωστό δε ότι:

I $\quad \displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a|+C.$

II $\quad \displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) + A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C =$

$$= \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C$$

III $\quad \displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\,\text{τοξεφ}\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

454. $I=\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2}$

Λύση

Το κλάσμα $\dfrac{x}{(x-1)(x+1)^2}$ είναι κανονικό γι' αυτό σύμφωνα με τον τύπο (6)

έχουμε: $\dfrac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{\Gamma}{(x+1)^2} \Leftrightarrow$

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+\Gamma(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$x = A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+\Gamma(x-1)$$

Προσδιορισμός συντελεστών:

Η τελευταία ισότητα γράφεται:

$$x = (A+B)x^2+(2A+\Gamma)x+(A-B-\Gamma) \Leftrightarrow$$

$$0\cdot x^2+x\cdot 1+0 = (A+B)x^2+(2A+\Gamma)x+(A-B-\Gamma)$$

Η ισότητα αυτή ισχύει αν: $\begin{aligned} A+B&=0\\ 2A+\Gamma&=1\\ A-B-\Gamma&=0\end{aligned}$

Λύνοντας το σύστημα αυτό παίρνουμε: $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, $\Gamma=\frac{1}{2}$

Συνεπώς: $$I=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2} \Longrightarrow$$

$$I=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+1)}+C \Longrightarrow$$

$$\int\frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2\,(x+1)}+C$$

455. $I=\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-2x^2+x}$

Λύση

Αναλύουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο παραγόντων:

$$x^3-2x^2+x=x\,(x^2-2x+1)=x\,(x-1)^2.$$

Τότε έχουμε: $$\frac{1}{x^3-2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{\Gamma}{(x-1)^2} \Longleftrightarrow$$

$$1=A\,(x-1)^2+B\,(x-1)\,x+\Gamma x$$

Επειδή εδώ οι ρίζες του πολυωνύμου x^3-2x^2+x είναι 1 και C,

θέτουμε $x=0$ οπότε $A=1$, θέτουμε $x=0$ οπότε $1=\Gamma\cdot 1 \Longrightarrow \Gamma=1$

Μπορούμε τώρα να θέσουμε π.χ. $x=2$ οπότε

$1=A+2B+2\Gamma \Longrightarrow 2B=1-A-2\Gamma=1-1\cdot 2=-2 \Longrightarrow B=-1$. Άρα

$$I=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}=$$

$$=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C=\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{1}{x-1}+C.$$

456. $I=\displaystyle\int\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$

Λύση

Το κλάσμα $\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}$ είναι μη κανονικό, γι' αυτό εκτελούμε την διαίρεση $(x^2-5x+9):(x^2-5x+6)$ από την οποία έχουμε:

$$(x^2-5x+9)=(x^2-5x+6)\cdot 1+3$$

ή $$\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}=1+\frac{3}{x^2-5x+6}$$

Συνεπώς: $$I=\int dx+3\int\frac{dx}{x^2-5x+6}=x+3\int\frac{dx}{(x-2)(x-3)}$$

Έχουμε τώρα:

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \Leftrightarrow 1 = A(x-3) + B(x-2)$$

Θέτοντας $x=3$ παίρνουμε $1 = B(3-2) \Rightarrow B = 1$

Θέτοντας $x=2$, παίρνουμε $1 = A(2-3) \Rightarrow A = -1$. Άρα

$$I = x + 3\left(-\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3}\right) = x + 3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C.$$

457. $I = \int \frac{x^2+2}{x^4+4}\,dx$

Λύση

Επειδή $x^4+4 = (x^2+2)^2 - 4x^2 = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$, έχουμε

$$\frac{x^2+2}{x^4+4} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+2} + \frac{\Gamma x + \Delta}{x^2+2x+2}$$

(Τα τριώνυμα x^2-2x+2 και x^2+2x+2 έχουν μιγαδικές ρίζες διότι $\Delta = 4-8 < 0$)

$$\Leftrightarrow x^2+2 = (Ax+B)(x^2+2x+2) + (\Gamma x+\Delta)(x^2-2x+2)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ισοβάθμιων x, έχουμε:

$$\left.\begin{array}{ll} x^3: & 0 = A + \Gamma \\ x^2: & 1 = B + 2A - 2\Gamma + \Delta \\ x: & 0 = 2B + 2A + 2\Gamma - 2\Delta \\ x^0: & 2 = 2B + 2\Delta \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 0, \quad \Gamma = 0 \\ B = \frac{1}{2}, \quad \Delta = \frac{1}{2} \end{array}$$

οπότε έχουμε:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-2x+2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2+2}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2}\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\left[\text{τοξεφ}(x+1) + \text{τοξεφ}(x-1)\right] + C.$$

458. Ποιά συνθήκη πρέπει να εκπληρώνει το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x^3(x-1)^2}\,dx$ για να είναι ρητή συνάρτηση;

Λύση

Έχουμε: $\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{\Gamma}{x^3} + \frac{\Delta}{x-1} + \frac{E}{(x-1)^2}$

συνεπώς:

$$I = A\int\frac{dx}{x} + B\int\frac{dx}{x^2} + \Gamma\int\frac{dx}{x^3} + \Delta\int\frac{dx}{x-1} + E\int\frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= A\ln|x| - \frac{B}{x} - \frac{\Gamma}{2x^2} + \Delta\ln|x-1| - \frac{E}{x-1} + C.$$

Για να είναι το ολοκλήρωμα ρητή συνάρτηση πρέπει οι συντελεστές A και Δ να είναι ίσοι με μηδέν δηλαδή $A=0$ και $\Delta=0$.

Τότε $\alpha x^2+\beta x+\gamma = \Gamma(x-1)^2 + B(x-1)^2x + Ex^3 \Leftrightarrow$

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma = \Gamma(x^2-2x+1) + B(x^3-2x^2+x) + Ex^3$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ισοβάθμιων x, έχουμε:

x^3 : $\quad 0 = B+E$

x^2 : $\quad \alpha = \Gamma - 2B$

x : $\quad \beta = -2\Gamma + B$

x^0 : $\quad \gamma = \Gamma$

Απαλοίφοντας από το σύστημα αυτό τους συντελεστές Γ, B, E βρίσκουμε την συνθήκη: $\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

459. $\displaystyle\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$

460. $\displaystyle\int\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}\,dx$

461. $\displaystyle\int\frac{x^4}{x^4-1}\,dx$

462. $\displaystyle\int\frac{x^5+1}{x^4-8x+16}\,dx$

463. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^3-1}$

464. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$

465. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$

466. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^8-1}$

467. $\displaystyle\int\frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx$

468. $\displaystyle\int\frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,dx$

4.5. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕΡΙΚΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η ολοκλήρωση μιάς άρρητης συνάρτησης δεν είναι πάντα δυνατή. Θα εξετάσουμε μερικές αρρητες συναρτήσεις που η ολοκλήρωσή τους με την βοήθεια καταλλήλων αντικαταστάσεων, ανάγεται στην ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων:

I. $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx$, όπου R μία ρητή συνάρτηση των μεταβλητών της. Εστω k ο κοινός παρονομαστής των κλασμάτων $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$ Τότε η αντικατάσταση

$$x = t^k \Rightarrow dx = k t^{k-1} dt$$

μεταβάλλει το δεδομένο ολοκλήρωμα, σε ολοκλήρωμα με ρητή συνάρτηση ως πρός την μεταβλητή t.

Τα ολοκληρώματα με γενικώτερη μορφή:

$$\int R\left(x, (ax+\beta)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+\beta)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx \quad \text{ή}$$

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right]dx$$

με τις αντίστοιχες αντικαταστάσεις:

$$ax+\beta = t^k \quad \text{ή} \quad \frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta} = t^k$$ επίσης μεταβάλλονται σε ολοκληρώματα με ρητές συναρτήσεις.

II. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}\right)dx$

Το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται με την βοήθεια τριών αντικαταστάσεων του Euler:

1. $\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma} = t \pm x\sqrt{a}$, αν $a>0$
2. $\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma} = tx \pm \sqrt{\gamma}$, αν $\gamma>0$
3. $\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma} = (x-\rho_1)t$, αν $ax^2+\beta x+\gamma = a(x-\rho_1)(x-\rho_2)$, όπου ρ_1 μία πραγματική ρίζα.

III $\displaystyle\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}}dx$, όπου $P_m(x)$ πολυώνυμο m βαθμού

Το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}} = P_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma} + k\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}} \quad (1)$$

όπου $P_{m-1}(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $m-1$ με προσδιοριστέους συντελεστές και k επίσης προσδιοριστέος συντελεστής.

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών αυτών παραγωγίζουμε την ισότητα (1) και την πολλαπλασιάζουμε με την ρίζα $\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}$. Ύστερα από αυτό εξισώνουμε τους συντελεστές των ισοβάθμων όρων του x.

IV. $\displaystyle\int x^m(a+\beta x^n)^p dx$, όπου m, n, p ρητοί αριθμοί.

Το ολοκλήρωμα αυτό ανάγεται σε ολοκλήρωμα με ρητή συνάρτηση στις παρακάτω τρείς περιπτώσεις:

1) Όταν p είναι ακέραιος θετικός αριθμός, τότε η ανάλυση με τον τύπο του Νεύτονα κάνει δυνατή την ολοκλήρωση. Αν $p<0$ τότε θέτουμε $x=t^k$, όπου k είναι κοινός παρονομαστής των κλασμάτων m και n.

2) Όταν $\frac{m+1}{n}$ είναι ακέραιος αριθμός, τότε κάνουμε την αντικατάσταση $a+\beta x^n=t^\mu$ όπου μ παρονομαστής του κλάσματος p.

3) Όταν $\frac{m+1}{n}+p$ είναι ακέραιος, τότε θέτουμε $a+\beta x^n= = t^\mu x^n$, όπου μ είναι παρονομαστής του κλάσματος p.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

469. $I=\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$

Λύση

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι του τύπου I γι'αυτό κάνουμε την αντικατάσταση:

$$3x+1=t^3 \Longrightarrow x=\frac{t^3-1}{3} \Rightarrow dx=\frac{3t^2}{3}dt=t^2dt$$

Οπότε έχουμε:

$$I=\int\frac{\frac{t^3-1}{3}+1}{t}t^2dt=\frac{1}{3}\int t\left(t^3+2\right)dt=\frac{1}{3}\int\left(t^4-2t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{t^5}{5}+t^2\right)=\frac{1}{15}t^2\left(t^3+5\right)+C=\frac{1}{15}\sqrt[3]{(3x+1)^2}\left[(3x+1)+5\right]\Leftrightarrow$$

$$I=\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}=\frac{1}{5}(x+2)\sqrt[3]{(3x+1)^2}+C$$

47ι. $I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+2x+2}}$

Λύση

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι του τύπου II. Έχουμε $\alpha=1>0$ και γι αυτό κάνουμε την αντικατάσταση: $\sqrt{x^2+2x+2}=t-x \Leftrightarrow$

$$x^2+2x+2=t^2-2tx+x^2 \Leftrightarrow 2x+2tx=t^2-2 \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{t^2-2}{2(1+t)} \Leftrightarrow dx=\frac{2t(1+t)-(t^2-2)}{2(1+t)^2}dt=\frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}dt$$

Επίσης $1+\sqrt{x^2+2x+2}=1+t-x=1+t-\frac{t^2-2}{2(1+t)}=\frac{t^2+4t+4}{2(1+t)}$

Οπότε παίρνουμε:

$$I=\int\frac{\frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}dt}{\frac{t^2+4t+4}{2(1+t)^2}}=\int\frac{t^2+2t+2}{(1+t)(t+2)^2}dt$$

Το κλάσμα τώρα αναλύεται ως εξής:

$$\frac{t^2+2t+2}{(1+t)(t+2)^2}=\frac{A}{1+t}+\frac{B}{t+2}+\frac{\Gamma}{(t+2)^2} \Leftrightarrow$$

$$t^2+2t+2=A(t+2)^2+B(1+t)(t+2)+\Gamma(1+t)$$

Θέτοντας διαδοχικά $t=-1$, $t=-2$, $t=0$ παίρνουμε $A=1, B=0, \Gamma=-2$

Άρα:

$$I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{dt}{1+t}-2\int\frac{dt}{(t+2)^2}=\ln|1+t|+2\frac{1}{t+2}+C \Leftrightarrow$$

$$I=\ln\left|x+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+\frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}}+C.$$

471. $I=\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

Λύση

Έχουμε $I=\int \frac{x^4a^2-x^6}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι του τύπου III, όπου

$$x^4a^2-x^6=P_6(x),\ P_5(x)=Ax^5+Bx^4+\Gamma x^3+\Delta x^2+Ex+F$$

Τότε έχουμε:

$$\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx=(Ax^5+Bx^4+\Gamma x^3+\Delta x^2+Ex+F)\sqrt{a^2-x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Παραγωγίζοντας την ισότητα αυτή παίρνουμε:

$$\frac{x^4a^2-x^6}{\sqrt{a^2x^2}}=(5Ax^4+4Bx^3+3\Gamma x^2+2\Delta x+E)\sqrt{a^2-x^2}-$$

$$-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}(Ax^5+Bx^4+\Gamma x^3+\Delta x^2+Ex+F)+\frac{\lambda}{\sqrt{a^2-x^2}}\Leftrightarrow$$

$$x^4a^2-x^6=(a-x^2)(5Ax^4+4Bx^3+3\Gamma x^2+2\Delta x+E)-x(Ax^5+Bx^4+\Gamma x^3+\Delta x^2+Ex+F)+\lambda$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ισοβάθμιων όρων του x, έχουμε:

x^6: $-1=-6A$ $\qquad$ x^2: $0=3a^2\Gamma-2E$

x^5: $0=-5B$ $\qquad$ x: $0=2\Delta a^2-F$

x^4: $a^2=5a^2A-4\Gamma$ $\qquad$ x^0: $0=Ea^2+\lambda$

x^3: $0=4Ba^2-3\Delta$

Από το σύστημα αυτό βρίσκουμε:

$$A=\frac{1}{6},\ B=0,\ \Gamma=-\frac{a^2}{24},\ \Delta=0,\ E=-\frac{a^4}{16},\ F=0,\ \lambda=\frac{a^6}{16}$$

Συνεπώς

$$\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left(\frac{x^5}{6}-\frac{a^2x^3}{24}-\frac{a^4x}{16}\right)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^6}{16}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=\left(\frac{x^5}{6}-\frac{a^2x^3}{24}-\frac{a^4x}{16}\right)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^6}{16}\text{τοξημ}\frac{x}{a}+C.$$

472. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$

Λύση

Γράφουμε $I=\int x^{-1}(1+x^3)^{-\frac{1}{2}}dx$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι του τύπου IV, όπου $m=-1$, $n=3$, $p=-\frac{1}{2}$

Το p είναι κλάσμα, συνεπώς ελέγχουμε τον αριθμό $\frac{m+1}{n}=\frac{-1+1}{3}=0$

άρα είναι ακέραιος και στην περίπτωση αυτή, κάνουμε την αντικατάσταση:

$$1+x^3=t^2 \Leftrightarrow x=(t^2-1)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$$

$$dx=\frac{1}{3}(t^2-1)^{-\frac{2}{3}}2t\,dt \qquad \text{οπότε:}$$

$$I=\int x^{-1}(1+x^3)^{-\frac{1}{2}}dx=\int (t^2-1)^{-\frac{1}{3}}(t^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{3}(t^2-1)^{-\frac{2}{3}}2t\,dt=$$

$$=\frac{2}{3}\int (t^2-1)^{-1}dt=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{2}{3\cdot 2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{\sqrt{1+x^3}+1}\right|+C.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

473. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$

474. $I=\int\frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

475. $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

476. $I=\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$

477. $I=\int\frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$

478. $I=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}+1}$

479. Ποιά συνθήκη πρέπει να εκπληρώνει το ολοκλήρωμα $I=$ $=\int\frac{\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}\,dx$ ώστε να αποτελεί αλγεβρική συνάρτηση;

4.6. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων με την βοήθεια αντικαταστάσεων ανάγεται συνήθως στην ολοκλήρωση ρητών ή αρρήτων συναρτήσεων. Γι' αυτό τις ταξινομούμε κατά τύπους (κλάσεις).

I. Εστω το ολοκλήρωμα της μορφής :

$$\int R(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)dx$$

Η αντικατάσταση $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}=t$ $(-\pi<x<\pi)$ μετατρέπει πάντα το ολοκλήρωμα αυτό σε ολοκλήρωμα ρητής συναρτήσεως. Πράγματι

$$\eta\mu x=\frac{2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}{\eta\mu^2\frac{x}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}=\frac{2\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\sigma\upsilon\nu x=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}-\eta\mu^2\frac{x}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}+\eta\mu^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Ακόμη από την $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}=t \Rightarrow \frac{x}{2}=\tau o\xi\varepsilon\varphi\, t \Rightarrow$

$x=2\tau o\xi\varepsilon\varphi\, t \Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int R(\eta\mu x,\sigma\upsilon\nu x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

Επειδή όμως με την αντικατάσταση αυτή καταλήγουμε συχνά σε δύσκολες ρητές συναρτήσεις, γι' αυτό προτείνονται και άλλες αντικαταστάσεις.

I_1. Αν το ολοκλήρωμα έχει την μορφή $\int R(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x dx$, τότε κάνουμε την αντικατάσταση :

$$\eta\mu x=t \rightarrow \sigma\upsilon\nu x dx=dt \quad \text{και}$$

$$\int R(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x dx=\int R(t)\,dt$$

I_2. Αν το ολοκλήρωμα έχει την μορφή $\int R(\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x dx$, τότε κάνουμε την αντικατάσταση :

$$\sigma\upsilon\nu x=t \Rightarrow -\eta\mu x dx=dt \quad \text{και}$$

$$\int R(\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x dx=-\int R(t)dt$$

I_3. Αν η συνάρτηση του ολοκληρώματος εξαρτάται μόνο από την εφx (ή σφx), τότε η αντικατάσταση εφx = t (ή σφx = t) $\Rightarrow$

$$x = \text{τοξεφ}\, t \ (\text{ή } x = \text{τοξσφ}\, t) \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2} \ \left(\text{ή } -\frac{dt}{1+t^2}\right)$$

μετατρέπει το ολοκλήρωμα αυτό σε ολοκλήρωμα ρητής συναρτήσεως:

$$\int R(\varepsilon\varphi x)\,dx = \int R(t)\frac{dt^2}{1+t^2} \ \left(\text{ή } \int R(\sigma\varphi x)\,dx = -\int R(t)\frac{dt}{1+t^2}\right)$$

I_4. Αν η συνάρτηση $R(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)$ περιέχει ημx και συνx με άρτιους εκθέτες, δηλαδή $R(-\eta\mu x, -\sigma\upsilon\nu x) = R(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)$, τότε εφαρμόζεται η αντικατάσταση: εφx = t οπότε:

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\eta\mu^2 x = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \text{και}$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

II. Εξετάζουμε τώρα το ολοκλήρωμα της μορφής:

$$\int \eta\mu^m x\, \sigma\upsilon\nu^n x\, dx \ , \ \text{όπου } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

II_1. m, n είναι τέτοιοι αριθμοί ώστε τουλάχιστον ο ένας απ' αυτούς να είναι περιττός: Έστω $n = 2p+1$, τότε

$$\int \eta\mu^m x\, \sigma\upsilon\nu^{2p+1} x\, dx = \int \eta\mu^m x\, \sigma\upsilon\nu^{2p} x\, \sigma\upsilon\nu x\, dx = \int \eta\mu^m x\,(1-\eta\mu^2 x)^p\, d(\eta\mu x)$$

κάνουμε την αντικατάσταση: $\eta\mu x = t \Rightarrow d(\eta\mu x) = dt$

$$\int \eta\mu^m x\,(1-\eta\mu^2 x)^p\, d(\eta\mu x) = \int t^m (1-t^2)^p\, dt$$

II_2 m, n είναι μη αρνητικοί και άρτιοι αριθμοί:

Θέτουμε $m = 2p$, $n = 2q$ και επειδή

$$\eta\mu^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x \ , \ \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x, \ \text{έχουμε}$$

$$\int \eta\mu^m x\, \sigma\upsilon\nu^n x\, dx = \int \eta\mu^{2p} x\, \sigma\upsilon\nu^{2q} x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x\right)^p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x\right)^q dx$$

Εκτελώντας κατόπιν τις πράξεις θα πάρουμε ολοκληρώματα γνωστών τύπων.

III. Θα εξετάσουμε τέλος τα ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int συν kx\, συν nx\, dx, \quad \int ημ kx\, συν nx\, dx, \quad \int ημ kx\, ημ nx\, dx$$

Τα ολοκληρώματα αυτά υπολογίζονται με την βοήθεια των γνωστών τύπων:

$$συν kx\, συν nx = \frac{1}{2}\left[συν(k+n)x + συν(k-n)x\right] \qquad (k \neq n)$$

$$ημ kx\, συν nx = \frac{1}{2}\left[ημ(k+n)x + ημ(k-n)x\right] \qquad (k \neq n)$$

$$ημ kx\, ημ nx = \frac{1}{2}\left[-συν(k+n)x + συν(k-n)x\right] \qquad (k \neq n)$$

π.χ. $\int συν kx\, συν nx\, dx = \frac{1}{2}\int\left[συν(k+n)x + συν(k-n)x\right]dx =$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{συν(k+n)x\, d(k+n)x}{k+n} + \frac{1}{k-n}\int συν(k-n)x\, d(k-n)x\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int συν kx\, συν nx\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k+n}ημ(k+n)x + \frac{1}{k-n}ημ(k-n)\right] + C.$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

480. $I = \int \frac{dx}{2ημx - συνx}$

Λύση

Το ολοκλήρωμα είναι του τύπου I και γι' αυτό εφαρμόζουμε την αντικατάσταση: $εφ\frac{x}{2} = z \Rightarrow x = 2τοξεφz \Rightarrow dx = \frac{2dz}{1+z^2}$

Επίσης $ημx = \frac{2z}{1+z^2}$, $συνx = \frac{1-z^2}{1+z^2}$

Τότε έχουμε: $$I = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{4z}{1+z^2} - \frac{1-z^2}{1+z^2}} = 2\int \frac{dz}{4z-1+z^2} = 2\int \frac{dz}{(z+2)^2-5} =$$

$$= 2\int \frac{d(z+2)}{(z+2)^2-5} = 2\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{z+2-\sqrt{5}}{z+2+\sqrt{5}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2-\sqrt{5}+εφ\frac{x}{2}}{2+\sqrt{5}+εφ\frac{x}{2}}\right| + C.$$

481. $I=\int \frac{\eta\mu x}{(1-\sigma\upsilon\nu x)^2}dx$

Λύση

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι του τύπου II_2 διότι

$$\eta\mu dx = -d(\sigma\upsilon\nu x)$$

συνεπώς θα κάνουμε την αντικατάσταση: $\sigma\upsilon\nu x = t \Leftrightarrow -\eta\mu x\, dx = dt$

Οπότε:

$$I=-\int\frac{dt}{(1-t)^2}=\int(1-t)^{-2}d(1-t)=\frac{(1-t)^{-1}}{-1}+C \Leftrightarrow$$

$$I=-\frac{1}{1-t}+C=-\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}+C$$

482. $I=\int \frac{1+\varepsilon\varphi x}{1-\varepsilon\varphi x}dx$

Λύση

Πρόκειται για ολοκλήρωμα του τύπου I_3 γι' αυτό κάνουμε την αντικατάσταση : $\varepsilon\varphi x = t \Leftrightarrow x = \tau o\xi\varepsilon\varphi t \Leftrightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2}$

Οπότε έχουμε:

$$I=\int\frac{1+t}{1-t}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{1+t}{(1-t)(1+t^2)}dt$$

Εργαζόμεθα κατόπιν όπως στα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων:

$$\frac{1+t}{(1-t)(1+t^2)}=\frac{A}{1-t}+\frac{Bt+\Gamma}{1+t^2} \Leftrightarrow$$

$$1+t = A(1+t^2)+(1-t)(Bt+\Gamma) \Leftrightarrow$$

$$1+t = t^2(A-B)+t(B-\Gamma)+A+\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} t^2:\ 0=A-B \\ t^1:\ 1=B-\Gamma \\ t^0:\ 1=A+\Gamma \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} A-B=0 \\ A+B=2 \end{array}\right\} \quad A=1,\ B=1,\ \Gamma=0$$

οπότε έχουμε:

$$I=\int\frac{dt}{1-t}+\int\frac{t\,dt}{1+t^2}=-\int\frac{d(1-t)}{1-t}+\frac{1}{2}\int\frac{d(1+t^2)}{1+t^2}=$$

$$=-\ln|1-t|+\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+C=\ln\frac{\sqrt{1+t^2}}{|1-t|}+C=\ln\frac{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 x}}{|1-\varepsilon\varphi x|}+C$$

ή $\quad I=-\ln|\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x|+C.$

483. $I=\int \frac{dx}{3\eta\mu^2 x+5\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Λύση

Πρόκειται για ολοκλήρωμα του τύπου I_4 διότι η συνάρτηση

$$R(-\eta\mu x,-\sigma\upsilon\nu x)=\frac{1}{3(-\eta\mu x)^2+5(-\sigma\upsilon\nu x)^2}=\frac{1}{3\eta\mu^2 x+5\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Κάνουμε την αντικατάσταση: $\varepsilon\varphi x=t \Leftrightarrow x=\tau o\xi\varepsilon\varphi t \Leftrightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2}$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}=\frac{1}{1+t^2}, \quad \eta\mu^2 x=\frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}=\frac{t^2}{1+t^2}, \text{ οπότε}$$

$$I=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{3t^2}{1+t^2}+\frac{5}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{3t^2+5}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}t)}{(\sqrt{3}t)^2+(\sqrt{5})^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{15}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,\varepsilon\varphi x\right)+C$$

484. $I=\int \eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu^2 x\,dx$

Λύση

Οι εκθέτες είναι άρτιοι (τύπος II_2), γι' αυτό έχουμε:

$$I=\int \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\cdot\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\,dx=\frac{1}{4}\int(1-\sigma\upsilon\nu^2 2x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int \eta\mu^2 2x\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{1-\sigma\upsilon\nu 4x}{2}\,dx=\frac{1}{8}\left[\int dx-\frac{1}{4}\int \sigma\upsilon\nu 4x\,d(4x)\right]\Leftrightarrow$$

$$I=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\eta\mu 4x+C.$$

485. $I=\int \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^6 x}\,dx$

Λύση

Οι εκθέτες είναι άρτιοι εκ των οποίων ο ένας αρνητικός (τύπος II_3), γι' αυτό κάνουμε την αντικατάσταση:

$$\varepsilon\varphi x=t \Leftrightarrow x=\tau o\xi\varepsilon\varphi t \Leftrightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

Έχουμε ακόμη

$$\sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}=\frac{1}{1+t^2}, \quad \eta\mu^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}\Leftrightarrow \eta\mu^6 x=\frac{t^6}{(1+t^2)^3}$$

οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I=\int\frac{\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^6}{(1+t^2)^3}}=\int\frac{(1+t^2)dt}{t^6}=\int\frac{dt}{t^6}+\int\frac{dt}{t^4}=$$

$$=-\frac{1}{5t^5}-\frac{1}{3t^3}+C=-\frac{1}{5\text{εφ}^5x}-\frac{1}{3\text{εφ}^3x}+C$$

486. $I=\int\frac{dx}{\text{συν}^4x}$

Λύση

Γράφουμε $\frac{1}{\text{συν}^4x}=\frac{1}{\text{συν}^2x}\cdot\frac{1}{\text{συν}^2x}=(1+\text{εφ}^2x)d(\text{εφ}x)$

και τότε το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I=\int(1+\text{εφ}^2x)d(\text{εφ}x)=\int d(\text{εφ}x)+\int\text{εφ}^2x\,d(\text{εφ}x)=$$

$$=\text{εφ}x+\frac{\text{εφ}^3x}{3}+C.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να βρεθούν τα ολοκληρώματα:

487 $I=\int\frac{dx}{5+4\text{συν}ax}$

488. $I=\int\frac{\text{συν}ax\,dx}{\sqrt{k^2+\text{ημ}^2ax}}$

489. $I=\int\frac{\text{εφ}x\,dx}{1-\text{σφ}^2x}$

490. $I=\int\text{ημ}^2x\,\text{συν}^3x\,dx$

491. $I=\int\text{ημ}3x\,\text{συν}5x\,dx$

492. $I=\int\text{συν}\frac{x}{2}\,\text{συν}\frac{x}{3}\,dx$

493. $I=\int\frac{dx}{\text{συν}^3x}$

5. ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

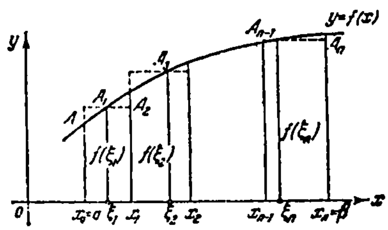
5.1. ΟΡΙΣΜΟΙ

Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $f(x)$ στο κλειστό διάστημα $[a,\beta]$.

Αν: α') χωρίσουμε το διάστημα $[a,\beta]$ με οποιοδήποτε τρόπο σε n τμήματα με τα σημεία $a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n=\beta$ $(x_0<x_1<x_2<\dots<x_n)$ και συμβολίσουμε με:

$$\Delta x_1 = x_1-x_0,\ \Delta x_2 = x_2-x_1,\ \dots,\ \Delta x_n = x_n-x_{n-1},$$

β') Εκλέξουμε σε κάθε τμήμα από ένα τυχαίο σημείο $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, δηλαδή $\xi_i \in \Delta x_i$ όπως δείχνει το σχήμα:



γ') Υπολογίσουμε τις τιμές της συναρτήσεως $f(x)$ στα επιλεγμένα σημεία και

δ') Σχηματίσουμε το άθροισμα:

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

τότε αυτό ονομάζεται **άθροισμα ολοκληρώσεως** (άθροισμα Riemmane) της συναρτήσεως $f(x)$.

Χωρίζοντας το διάστημα $[a,\beta]$ σε n τμήματα με διαφόρους τρόπους και εκλέγοντας σ' αυτά από ένα σημείο ξ_i επίσης σε διάφορες θέσεις, μπορούμε, για την δεδομένη συνάρτηση $f(x)$ και για το δεδομένο διάστημα $[a,\beta]$, να σχηματίσουμε απειροσύνολο διαφορετικών αθροισμάτων ολοκληρώσεως.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν για κάθε διαμέριση (χωρισμό) του διαστήματος $[a,\beta]$ τέτοια ώστε $\max \Delta x_i \to 0$ $(n \to \infty)$ και για κάθε επιλογή σημείων ξ_i από το διάστημα Δx_i το άθροισμα ολοκληρώσεως

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

τείνει σε ένα και το αυτό όριο σ, τότε το όριο αυτό ονομάζεται <u>ορισμένο ολοκλήρωμα</u> της συναρτήσεως $f(x)$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και συμβολίζεται $\int_\alpha^\beta f(x)dx$

Έτσι από τον ορισμό έχουμε:

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$$

Αν το όριο αυτό υπάρχει, τότε η συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Οι αριθμοί α και β ονομάζονται κάτω και άνω όρια ολοκληρώσεως. Το διάστημα $[\alpha,\beta]$ ονομάζεται **διάστημα ολοκληρώσεως** και το x ονομάζεται **μεταβλητή ολοκληρώσεως**.

Κάθε συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα αυτό.

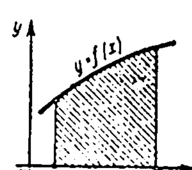
Η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος εξαρτάται από την μορφή της συναρτήσεως $f(x)$ και από τα όρια ολοκληρώσεως, γι'αυτό:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt = \dots = \int_\alpha^\beta f(y)dy$$

Αν $f(x) \geq 0$ τότε το ολοκλήρωμα

$$S = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

παρουσιάζει από γεωμετρικής απόψεως, το εμβαδόν καμπυλογράμμου τραπεζίου που περιορίζεται από την καμπύλη $y=f(x)$, τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ και τον άξονα Ox.



5.2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ.

1. $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$

2. $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$

3. $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$ όπου $[\alpha,\beta] = [\alpha,\gamma] \cup [\gamma,\beta]$

4. $\int_{\alpha}^{\beta}[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_k(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} f_1(x)dx \pm \int_{\alpha}^{\beta} f_2(x)dx \pm \dots \pm \int_{\alpha}^{\beta} f_k(x)dx$

5. $\int_{\alpha}^{\beta} \mu f(x)\,dx = \mu \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ οπου $\mu =$ σταθερά.

6. Εκτίμηση ορισμένου ολοκληρώματος

Αν $m \leq f(x) \leq M$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε αληθεύουν οι ανισώσεις:

$$m(\beta-\alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq M(\beta-\alpha)$$

οπου m και M είναι το ελάχιστο και το μέγιστο αντίστοιχα της συναρτήσεως $f(x)$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

7. Θεώρημα μέσης τιμής.

Αν $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε υπάρχει τέτοιο σημείο x: ξ $(\alpha \leq \xi \leq \beta)$ ώστε να αληθεύει η σχέση:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$$

8. Το ορισμένο ολοκλήρωμα ως συνάρτηση των ορίων του

Η συνάρτηση $\Phi(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα ως συνάρτηση του άνω ορίου του.

Αν $f(x)$ είναι συνεχής, τότε

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt = f(x), \quad \frac{d}{dx}\int_{\alpha}^{\varphi(x)} f(t)dt = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

5.3 ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

5.3.1. ΠΩΣ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΤΑΙ ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛ..ΡΩΜΑ

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $F(x)$ είναι μία οποιαδήποτε παράγουσα αυτής $(F'(x) = f(x))$ τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα ικανοποιεί την σχέση:

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(x)\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha)} \qquad (1)$$

Παρατήρηση: Βλέπουμε κατ' αρχήν ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι αριθμός και όχι συνάρτηση όπως το αόριστο ολοκλήρωμα. Για να υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα πρέπει να βρούμε την παράγουσα (πίνακας αορίστων ολοκληρωμάτων) και μετά να υπολογίσουμε την διαφορά αυτής στα δύο όρια άνω-κάτω

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

494. Με την βοήθεια του ορισμού να υπολογισθεί το $\int_0^1 x^2 dx$

Λύση

Η συνάρτηση είναι $f(x) = x^2$ και το διάστημα $[0,1]$. Χωρίζουμε το διάστημα $[0,1]$ σε n ίσα τμήματα. Τότε:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}.$$

Σε κάθε διάστημα Δx_i εκλέγουμε από ένα σημείο ξ_i ως εξής:

$$\xi_0 = x_0 = 0,\ \xi_1 = x_1 = \frac{1}{n},\ \xi_2 = x_2 = \frac{2}{n}, \dots, \xi_{n-1} = \frac{n-1}{n},\ \xi_n = x_n = 1$$

Υπολογίζουμε τις τιμές της συναρτήσεως στα σημεία αυτά:

$$f(0)=0,\ f(\xi_1) = \frac{1}{n^2},\ f(\xi_2) = \frac{4}{n^2}, \dots, f(\xi_{n-1}) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2,\ f(\xi_n) = 1$$

Τότε το άθροισμα ολοκληρώσεως είναι:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{n^2}{n^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1^2+2^2+\dots+(n-1)^2+n^2}{n^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε:

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{1} = \frac{1}{3}$$

Και τελικά λοιπόν έχουμε: $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

495. $I = \int_0^1 x^3 dx$

Λύση

Η συνάρτηση είναι $f(x)=x^3$, συνεπώς μία από τις παράγουσες αυτής είναι $F(x)=\frac{x^4}{4}$.

Εφαρμόζοντας τον τύπο (1) έχουμε:

$$\int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{1}{4}(2^4-1)=\frac{1}{4}(16-1) = \frac{15}{4}$$

496. $I=\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

Λύση

Σύμφωνα με τον τύπο (1) έχουμε:

$$I=\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}\left[(2^2)^{\frac{3}{2}}-1\right]=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{14}{3}$$

497. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} ημ4x\,dx$

Λύση

Επειδή $ημ4x\,dx=-\frac{1}{4}d(συν4x)$ έχουμε:

$$I=-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d(συν4x) = -\frac{1}{4}\,συν4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4}\left(συν4\frac{\pi}{4}-συν0\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}(συνπ-συν0)=-\frac{1}{4}(-1-1)=\frac{1}{2}.$$

498. Να βρείτε την μέση τιμή της συναρτήσεως $f(x)=ημx$ στο διάστημα $[0,\pi]$.

Λύση

Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής έχουμε:

$$f(\xi)=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx \quad \text{όπου} \quad \alpha\leq\xi\leq\beta.$$

συνεπώς $f(\xi)=\frac{1}{\pi-0}\int_0^\pi ημx\,dx = \frac{1}{\pi}(-συνx)\Big|_0^\pi=\frac{1}{\pi}(1+1)=\frac{2}{\pi}$

499. Να βρείτε την μέση τιμή της συναρτήσεως $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ στο διάστημα $[-1,1]$.

Λύση

Όπως και στην προηγούμενη άσκηση έχουμε: $f(\xi)=\frac{1}{1+1}\int_{-1}^1\frac{dx}{1+x^2}=$

$$=\frac{1}{2}τοξεφx\Big|_{-1}^1=\frac{1}{2}(τοξεφ1-τοξεφ(-1))=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

5.3.2. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ (Ή ΑΛΛΑΓΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ).

Αν η συνάρτηση $x=\phi(t)$ ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. Η $\phi(t)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και έχει σ' αυτό συνεχή παράγωγο $\phi'(t)$.

2. Όταν η παράμετρος t μεταβάλλεται στο διάστημα $[t_1,t_2]$, η συνάρτηση $x=\phi(t)$ μεταβάλλεται στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

3. $\phi(t_1)=\alpha$ και $\phi(t_2)=\beta$.

τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ αληθεύει ο τύπος αλλαγής μεταβλητής στο ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_{t_1}^{t_2} f(\phi(t))\phi'(t)dt}$$

Συνήθως αντί της αντικαταστάσεως $x=\phi(t)$ εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $t=\psi(x)$. Στην περίπτωση αυτή τα όρια t_1 και t_2 προσδιορίζονται άμεσα από τις ισότητες $t_1=\psi(\alpha)$ και $t_2=\psi(\beta)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

500. $I=\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Λύση

Θέτουμε $\sqrt{x}=t \Leftrightarrow x=t^2 \Leftrightarrow dx=2tdt$. Αν $x=0 \Leftrightarrow \sqrt{0}=t_1 \Leftrightarrow t_1=0$, αν $x=4 \Leftrightarrow \sqrt{4}=t_2 \Leftrightarrow t_2=2$, συνεπώς

$$I=\int_0^2\frac{2tdt}{1+t}=2\int_0^2\frac{t+1-1}{1+t}dt=2\left(\int_0^2 dt-\int_0^2\frac{dt}{1+t}\right)\Leftrightarrow$$

$$I=2\left(t\Big|_0^2-\ln|1+t|\Big|_0^2\right)=2(2-0-\ln3+\ln1)=4-2\ln3$$

501. $I=\int_0^\alpha x^2\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx \quad (\alpha>0)$

Λύση

Θέτουμε $x=\alpha\eta\mu t \Leftrightarrow dx=\alpha\sigma\upsilon\nu t\,dt$.

Αν $x=0 \Leftrightarrow 0=a\eta\mu t \Leftrightarrow t_1=0$, αν $x=a \Leftrightarrow a=a\eta\mu t \Leftrightarrow$ $\eta\mu t=1 \Leftrightarrow t_2=\frac{\pi}{2}$, επομένως

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\eta\mu^2 t\sqrt{a^2-a^2\eta\mu^2 t}\cdot a\,\sigma\upsilon\nu t\,dt \Leftrightarrow$$

$$I=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^2 t\,\sigma\upsilon\nu^2 t\,dt \quad \left(|\sigma\upsilon\nu t|=\sigma\upsilon\nu t\ \left[0,\tfrac{\pi}{2}\right]\right)\Leftrightarrow$$

$$I=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^2 2t\,dt=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sigma\upsilon\nu 4t}{2}dt=\frac{a^4}{4}\left(\frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{8}\eta\mu 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{a^4\pi}{16}$$

502. $I=\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$

Λύση

Κάνουμε την αντικατάσταση: $1+3x^8=z^2 \Leftrightarrow 24x^7dx=2zdz$ $\Leftrightarrow x^7dx=\frac{zdz}{12}$, και γράφουμε $x^{15}dx=x^7\cdot x^8dx=x^7dx\frac{z^3-1}{3} \Leftrightarrow$

$$x^{15}dx=\frac{z(z^2-1)}{36}$$

Έτσι έχουμε $(x=0 \Leftrightarrow t_1=1,\ x=1 \Leftrightarrow t_2=2)$

$$I=\frac{1}{36}\int_1^2 z^2(z^2-1)dz=\frac{1}{36}\left(\frac{z^5}{5}-\frac{z^3}{3}\right)\Big|_1^2=\frac{29}{270}$$

503. $I=\int_0^{0,75}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

Λύση

Θέτουμε $\frac{1}{1+x}=t \Leftrightarrow x=\frac{1}{t}-1 \Leftrightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$, $x^2+1=\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+2$.

Όταν $x=0 \Rightarrow t_1=1$, όταν $x=0,75 \Rightarrow t_2=\frac{4}{7}$. Οπότε

$$I=\int_1^{\frac{4}{7}}\frac{-\frac{dt}{t^2}\cdot t^2}{\sqrt{2t^2-2t+1}}=\int_1^{\frac{4}{7}}\frac{dt}{\sqrt{2t^2-2t+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^{\frac{4}{7}}\frac{d\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\left(t-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\right|\Bigg|_1^{\frac{4}{7}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{14}+\sqrt{\left(\frac{1}{14}\right)^2+\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$$

5.3.3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΜΕΡΗ

Αν $f(x)$ και $\phi(x)$ έχουν συνεχείς παραγώγους στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)\phi'(x)\,dx = f(x)\cdot\phi(x)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \phi(x)\,f'(x)\,dx}$$

ή συντομώτερα

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)\,d\phi(x) = f(x)\cdot\phi(x) - \int_\alpha^\beta \phi(x)\,d\,f(x)} \qquad (1)$$

Η μέθοδος αυτή ολοκληρώσεως ονομάζεται και παραγοντική ολοκλήρωση

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

504. $I = \int_0^1 \ln(x+1)\,dx$

Λύση

Θέτουμε $f(x) = \ln(1+x) \Leftrightarrow d\,f(x) = \dfrac{dx}{1+x}$

και $\phi(x) = x \Leftrightarrow d\,\phi(x) = dx$

Τότε σύμφωνα με τον τύπο (1) έχουμε:

$$I = x\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\,\frac{dx}{1+x} = \ln 2 - \int_0^1 \frac{x+1-1}{1+x}\,dx =$$

$$= \ln 2 - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{dx}{1+x} =$$

$$= \ln 2 - x\Big|_0^1 + \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2 - 1 + \ln 2 = 2\ln 2 - 1$$

505. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\sigma\upsilon\nu x\,dx$

Λύση

Θέτουμε $f(x) = x \Leftrightarrow df(x) = dx$ και

$$\phi(x)=\eta\mu x \iff \sigma\upsilon\nu x dx = d\phi(x)$$

Βάσει του τύπου (1) θα έχουμε:

$$I = x\,\eta\mu x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx = \frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

506. $I = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \eta\mu\sqrt{x}\, dx$

Λύση

Κατ' αρχήν κάνουμε την αντικατάσταση $\sqrt{x} = t \iff x = t^2$

$dx = 2tdt$. Αν $x=0 \Rightarrow t_1 = 0$, αν $x = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{2}$

Έτσι παίρνουμε: $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu t\, t\, dt$

Εφαρμόζουμε τώρα ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$f(t) = t \iff df(t) = dt$$

$$\eta\mu t dt = d\phi(t) \iff \phi(t) = -\sigma\upsilon\nu t$$

και έχουμε:

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu t\cdot t dt = 2\left(-t\sigma\upsilon\nu t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu t dt\right) \iff$$

$$I = 2\eta\mu t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

507. $I = \int_0^1 x\ln(1+x^2)dx$

Λύση

Θέτουμε $\ln(1+x^2) = f(x) \iff df(x) = \frac{2xdx}{1+x^2}$

$$xdx = d\phi(x) \iff \phi(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη:

$$I = \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\,2\int_0^1 \frac{x^3dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln 2 - \int_0^1 \frac{x^3dx}{x^2+1} \qquad (1)$$

Έχουμε: $\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$ δηλαδή

$$\int_0^1 \frac{x^3dx}{x^2+1} = \int_0^1 xdx - \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε τελικά:

$$\int_0^1 x \ln(1+x^2)\,dx = \frac{1}{2}\ln 2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\right) = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

508. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$

509. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2-1)^2}$

510. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$

511. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^5 x\,\text{ημ}2x\,dx$

512. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

513. $\displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$

514. $\displaystyle\int_{-7}^{7} \frac{x^4\,\text{ημ}x}{x^6+2}$

515. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \text{συν}x \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$

516. $\displaystyle\int_0^1 \ln(x+1)\,dx$

517. $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{2x}\,dx$

518 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\,\text{ημ}x\,dx$

519. $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{x^2-\sqrt{2}x}\,dx.$

520. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\text{ημ}^2 x}$

521. $\displaystyle\int_0^1 x e^{-x}\,dx$

522. Να αποδείξετε τον αναδρομικό τύπο:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^{n-2} x\,dx \quad (n\in N)$$

5.4. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

I. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΟΡΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ όπου $\alpha<\beta<+\infty$ δηλαδή στο διάστημα $[\alpha,+\infty)$ τότε θεωρούμε (βλ. σχήμα αριστερά):

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \qquad (1)$$

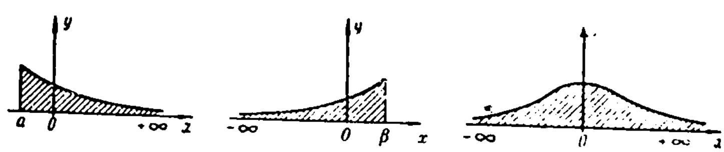
Αν το όριο του δευτέρου μέλους της (1) υπάρχει, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$ λέμε ότι **συγκλίνει**, αν δε το παραπάνω όριο δεν υπάρχει τότε λέμε ότι το ολοκλήρωμα αυτό δεν συγκλίνει (αποκλίνει).

Ομοίως ορίζουμε τα ολοκληρώματα (βλ. σχ. μεσαίο και δεξιά)

$$\int_{-\infty}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \qquad (2)$$

και

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to+\infty}}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \qquad (3)$$



Κριτήρια συγκλίσεως:

Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$

α) συγκλίνει αν $|f(x)| \leq \dfrac{M}{x^m}$ και $m>1$

β) αποκλίνει αν $f(x) \geq \dfrac{M}{x^m}$ και $m\leq 1$, $m=\text{const}$.

II. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΑΠΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΑΣΥΝΕΧΕΙΣ

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $(\alpha,\beta]$ και στο σημείο $x=\alpha$ $\lim_{x\to\alpha} f(x)=\infty$ τότε θεωρούμε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta} f(x)dx \qquad (\varepsilon>0) \qquad (4)$$

(βλ. σχήμα αριστερά)

Αν το όριο στο δεύτερο μέλος της (4) υπάρχει, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ λέμε ότι συγκλίνει, αν δέ το παραπάνω όριο δεν υπάρχει τότε λέμε ότι το ολοκλήρωμα αυτό δεν συγκλίνει (αποκλίνει).

Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε τό ολοκλήρωμα:

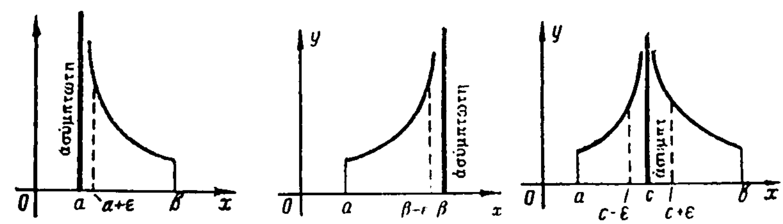
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\alpha^{\beta-\varepsilon} f(x)dx \qquad (5)$$

όταν $\lim_{x \to \beta} f(x) = \infty$ (βλ. μεσαίο σχήμα)

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, C) \cup (C, \beta]$ και $\lim_{x \to C} f(x) = \infty$ τότε θεωρούμε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_\alpha^{C-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{C+\varepsilon_2}^{\beta} f(x)dx \qquad (6)$$

(βλ. δεξιό σχήμα)



Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ συγκλίνει όταν και τα δύο όρια του δευτέρου μέλους της ισότητας (6) υπάρχουν. Δεν συγκλίνει αν τουλάχιστον ένα από τα δύο αυτά όρια δέν υπάρχει.

Κριτήρια συγκλίσεως

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι ασυνεχής στο ένα από τα άκρα του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ π.χ. στο σημείο $x = \alpha$ ($\lim_{x \to \alpha} f(x) = \infty$), τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$:

α') συγκλίνει αν $|f(x)| \leq \dfrac{M}{(x-\alpha)^m}$ και $m < 1$

β') δεν συγκλίνει αν $f(x) \geq \dfrac{M}{(x-\alpha)^m}$ και $m > 1$ (m, M σταθερές)

Αν $f(x)$ είναι ασυνεχής στό σημείο $x = C$ του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)$ το διασπάμε σε άθροισμα δύο ολοκληρωμάτων από τό α έως το C και από το C έως το β και εφαρμόζουμε στο καθένα ολοκλήρωμα τα παραπάνω κριτήρια.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογίσετε τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

523. $I = \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

Λύση

Σύμφωνα με τον τύπο (1) έχουμε:

$$I = \lim_{\beta \to +\infty} \int_{1}^{\beta} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_{1}^{\beta} \right) = 1 - \lim_{\beta \to +\infty} \frac{1}{\beta} = 1$$

άρα το ολοκλήρωμα αυτό συγκλίνει.

524. $I = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$

Λύση

Σύμφωνα με τον τύπο (2) έχουμε.

$$I = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha \to -\infty} \left(\text{τοξεφ}\, x \Big|_{\alpha}^{0} \right) = 0 - \lim_{\alpha \to -\infty} \text{τοξεφ}\, \alpha = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Παρατήρηση: Στο άκρο του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ που η συνάρτηση $f(x)$ δεν απειρίζεται βρίσκουμε την τιμή της $f(x)$ στο σημείο αυτό. Ενώ στο άλλο άκρο που η συνάρτηση απειρίζεται βρίσκουμε το όριο της $F(x)$, όπου $F(x)$ είναι η παράγουσα της $f(x)$

525. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$

Λύση

Σύμφωνα με τον τύπο (3) έχουμε:

$$I = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{0} \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} + \lim_{\beta \to +\infty} \int_{0}^{\beta} \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{\alpha \to -\infty} \left(\text{τοξεφ}\, \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Big|_{\alpha}^{0} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{\beta \to +\infty} \left(\text{τοξεφ}\, \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Big|_{0}^{\beta} \right) \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\text{τοξεφ}\, \frac{2}{5} - \lim_{\alpha \to -\infty} \text{τοξεφ}\, \frac{\alpha+2}{\sqrt{5}} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\lim_{\beta \to +\infty} \text{τοξεφ}\, \frac{\beta+2}{\sqrt{5}} - \text{τοξεφ}\, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να υπολογίσετε τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

526. $I = \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} \quad (\alpha > 1)$

527. $I = \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

5.5. ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.

Αν στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ η συνάρτηση $f(x)\geq 0$, τότε, όπως είναι γνωστό, το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τραπεζίου που περιορίζεται από την καμπύλη $y=f(x)$, τον άξονα Ox και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ (σχ. α) υπολογίζεται από τον τύπο:

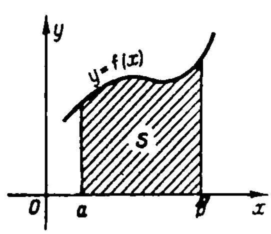
$$\boxed{S=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx} \qquad (1)$$

Αν $f(x)\leq 0$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\leq 0$. Το εμβαδόν στην περίπτωση αυτή υπολογίζεται από τον τύπο

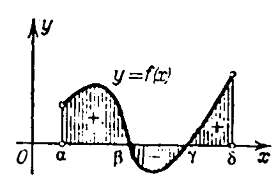
$$S=\left|\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\right| \qquad (2)$$

Αν η συνάρτηση $f(x)$ αλλάζει πρόσημα μερικές φορές στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε στον υπολογισμό του εμβαδού παίρνουμε το άθροισμα των απολύτων τιμών των ολοκληρωμάτων που είναι αρνητικά (σχ. β'), δηλαδή:

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\left|\int_{\beta}^{\gamma}f(x)dx\right|+\int_{\gamma}^{\delta}f(x)\,dx \qquad (3)$$



Σχ. α



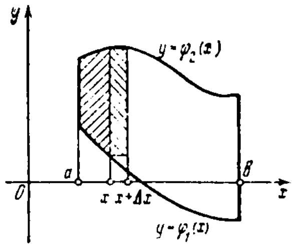
Σχ. β'

Αν το επίπεδο σχήμα (χωρίο) περιορίζεται από δύο συνεχείς συναρτήσεις $y=\phi_1(x)$ και $y=\phi_2(x)$ και από τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ τότε (σχ. γ) $(\phi_2(x)\geq\phi_1(x))$:

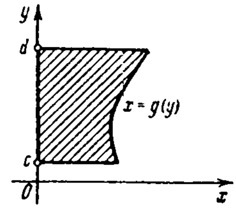
$$S=\int_{\alpha}^{\beta}[\phi_2(x)-\phi_1(x)]dx \qquad (4)$$

Αν το σχήμα περιορίζεται από την καμπύλη $x=g(y)$, τον άξονα Oy και τις ευθείες $y=c$, $y=d$ (σχ. δ) τότε έχουμε:

$$S=\int_c^d g(y)\,dy \qquad (5)$$



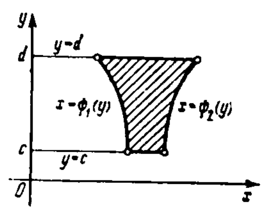
Σχ. γ'



Σχ. δ'

Κατ' αναλογία με τον τύπο (4) μπορούμε να γράψουμε (σχ. ε'):

$$S=\int_c^d \left[\psi_2(y)-\psi_1(y)\right]dy \qquad (6)$$



Σχ. ε'

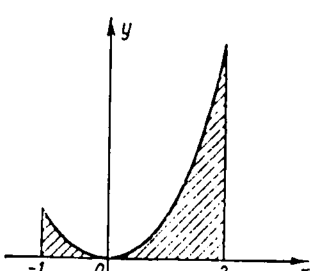
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

528. Να υπολογισθεί το εμβαδό του σχήματος που περιορίζεται από την παραβολή $y=x^2$, τον άξονα Ox και τις ευθείες $x=-1$, $x=2$. (βλ. σχήμα).

Λύση

Για να υπολογίσουμε το εμβαδό ενός επιπέδου σχήματος:

α') Σχεδιάζουμε το σχήμα β') Βρίσκουμε τα όρια ολοκληρώσεως



και γ') Εκλέγουμε έναν από τους τύπους (1) έως (6).

Τα όρια ολοκληρώσεως εδώ είναι $\alpha=-1$, $\beta=2$.

Σύμφωνα με τον τύπο (1) έχουμε:

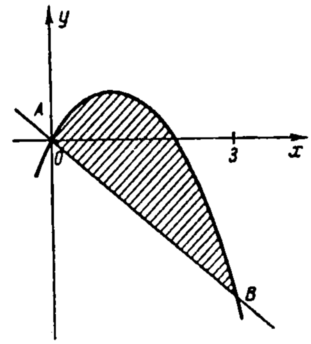
$$S=\int_{-1}^{2} x^2\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2}=\frac{1}{3}\left(2^3-(-1)^3\right)=$$

$$=\frac{9}{3}=3$$

529. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής πού περιορίζεται από την παραβολή $y=2x-x^2$ και την ευθεία $y=-x$.

Λύση

Έχουμε $y=x(2-x)$ πού είναι παραβολή, και όπου για $x=0$, $y=0$, γιά $x=2$, $y=0$ και για $x=1$, $y=1$.



Για να βρούμε τα όρια της ολοκληρώσεως λύνουμε το σύστημα:

$$y=-x$$

$$y=2x-x^2 \Leftrightarrow 2x-x^2=-x \Leftrightarrow$$

$$x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ και } x=3$$

συνεπώς $\alpha=0$ και $\beta=3$. Έχουμε λοιπόν σύμφωνα με τον τύπο (4): $S=\int_0^3[2x-x^2-(-x)]dx=$

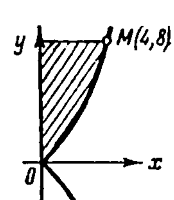
$$=\int_0^3(3x-x^2)dx=3\frac{x^2}{2}\Big|_0^3-\frac{x^3}{3}\Big|_0^3=\frac{3}{2}\cdot 9-\frac{27}{3}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}.$$

530. Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τήν $y^2=x^3$, και τις ευθείες $y=8$ και $x=0$.

Λύση

Η κατασκευή της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως γίνεται με την βοήθεια του πίνακα:

y	x
0	0
1	1
$2\sqrt{2}$	2
$3\sqrt{3}$	3
8	4



Τα όρια ολοκληρώσεως είναι $y=0$ και $y=8$, συνεπώς θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (5):

$$y^2=x^3 \Leftrightarrow x=y^{\frac{2}{3}} \quad \text{και} \quad S=\int_0^8 y^{\frac{2}{3}}dy=\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\Big|_0^8=\frac{3}{5}(2^3)^{\frac{5}{3}}=$$

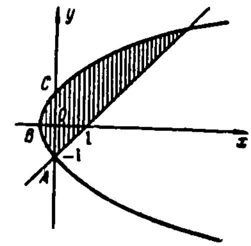
$$=\frac{3}{5}\cdot 2^5=\frac{3\cdot 32}{5}=\frac{96}{5}.$$

531. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες $y^2 = 2x+1$ και $x-y-1=0$

Λύση

Κατασκευάζουμε τις γραφικές παραστάσεις της υπερβολής $y^2=2x+1$ και της ευθείας $x-y-1=0$

$\Delta(y) = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.



Βρίσκουμε τα όρια ολοκληρώσεως ως πρός την μεταβλητή y:

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= 2x+1 \\ x &= y+1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow y^2 = 2y+2+1 \Leftrightarrow$$

$$y^2-2y-3=0 \Leftrightarrow y_1=1,\ y_2=3$$

Έτσι, εφαρμόζοντας τόν τύπο (6) έχουμε:

$$S=\int_{-1}^{3}\left(y+1-\frac{y^2-1}{2}\right)dy=\left(\frac{y^2}{2}+y-\frac{y^3}{6}+\frac{y}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{3} \Leftrightarrow$$

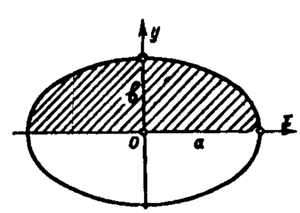
$$S=\frac{1}{2}(9-1)+\frac{3}{2}\left[3-(-1)\right]-\frac{1}{6}\left(27-(-1)^3\right)=4+6-\frac{14}{3}=\frac{16}{3}$$

532. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της ελλείψεως $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

Λύση

Από την $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{\beta^2}=1-\frac{x^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow y=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}$

Τά όρια ολοκληρώσεως είναι: $x=-\alpha$, $x=\alpha$



Έτσι έχουμε (λόγω συμμετρίας ως πρός τον άξονα Ox)

$$S=2\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx$$

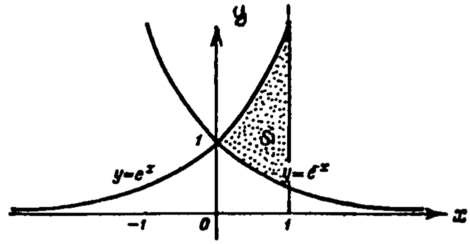
Επειδή το σχήμα είναι συμμετρικό καί ως πρός τον άξονα Oy μπορούμε να γράψουμε:

$$S=4\int_{0}^{\alpha}\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx=\frac{4\beta}{\alpha}\int_{0}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx$$ απ' όπου τελικά

βρίσκουμε $S=\pi\alpha\beta$. (Αν $\alpha=\beta$ έχουμε κύκλο εμβαδού $S=\pi\alpha^2$)

533. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες $y=e^x$, $y=e^{-x}$ και $x=1$.

Λύση



Τα όρια ολοκληρώσεως είναι $x=0$ και $x=1$.

Έχουμε τότε:

$$S=\int_0^1 (e^x-e^{-x})dx =$$

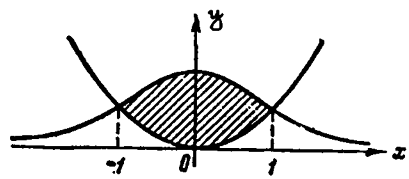
$$= e^x\Big|_0^1 + e^{-x}\Big|_0^1 = e-1+e^{-1}-1 = e+e^{-1}-2.$$

534. Να βρείτε το εμβαδό της περιοχής που περιορίζεται από τις καμπύλες $y=\frac{1}{1+x^2}$ και $y=\frac{x^2}{2}$

Λύση

Βρίσκουμε τα όρια ολοκληρώσεως από το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{1}{1+x^2}\\ y&=\frac{x^2}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{2} \Rightarrow x_1=-1 \text{ ή } x_2=+1$$



Επειδή το σχήμα είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα Oy παίρνουμε:

$$S=2\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx =$$

$$=2\left(\text{τοξεφ}x\Big|_0^1-\frac{x^3}{6}\Big|_0^1\right)=2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από:

535. Την υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και την ευθεία $x=2\alpha$

536. Δύο κλάδους της καμπύλης $(y-x)^2=x^3$ και την ευθεία $x=1$

537. Τις καμπύλες $y=x+1$, $y=\text{συν}x$ και $y=0$

538 Την καμπύλη $y^2=x^3-x^2$ και την ευθεία $x=2$.

539. Τις καμπύλες $y=4x^2$, $y=\frac{x^2}{9}$ και την ευθεία $y=2$

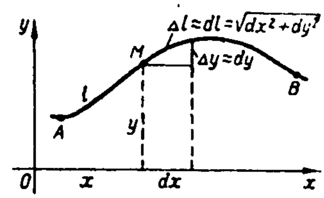
540 Να βρεθεί το εμβαδό της θηλειάς που σχηματίζει η καμπύλη $y^2=x(x-1)^2$

56. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΗΚΟΥΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Έστω ότι η καμπύλη στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ορίζεται από την εξίσωση $y=f(x)$ ή $x=F(y)$. Τότε το διαφορικό του μήκους τόξου εκφράζεται από τους τύπους:

$$dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx \quad ή \quad dl=\sqrt{1+x'^2}\,dy \qquad (1)$$

και το μήκος του τόξου $\widehat{AB}$ ορίζεται



από τον τύπο:

$$L_{AB}=\int_{(A)}^{(B)} dl \qquad (2)$$

ή

$$L=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+y'^2}\,dx, \quad L=\int_{y_A}^{y_B}\sqrt{1+x'^2}\,dy \qquad (3)$$

$(x_A<x_B,\ y_A<y_B)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

541 Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $y^2=x^3$, από $x=0$ μέχρι $x=1$ $(y\geqslant 0)$

Λύση

Εφαρμόζοντας τον πρώτο τύπο της (3) έχουμε:

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Βρίσκουμε την παράγωγο της εξισώσεως

$$(y^2)'=(x^3)' \Rightarrow 2yy'=3x^2 \Rightarrow y'=\frac{3x^2}{2y} \Rightarrow y'=\frac{3x^2}{2x^{3/2}} \Rightarrow y'=\frac{3}{2}x^{\frac12}$$

και τότε έχουμε: $L=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\int_0^1\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac12}d\left(1+\frac{9}{4}x\right)\rightarrow$

$$L=\frac{4}{9}\,\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac32}}{3/2}\Bigg|_0^1=\frac{8}{27}\left[\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac32}-1\right]=\frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8}-1\right)$$

542. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ που περιορίζεται από τα σημεία $y=1$ και $y=2$

Λύση

Είναι προτιμώτερο να εφαρμόσουμε τον τύπο :

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+x'^2}\,dy$$

Έτσι έχουμε:

$$x'=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}\quad \text{και}$$

$$1+x'^2=\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2y}\right)^2+1=1+\frac{y^2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4y^2}=\frac{1}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{1}{4y^2}\quad \text{άρα}$$

$$1+x'^2=\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)^2\quad \text{συνεπώς}$$

$$L=\int_1^2\sqrt{\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)^2}\,dy=\int_1^2\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)dy=\frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_1^2+\frac{1}{2}\ln|y|\Big|_1^2\Rightarrow$$

$$L=\frac{1}{4}(4-1)+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

543. Να βρείτε το μήκος του τόξου της καμπύλης $y=\ln\sigma\upsilon\nu x$, πού περιορίζεται από τα σημεία $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$.

Λύση

Βρίσκουμε τήν παράγωγο $y'=\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=-\varepsilon\varphi x$.

Έχουμε $1+y'^2=1+\varepsilon\varphi^2 x$, άρα:

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu x}=\ln\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\Rightarrow L=\ln\frac{3\pi}{8}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

544. Να βρεθεί το μήκος της αστροειδούς $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\alpha^{\frac{2}{3}}$

545. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $y=\ln x$ που περιορίζεται από τα σημεία $x=\frac{3}{4}$, $x=\frac{12}{5}$.

546. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $y^2=x^3$ που περιορίζεται από την ευθεία $x=\frac{4}{3}$

547. Να βρεθεί το μήκος όλης της καμπύλης $x^2+y^2=\alpha^2$

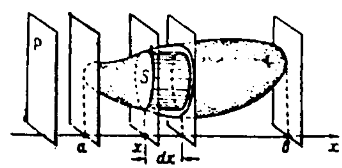
548. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $y^2=\frac{4}{9}(2-x)^3$ που περιορίζεται από την ευθεία $x=-1$.

5.7. ΟΓΚΟΙ ΣΤΕΡΕΩΝ

Το πρόβλημα του ορισμού και της ευρέσεως των όγκων στη γενική του μορφή λύνεται με την βοήθεια των διπλών και τριπλών ολοκληρωμάτων. Επειδή όμως η θεωρία αυτή ξεφεύγει των ορίων της προβλεπομένης ύλης του παρόντος συγγράμματος το οποίο απευθύνεται σε συγκεκριμένους σπουδαστές της Γ-βάθμιας εκπαίδευσης, γι' αυτό θα εξετάσουμε εδώ δύο μόνο περιπτώσεις:

I. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΓΚΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΜΕ ΓΝΩΣΤΕΣ ΠΛΑΓΙΕΣ ΤΟΜΕΣ

Έστω ότι $S = S(x)$ είναι το εμβαδόν της τομής του στερεού από επίπεδο κάθετο σε άξονα Ox (Oy ή Oz), στο σημείο x (βλ. σχήμα). Τότε ο όγκος του στερεού αυτού υπολογίζεται από τον τύπο



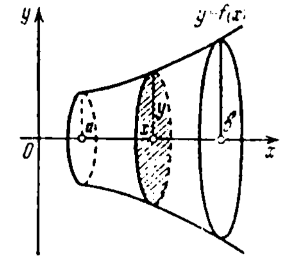
$$\boxed{V = \int_{\alpha}^{\beta} S(x)\,dx} \qquad (1)$$

όπου α και β είναι οι τετμημένες των ακραίων τομών του στερεού.

Αν οι τομές είναι κάθετες αντίστοιχα στους άξονες Oy και Oz τότε ο όγκος υπολογίζεται από τους τύπους:

$$V = \int_{y_1}^{y_2} S(y)\,dy \quad (2) \quad \text{και} \quad V = \int_{z_1}^{z_2} S(z)\,dz \quad (3)$$

II ΟΓΚΟΣ ΣΤΕΡΕΩΝ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ



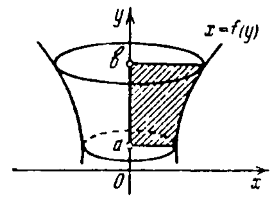
Έστω ότι το σχήμα που περιορίζεται από τις καμπύλες $y=f(x)$, $x=\alpha$, $x=\beta$, $y=0$ περιστρέφεται γύρω από τον άξονα Ox (βλ. διπλανό σχήμα). Για να βρούμε τον τύπο, με την βοήθεια του οποίου θα υπολογίζουμε τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (1), δηλαδή τον τύπο

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} S(x)\,dx$$

Η τομή του στερεού από το κάθετο προς τον άξονα Ox επίπεδο στο σημείο x, είναι κύκλος με ακτίνα y ($y=f(x)$) δηλαδή $S(x)=\pi y^2$

Τότε $\quad V_x = \pi\int_{\alpha}^{\beta} y^2 dx \qquad (4)$

Αν το σχήμα που περιορίζεται από τις καμπύλες $x=f(y)$, $y=\alpha$, $y=\beta$, $x=c$ (βλ. διπλανό σχήμα) περιστρέφεται περί τον άξονα Oy, τότε ο όγκος V του στερεού εκ περιστροφής υπολογίζεται από τον τύπο:



$$V_y = \pi\int_{\alpha}^{\beta} x^2 dy \qquad (5)$$

Ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα Ox του σχήματος που περιορίζεται από τις καμπύλες $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ $\left(0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)\right)$ και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$, υπολογίζεται από τον τύπο:

$$V_x = \pi\int_{\alpha}^{\beta}\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]dx \qquad (6)$$

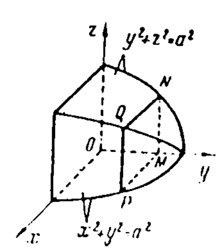
Ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή περί τον άξονα Oy του σχήματος που περιορίζεται από τις καμπύλες $x=\phi_1(y)$, $x=\phi_2(y)$ και τις ευθείες $y=c$, $y=d$, υπολογίζεται από τον τύπο:

$$V_y = \pi\int_{c}^{d}\left[\phi_2^2(y)-\phi_1^2(y)\right]dy \qquad (7)$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

549. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που περιορίζεται από τις κυλινδρικές επιφάνειες $x^2+y^2=\alpha^2$ και $y^2+z^2=\alpha^2$

Λύση



Κατασκευάζουμε το $\frac{1}{8}$ του στερεού (βλ. σχήμα). Η τομή του καθέτου επιπέδου προς τον άξονα Oy είναι τετράγωνο PMNQ. Συμβολίζοντας με $|\vec{OM}|=y$, τότε το εμβαδόν του τετραγώνου PMNQ είναι

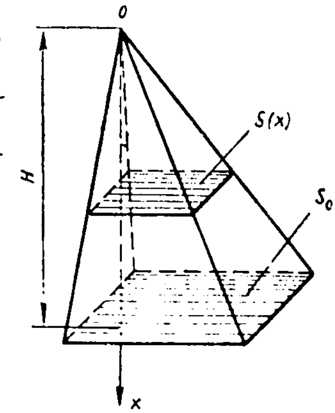
$S(y) = (PM)^2 = \left(\sqrt{a^2-y^2}\right)^2 = a^2 - y^2$ (η ακτίνα του κύκλου είναι OP και ισούται με a), όπου $0 \leq y \leq a$.

Ο όγκος όλου του στερεού, σύμφωνα με τον τύπο (2) θα δίνεται από το ολοκλήρωμα : $V = 8\int_0^a (a^2-y^2)\,dy$

550. Να βρεθεί ο όγκος της πυραμίδας πού έχει βάση S_0 και ύψος H.

Λύση

Έστω ότι έχουμε την πυραμίδα του διπλανού σχήματος. Πάνω στο ύψος της πυραμίδας κατευθύνουμε τον άξονα Ox. Θεωρούμε το κάθετο επίπεδο στον άξονα Ox που διέρχεται από τυχόν σημείο x και του οποίου η τομή με την πυραμίδα δίνει πολύγωνο, του οποίου το εμβαδόν συμβολίζουμε μέ $S(x)$.



Για να βρούμε το εμβαδό $S(x)$ χρησιμοποιούμε τον γνωστό τύπο από την γεωμετρία : $\dfrac{S(x)}{S_0} = \dfrac{(H-x)^2}{H^2} \Rightarrow$

$S(x) = \dfrac{S_0}{H^2}(H-x)^2$, όπου S_0 είναι το εμβαδόν της βάσεως.

Σύμφωνα τώρα με τόν τύπο (1) έχουμε:

$$V = \frac{S_0}{H^2}\int_0^H (H-x)^2dx = -\frac{S_0}{H^2}\int_0^H (H-x)^2 d(H-x) \Rightarrow$$

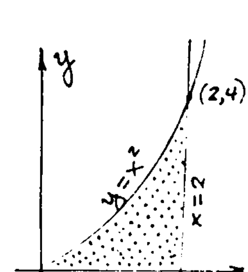
$$V = -\frac{S_0}{H^2}\cdot\frac{(H-x)^3}{3}\Bigg|_0^H = \frac{S_0}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}S_0H.$$

καί έτσι πήραμε τον γνωστό τύπο του όγκου της πυραμίδας.

551. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα Oy του σχήματος που περιορίζεται από τις καμπύλες : $y=x^2$, $y=0$, $x=2$

Λύση

Επειδή το σχήμα περιορίζεται από τις καμπύλες $x^2=y$ και $x=2$ καί στρέφεται περί τον άξονα Oy εφαρμόζουμε τον τύπο (7) :

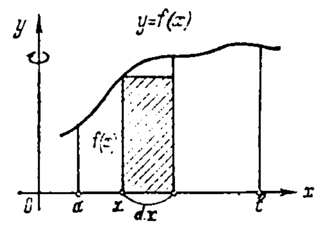


$$V_y = \pi\int_0^4 (4-y)dy \Rightarrow V_y = \pi\left(4y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^4 = \pi\left(16-\frac{16}{2}\right) = 8\pi$$

552. Έστω ότι το καμπυλόγραμμο τραπέζιο που περιορίζεται από την καμπύλη $y=f(x)$, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα Ox στρέφεται γύρω από τον άξονα Oy. Νά δείξετε ότι ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται υπολογίζεται από τον τύπο

$$V_y = 2\pi\int_\alpha^\beta x\,f(x)\,dx$$

Λύση



Θεωρούμε το γραμμοσκιασμένο ορθογώνιο του σχήματος. Με την στροφή του περί τον άξονα Oy παράγεται κυλινδρικό σώμα πάχους dx (το οποίο είναι η διαφορά κυλίνδρων ίδιου ύψους και ακτίνων βάσεων x και $x+dx$ αντίστοιχα)

Ο όγκος του σώματος αυτού κατά προσέγγιση

είναι $\quad dV = \pi(x+dx)^2 f(x) - \pi x^2 f(x) \Leftrightarrow$

$$dV = (\pi x^2 + 2x\pi dx + \pi dx^2 - \pi x^2) f(x) \Leftrightarrow$$

$$dV = (2x\pi dx + \pi dx^2) f(x)$$

Επειδή $(dx)^2$ είναι απειροστό ανωτέρας τάξεως ως πρός το dx μπορούμε νά γράψουμε : $dV = 2\pi x f(x)dx$ απ' όπου : $\boxed{V = 2\pi\int_\alpha^\beta x\,f(x)dx}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

553. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα Oy του καμπυλογράμμου τραπεζίου που περιορίζεται από ένα τόξο της ημιτονοειδούς $y=$ $=\eta\mu x$ πού αντιστοιχεί σε μία ημιπερίοδο.

554. Εστω ότι το σχήμα $y=2x-x^2$, $y=0$ στρέφεται περί τον άξονα Oy. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής.

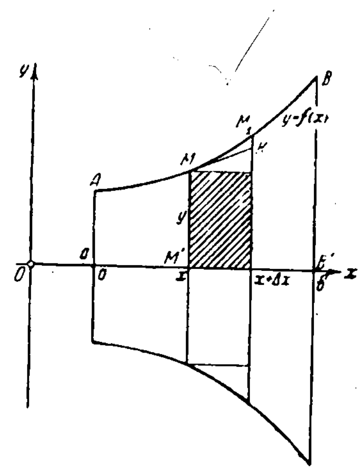
555. Να βρεθεί ο όγκος του παραγομένου στερεού εκ της περιστροφής του σχήματος $y=x^2$ και $y=4$ περί την ευθεία $x=2$.

5.8. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΗ

I. ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Ας υποθέσουμε ότι πρέπει να υπολογίσουμε κάποιο σταθερό μέγεθος (γεωμετρικό ή άλλο) που συσχετίζεται με το κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Δεχόμεθα επίσης ότι το μέγεθος Q είναι μία «προσθετική συνάρτηση του διαστήματος» και πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή της που αντιστοιχεί σε όλο το διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Για παράδειγμα ας πάρουμε στο επίπεδο την καμπύλη $y=f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ του σχήματος.



Τότε το μήκος L της καμπύλης AB, το εμβαδό S του καμπυλόγραμμου τραπεζίου $AA'B'B$ και ο όγκος V του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του τραπεζίου περί τον άξονα Ox, είναι όλα μεγέθη της παραπάνω μορφής.

Θα εξετάσουμε το «στοιχειώδες» ΔQ του μεγέθους Q που αντιστοιχεί στο «στοιχειώδες διάστημα» $[x, x+\Delta x]$. Προσπαθούμε από τους όρους του προβλήματος να υπολογίσουμε το ΔQ κατά προσέγγιση, εκφράζοντας αυτό στην μορφή $q(x)\cdot\Delta x$ δηλαδή

$$\boxed{\Delta Q \approx q(x)\Delta x} \qquad (1)$$

Συνήθως την (1) γράφουμε στην μορφή

$$dQ = q(x)\,dx \qquad (2)$$

απ' όπου

$$\boxed{Q = \int_\alpha^\beta q(x)\,dx} \qquad (3)$$

Για το παράδειγμα που αναφέραμε σημειώνουμε ότι:

Το στοιχειώδες τόξο $\overset{\frown}{MM_1}$ μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με το τμήμα της εφαπτομένης ΜΚ έτσι ώστε

$$\Delta L = \sqrt{1+y'^2}\,\Delta x = \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\Delta x$$

Την στοιχειώδη ζώνη ΔS μπορούμε να αντικαταστήσουμε με το ορθογώνιο που έχει εμβαδό $\Delta S = y\cdot\Delta x = f(x)\,\Delta x$

Το ΔV μπορούμε να το εκφράσουμε ως εξής:

$$\Delta V = \pi y^2 \Delta x = \pi\,[f(x)]^2 \Delta x.$$

Στα παραπάνω μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι το σφάλμα που προέκυψε από τις αντικαταστάσεις είναι απειροστό ανωτέρας τάξεως ως πρός το Δx.

Το ότι ο τύπος (3) εκφράζει με ακρίβεια το μέγεθος Q μπορούμε να το εξηγήσουμε και ως εξής:

Το διάστημα $[\alpha,\beta]$ διαμερίζουμε με τα σημεία $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ σε στοιχειώδη διαστήματα $[\alpha, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_i, x_{i+1}], \dots, [x_{n-1}, \beta]$.

Επειδή σε κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ ή $[x_i, x_i+\Delta x_i]$ αντιστοιχεί στοιχειώδες μέρος του μεγέθους Q, που κατά προσέγγιση ισούται με $q(x_i)\,\Delta x_i$ τότε όλο το ζητούμενο μέγεθος Q κατά προσέγγιση θα εκφρασθεί με το άθροισμα:

$$Q \approx \sum_{i=1}^{n} q(x_i)\,\Delta x_i$$

Επομένως το όριο του παραπάνω αθροίσματος θα μας δώσει το ολοκλήρωμα

$$\int_{\alpha}^{\beta} q(x)\,dx$$

Έτσι το όλο πρόβλημα συνίσταται κάθε φορά στην εύρεση του προσεγγιστικού τύπου (1).

II ΕΡΓΟ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗΣ ΔΥΝΑΜΕΩΣ

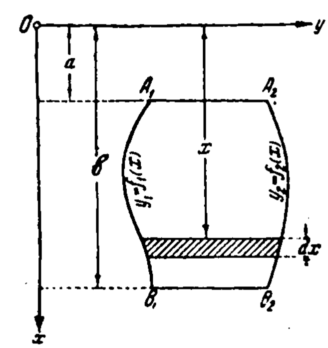
Έστω ότι υλικό σημείο κινείται κατά μήκος του άξονα Ox από το σημείο $x=\alpha$ ως το σημείο $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$ υπό την ενέργεια της μεταβλητής δυνάμεως $F=F(x)$ που η διεύθυνσή της συμπίπτει με την διεύθυνση κινήσεως. Για να βρούμε το έργο εξετάζουμε την στοιχειώδη μετατόπιση στο $[x, x+dx]$. Στο διάστημα αυτό θεωρούμε την δύναμη σταθερή, συνεπώς το έργο στο διάστημα αυτό είναι

$$dA = F(x)\,dx$$ από όπου έχουμε:

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} F(x)\,dx \qquad (4)$$

III. ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΠΙΕΣΗ

Ας υποθέσουμε ότι μέσα σε υγρό βρίσκεται κατακόρυφα κάποιο επίπεδο σχήμα όπως το διπλανό. Πρέπει να βρούμε την πλήρη υδροστατική πίεση W του υγρού πάνω στο επίπεδο σχήμα $A_1B_1B_2A_2$.



Η στοιχειώδης υδροστατική πίεση που ενεργεί στο διάστημα $[x, x+dx]$ είναι

$$dW = \gamma x\,(y_2 - y_1)\,dx,$$ όπου

γ είναι το ειδικό βάρος του υγρού, x είναι το βάθος της ζώνης $[x, x+dx]$ και $(y_2-y_1)dx$ είναι το εμβαδόν της στοιχειώδους ζώνης. Ολοκληρώνοντας την παραπάνω ισότητα έχουμε:

$$\boxed{W = \int_{\alpha}^{\beta} \gamma x\,[f_2(x) - f_1(x)]\,dx} \qquad (5)$$

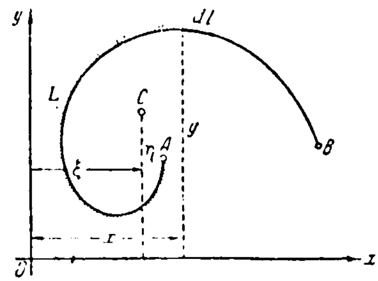
IV. ΡΟΠΕΣ ΚΑΙ ΚΕΝΤΡΑ ΒΑΡΟΥΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Είναι γνωστό ότι η στατική ροπή M του υλικού σημείου μάζας m ως πρός κάποιον άξονα ισούται με το γινόμενο της μάζας m επί την απόσταση d του σημείου από τον άξονα.

Στην περίπτωση πού έχουμε σύστημα υλικών σημείων με μάζες $m_1, m_2, \ldots, m_n$ που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με τον άξονα από τον οποίον απέχουν αντίστοιχα $d_1, d_2, \ldots, d_n$ η στατική ροπή θα είναι

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad (6)$$

Έστω τώρα ότι η καμπύλη είναι υλική και ομογενής, δηλαδή η πυκνότητά της $\rho=$ σταθ. Θέλουμε να υπολογίσουμε την στατική ροπή του τμήματος AB της καμπύλης ως προς τον άξονα Ox (βλ. το διπλανό σχήμα).



Πάνω στην καμπύλη θεωρούμε κάποιο στοιχείο dl της καμπύλης (που έχει μάζα $\rho\, dl$). Θεωρώντας το στοιχείο αυτό προσεγγιστικά σαν υλικό σημείο που βρίσκεται σε απόσταση y από τον άξονα Ox, έχουμε $dM_x = y\rho\, dl$ (7)

ή θεωρώντας $\rho=1$,
$$M_x = \int_\alpha^\beta y\, dl \tag{8}$$

ομοίως έχουμε
$$M_y = \int_\alpha^\beta x\, dl \tag{9}$$

λαμβάνοντας υπ' όψη ότι το κέντρο βάρους εκφράζεται με τον τύπο

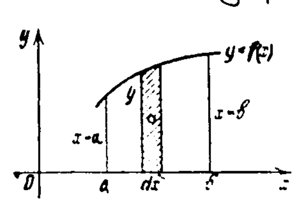
$$\xi = \frac{M_y}{L}, \quad \eta = \frac{M_x}{L}$$ έχουμε

$$\boxed{\xi = \frac{\int_\alpha^\beta x\, dl}{\int_\alpha^\beta dl} = \frac{\int_\alpha^\beta x\sqrt{1+y'^2}\, dx}{\int_\alpha^\beta \sqrt{1+y'^2}\, dx}} \tag{10}$$

$$\boxed{\eta = \frac{\int_\alpha^\beta y\, dl}{\int_\alpha^\beta dl} = \frac{\int_\alpha^\beta y\sqrt{1+y'^2}\, dx}{\int_\alpha^\beta \sqrt{1+y'^2}\, dx}} \tag{11}$$

V. ΣΤΑΤΙΚΕΣ ΡΟΠΕΣ ΚΑΙ ΚΕΝΤΡΑ ΒΑΡΟΥΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Θεωρούμε καμπυλόγραμμο τραπέζιο, οριζόμενο από την καμπύλη $y=f(x)$ $(\alpha\le x\le\beta)$, τον άξονα Ox και τις ευθείες $x=\alpha$, $y=\beta$, στην επιφάνεια S του οποίου συνεχώς κατανέμεται μάζα με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα ρ.



Μπορούμε να θεωρούμε $\rho=1$, οπότε η μάζα οποιουδήποτε τμήματος του καμπυλογράμμου ισούται με το εμβαδόν αυτού.

Για τον υπολογισμό των στατικών ροπών M_x και M_y του σχήματος παίρνουμε το στοιχειώδες χωρίο σε μορφή κατακόρυφης ζώνης (βλ. σχήμα).

Η μάζα της ζώνης αυτής ισούται με $dS = y\,dx$. Θεωρώντας την μάζα της ζώνης στο κέντρο βάρους $(x, \frac{y}{2})$ έχουμε:

$$dM_x = y\,dx \cdot \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} y^2 dx,$$
$$dM_y = y\,dx \cdot x = x\,y\,dx$$

Από τους τύπους αυτούς παίρνουμε

$$M_x = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta y^2 dx \qquad (12)$$

$$M_y = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta x\,y\,dx \qquad (13)$$

Σύμφωνα με τους γνωστούς τύπους και τους (12), (13) παίρνουμε τις συντεταγμένες του κέντρου βάρους επιπέδου σχήματος:

$$\xi = \frac{\int_\alpha^\beta x\,y\,dx}{\int y\,dy}, \quad \eta = \frac{\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta y^2 dx}{\int y\,dx} \qquad (14)$$

Οι τύποι (14) στην περίπτωση που το επίπεδο σχήμα περιορίζεται από δύο καμπύλες, παίρνουν την μορφή:

$$\boxed{\xi = \frac{\int_\alpha^\beta x(y_2 - y_1)dx}{\int (y_2 - y_1)dx}, \quad \eta = \frac{\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (y_2^2 - y_1^2)dx}{\int_\alpha^\beta (y_2 - y_1)dx}} \qquad (14')$$

VI ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ Ροπή αδρανείας J υλικού σημείου μάζας m ως πρός ένα άξονα ονομάζεται το γινόμενο της μάζας επί τό τετράγωνο της αποστάσεως του σημείου από τον άξονα αυτόν: $J = md^2$

Ροπή αδρανείας συστήματος n σημείων ισούται με το άθροισμα των ροπών αδρανείας των σημείων αυτών: $J = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$ (15)

Θα θεωρούμε ότι η μάζα κατανέμεται ομοιόμορφα στην καμπύλη, στην επιφάνεια και το στερεό, αντίστοιχα.

Θέτοντας $p=1$ και επιλέγοντας στοιχείο μάζας dm βρίσκουμε το στοιχειώδες στοιχείο αδρανείας $dJ = d^2 \cdot dm$

Συνεπώς η ροπή αδρανείας υπολογίζεται από τον τύπο

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} d^2 \cdot dm \qquad (15')$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

556. Να βρεθεί το έργο που χρειάζεται για την επιμήκυνση ελατηρίου κατά 4cm, αν είναι γνωστό ότι δύναμη 1 N επιμηκύνει το ελατήριο αυτό κατά 1 cm.

Λύση

Η αντίδραση F του ελατηρίου που το ένα άκρο του είναι δεμένο εκφράζεται σύμφωνα με τον νόμο του Χουκ από τον τύπο:

$$F(x) = kx \qquad (1)$$

όπου k είναι συντελεστής αναλογίας και x είναι η μεταβολή του ελατηρίου. Εφ'όσον για την επιμήκυνση του ελατηρίου κατά 1cm ενεργεί δύναμη 1N, τον συντελεστή αναλογίας k τον βρίσκουμε από την σχέση $1N = k \cdot \frac{1}{100}m \Rightarrow k = 100\frac{N}{m}$ και από την (1) έχουμε $F(x) = 100\frac{N}{m} x$. Εφαρμόζοντας τώρα τον τύπο (4) έχω

$$A = \int_0^{0{,}04m} 100\frac{N}{m} \cdot x\,dx = 100\frac{N}{m} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}04} = 5\cdot 0\frac{N}{m}(0{,}04)^2 \Rightarrow$$

$$A = 0{,}08 N\cdot m = 0{,}08 \text{ Joule}$$

557. Ηλεκτρικό φορτίο E συγκεντρωμένο στην αρχή των συντεταγμένων απωθεί φορτίο e από το σημείο $(\alpha,0)$ στο σημείο $(\beta,0)$. Να βρείτε το έργο A της δυνάμεως ωθήσεως.

Λύση

Από την φυσική γνωρίζουμε ότι η δύναμη είναι $F = \frac{Ee}{x^2}$.

Το διαφορικό του έργου είναι

$$dA = F dx = \frac{Ee}{x^2}dx \Rightarrow A = Ee\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{x^2} = Ee\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\alpha}^{\beta} \Rightarrow$$

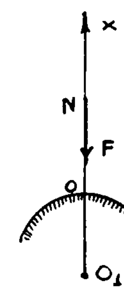
$$A = eE\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) = \frac{Ee(\beta-\alpha)}{\alpha\beta}$$

Αν $\beta \to \infty$, τότε $A = \frac{Ee}{\alpha} \lim_{\beta\to\infty} \frac{\beta-\alpha}{\beta} = \frac{Ee}{\alpha} \lim_{\beta\to\infty}\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{Ee}{\alpha}$

558. Να βρεθεί το έργο που απαιτείται γιά την εκτόξευση πυραύλου βάρους P από την επιφάνεια της γης, κατακόρυφα σε ύψος h.

Λύση

Σημειώνουμε με $\vec{F}$ την δύναμη έλξεως του πυραύλου από την γη όπως φαίνεται στό σχήμα.



Σύμφωνα με τον νόμο της παγκόσμιας έλξης έχουμε $F = \frac{m_\pi m_\gamma}{x^2}$ (1)

όπου m_π, m_γ είναι αντίστοιχα οι μάζες του πυραύλου και της γης, και x η απόσταση του πυραύλου από το κέντρο της γης. Για τον προσδιορισμό του k θέτουμε $x = R$ όπου R η ακτίνα της γης.

Τότε έχουμε : $F(R) = P = k\frac{m_\pi m_\gamma}{R^2}$ (2)

Απ' όπου παίρνουμε $k m_\pi m_\gamma = PR^2$, οπότε αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε $F = -\frac{PR^2}{x^2}$

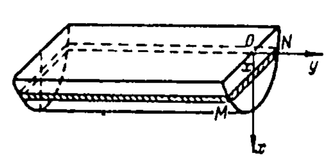
Σύμφωνα τώρα με τον τύπο (4) θά έχουμε:

$$A = -PR^2\int_R^{R+h}\frac{dx}{x^2} = -PR^2\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_R^{R+h} = -PR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = -\frac{PRh}{R+h}$$

559. Να υπολογισθεί το έργο που χρειάζεται για την άντληση νερού από δοχείο πού έχει σχήμα ημικυλίνδρου μήκους α και ακτίνας R.

Λύση

Εκλέγουμε σύστημα συντεταγμένων όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο όγκος του στρώματος νερού που βρίσκεται σε βάθος x και έχει μήκος α υπολογίζεται από τον τύπο



$$dV = \alpha\, MN\, dx \qquad (1)$$

όπου MN είναι χορδή παράλληλη πρός την διάμετρο της ημιπεριφέρειας, συνεπώς $MN = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε: $dV = 2a\sqrt{R^2-x^2}\,dx$

Η στοιχειώδης δύναμη που απαιτείται για να ανυψωθεί το στρώμα του νερού είναι: $dF = 2a\gamma\sqrt{R^2-x^2}\,dx$, όπου γ η πυκνότητα του νερού.

Το στοιχειώδες έργο είναι $dA = dF\cdot x$ άρα

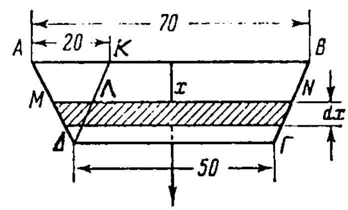
$$A = 2a\gamma\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\cdot x\,dx = -\frac{2}{3}a\gamma(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R, \Rightarrow A = \frac{2}{3}a\gamma R^3$$

560. Κατακόρυφο φράγμα έχει σχήμα τραπεζίου του οποίου η πάνω βάση είναι 70 m, η κάτω 50 m και το ύψος 20 m. Να ευρεθεί η πίεση του νερού στο φράγμα αυτό.

Λύση

Επιλέγοντας σύστημα συντεταγμένων όπως φαίνεται στο σχήμα έχουμε:

$$dW = \gamma\, MN\, dx\cdot x \qquad (1)$$



$MN = M\Lambda + \Lambda N = M\Lambda + KB = M\Lambda + (70-20) = M\Lambda + 50$

Το ΜΛ υπολογίζεται από τα όμοια τρίγωνα ΜΛΔ και ΑΚΔ: $\frac{M\Lambda}{AK} = \frac{20-x}{20} \Leftrightarrow M\Lambda = 20\,\frac{20-x}{20} =$

$= 20-x$ συνεπώς $MN = 20-x+50 = 70-x$ (2)

Η (1) με την βοήθεια της (2) μας δίνει:

$$dW = \gamma(70-x)\times dx \Rightarrow W = \gamma\int_0^{20}(70-x)\times dx \Rightarrow W = 11333\tfrac{1}{3}\gamma.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

561. Ένα καζάνι (λέβης) έχει σχήμα παραβολοειδούς εκ περιστροφής με βάθος $H = 0{,}5$m και ακτίνα βάσεως $R = 0{,}4$m. Να βρεθεί το έργο που χρειάζεται για την άντληση του νερού που περιέχεται στο καζάνι αυτό.

562. Να υπολογισθεί η πίεση του νερού σε κατακόρυφη πλάκα ημικυκλικού σχήματος διαμέτρου 6m. Η διάμετρος βρίσκεται στην επιφάνεια του νερού.

563. Να υπολογισθεί η πίεση του νερού επί της επιφανείας σφαίρας διαμέτρου 4m, αν το κέντρο της βρίσκεται σε βάθος 3m από την επιφάνεια του νερού.

564. Να βρεθεί η στατική ροπή και η ροπή αδρανείας της ημιπεριφερείας $y = \sqrt{R^2-x^2}$ $(-R \le x \le R)$ ως προς τον άξονα Ox.

565. Ποιά η ροπή αδρανείας ομογενούς κώνου R βάσεως και H (ύψους) ως πρός τον άξονά του.

5.9. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ GULDIN-ΠΑΠΠΟΥ.

1º ΘΕΩΡΗΜΑ: Το εμβαδό της επιφανείας που παράγεται από την περιστροφή τόξου επιπέδου καμπύλης γύρω από έναν άξονα πού βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με αυτό, από την μιά πλευρά αυτού, ισούται με το γινόμενο του μήκους τόξου που περιστρέφεται, επί το μήκος της περιφερείας που περιγράφει το κέντρο βάρους του.

Απόδειξη:

Το εμβαδό της επιφανείας υπολογίζεται από γνωστό τύπο:

$$P_x = 2\pi \int_L y\,d\ell \qquad (1)$$

το κέντρο βάρους της καμπύλης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\eta = \frac{1}{\ell}\int_L y\,d\ell \qquad (2)$$

Εκ των (1) και (2) έχουμε $\boxed{P_x = 2\pi\eta\ell}$ οπου ℓ είναι το μήκος του περιστρεφομένου τόξου και $2\pi\eta$ το μήκος της περιφερείας που περιγράφει το κέντρο βάρους κατα την περιστροφή του περί τον Ox.

2º ΘΕΩΡΗΜΑ: Ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή επιπέδου σχήματος γύρω από τον άξονα που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με αυτό, από την μιά πλευρά αυτού, ισούται με το γινόμενο του εμβαδού του περιστρεφομένου σχήματος επί το μήκος της περιφερείας που περιγράφει το κέντρο βάρους του.

Απόδειξη

Εχουμε μάθει ότι ο όγκος στερεού εκ περιστροφής υπολογίζεται από τον τύπο:

$$V_x = \pi\int_\alpha^\beta y^2\,dx \qquad (1)$$

και το κέντρο βάρους του επιπέδου σχήματος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\eta = \frac{1}{2S}\int_\alpha^\beta y^2\,dx \qquad (2)$$

από εδώ παίρνουμε:

$$\int y^2\,dx = 2S\eta \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας τήν (3) στήν (1) έχουμε: $V_x = 2\pi\eta S$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

566. Να βρεθεί το κέντρο βάρους ημικυκλίου με ακτίνα R.

Λύση

Επειδή το σχήμα είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα Oy θα έχουμε $\xi=0$.

Για να βρούμε την συντεταγμένη η του ημικυκλίου θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Guldin:

$$V=2\pi S\eta \Rightarrow \eta=\frac{V}{2\pi S}.$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι $S=\frac{1}{2}\pi R^2$, ο δε όγκος του στερεού εκ περιστροφής του ημικυκλίου είναι ο όγκος της σφαίρας που ισούται με

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{και έτσι}$$

$$\eta=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi\cdot\frac{1}{2}\pi R^2}=\frac{4R}{3\pi}$$

567. Να βρεθούν τα εμβαδά των επιφανειών και οι όγκοι των στερεών που παράγονται από την περιστροφή του κύκλου $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\leq R^2$ γύρω από τους άξονες Ox και Oy $(\alpha\geq R, \beta\geq R)$.

Λύση

Οταν το σχήμα αυτό στρέφεται περί τον Ox τότε το κ.β. του κύκλου (α,β) απέχει από τον άξονα Ox κατά β, συνεπώς σύμφωνα με το α' θεώρημα Guldin έχουμε $(\ell=2\pi R)$: $P_x=2\pi R\cdot 2\pi\beta=4\pi^2R\beta$. όπου S το εμβαδό του περιστρεφομένου σχήματος και $2\pi\eta$ το μήκος της περιφερείας που περιγράφει το κ.β. του κατά την περιστροφή του περί τον Ox.

Σύμφωνα με το δεύτερο θεώρημα έχουμε $(S=\pi R^2)$: $V_x=\pi R^2\cdot 2\pi\beta = 2\pi^2R^2\beta$. Αν το σχήμα στρέφεται περί τον Oy, τότε το κ.β. απέχει απόσταση α από τον άξονα Oy και άρα

$$P_y=4\pi^2R\alpha \Rightarrow V_y=2\pi^2R^2\alpha.$$

5.1α ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Για τον υπολογισμό, κατά προσέγγιση, ορισμένων ολοκληρωμάτων υπάρχουν διάφοροι τρόποι. Αν η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται με κάποιο τύπο ή πίνακα, τότε η κατά προσέγγιση τιμή του ολοκληρώματος $\int f(x)\,dx$ μπορεί να βρεθεί με τον εξής τρόπο:

1. Χωρίζεται (διαμερίζεται) το διάστημα ολοκληρώσεως $[\alpha,\beta]$ με τα σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ σε n ίσα μέρη με: $h=\dfrac{\beta-\alpha}{n}$.

2. Υπολογίζεται η τιμή της συναρτήσεως $y=f(x)$ στα σημεία διαμερίσεως: $y_0=f(\alpha)$, $y_1=f(x_1)$, $\ldots$, $y_{n-1}=f(x_{n-1})=f(\beta)$

3. Εφαρμόζεται ένας από τους προσεγγιστικούς τύπους.

Οι πιό εύχρηστοι προσεγγιστικοί τύποι είναι οι παρακάτω πού έχουν την αρχή τους στην γεωμετρική παρουσίαση του ορισμένου ολοκληρώματος σαν εμβαδόν καμπυλόγραμμου τραπεζίου.

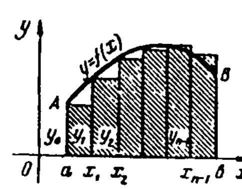
I. ΤΥΠΟΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ

$$\int_\alpha^\beta y\,dy \approx h(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}) = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i \qquad (1)$$

ή

$$\int_\alpha^\beta y\,dy \approx h(y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n) = h\sum_{i=1}^{n} y \qquad (1')$$

Με τους τύπους (1) και (1′) το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τραπεζίου αΑΒβ που αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, αντικαθίσταται με το άθροισμα των εμβαδών των γραμμοσκιασμένων ορθογωνίων του σχήματος.



Το σφάλμα του τύπου των ορθογωνίων είναι

$$\delta(n) \leq \frac{(\beta-\alpha)^2}{2n}\, y'_{max}$$

όπου y'_{max} είναι η μέγιστη τιμή $|y'|$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

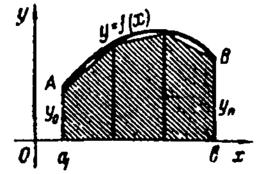
II. ΤΥΠΟΣ ΤΡΑΠΕΖΙΩΝ

$$\int_\alpha^\beta y\,dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right) = h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) \qquad (2)$$

Ο τύπος (2) από γεωμετρικής απόψεως αντικαθιστά το εμβαδόν καμπυλόγραμμου τραπεζίου με το άθροισμα των εμβαδών των γραμμοσκιασμένων τραπεζίων του σχήματος.

Το σφάλμα του τύπου τραπεζίων είναι

$$\delta(n) \le \frac{(\beta-\alpha)^2}{12n^2}\, y''_{max}$$



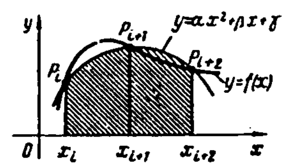
όπου y''_{max} είναι η μέγιστη τιμή $|y''|$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

III. ΤΥΠΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΟΕΙΔΩΝ ΤΡΑΠΕΖΙΩΝ (Simpson).

$$\int_\alpha^\beta y\,dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0+y_n+4(y_1+y_3+\dots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\dots y_{n-2})\right) \qquad (3)$$

όπου n είναι άρτιος.

Με τον τύπο (3) το εμβαδόν κάθε ζεύγους κατακορύφων τραπεζίων $x_i P_i P_{i+1} x_{i+1}$ αντικαθίσταται με το εμβαδόν του αντιστοίχου παραβολοειδούς τραπεζίου που σχηματίζεται με την αντικατάσταση του αντιστοίχου τμήματος της καμπύλης $y=f(x)$ με το τόξο της παραβολής $y=ax^2+\beta x+\gamma$, που διέρχεται από τρία σημεία P_i, P_{i+1}, P_{i+2} όπως φαίνεται στο σχήμα.



Το σφάλμα του τύπου (3) είναι

$$\delta \le \frac{(\beta-\alpha)^5}{180n^4}\, y^{(4)}_{max}$$

όπου $y^{(4)}_{max}$ είναι η μέγιστη τιμή της $|y^{(4)}|$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Παρατήρηση: Οι προσεγγιστικοί τύποι (1), (1′), (2), (3) είναι τόσο ακριβέστεροι όσο μεγαλύτερο είναι το n. Συνεπώς για αρκετά μεγάλο n, καθένας από τους παραπάνω τύπους μπορεί να ορίσει την τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος με όποια ακρίβεια θέλουμε. Για την ίδια τιμή του n, συνήθως ο τύπος (2) είναι ακριβέστερος του (1) και ο (3) ακριβέστερος του (2)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

568. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx$ ακριβώς, με τούς προσεγγιστικούς τύπους ορθογωνίων, τραπεζίων και Simpson, διαμερίζοντας το διάστημα $[1, 9]$ σε 8 ίσα μέρη. Μετά να εκτιμηθεί σε ποσοστά το σφάλμα των αποτελεσμάτων πού πήραμε με τούς προσεγγιστικούς τύπους.

Λύση

Έχουμε $\int_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx = \frac{1}{6}\int_1^9 (6x-5)^{\frac{1}{2}} d(6x-5) = \frac{1}{6}\left.\frac{(6x-5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^9 = 38$.

Διαιρούμε το διάστημα $[1,9]$ σε 8 ίσα μέρη και σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα:

$x_0 = 1$	$y_0 = \sqrt{1} = 1,0000$
$x_1 = 2$	$y_1 = \sqrt{7} = 2,6458$
$x_2 = 3$	$y_2 = \sqrt{13} = 3,6056$
$x_3 = 4$	$y_3 = \sqrt{19} = 4,3589$
$x_4 = 5$	$y_4 = \sqrt{25} = 5,0000$
$x_5 = 6$	$y_5 = \sqrt{31} = 5,5678$
$x_6 = 7$	$y_6 = \sqrt{37} = 6,0828$
$x_7 = 8$	$y_7 = \sqrt{43} = 6,5574$
$x_8 = 9$	$y_8 = \sqrt{49} = 7,0000.$

Έχουμε επίσης $h = \frac{9-1}{8} = 1$

Από τον τύπο (1) έχουμε $\int_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx \approx 34,8183$

Το απόλυτο σφάλμα είναι: $|38 - 34,8183| = 3,1817$

Το σχετικό σφάλμα είναι $\delta = \frac{100\,3,1817}{38}\,\% \approx 8,37\%$

Από τον τύπο (1') έχουμε $\int_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx \approx 40,8183$

Το απόλυτο σφάλμα είναι $|38 - 40,8183| = 2,8183$

και τό σχετικό $\delta = \frac{100\cdot 2,8183}{38}\,\% \approx 7,42\%$

Από τον τύπο (2) έχουμε $\int_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx \approx 37,8133$

Τό απόλυτο σφάλμα είναι $|38 - 37,8133| \approx 0,1817$

και το σχετικό $\delta = \frac{0,1817\cdot 100}{38}\,\% \approx 0,48\%$

Από τον τύπο (3) έχουμε:

$$\int_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx \approx \frac{1}{3}\left(8+4\cdot 19{,}1299+2\cdot 146884\right) \approx 37{,}9655$$

Το απόλυτο σφάλμα είναι: $|38-37{,}9655| = 0{,}0345$

και το σχετικό : $\delta = \dfrac{0{,}0345\cdot 100}{38}\,\% \approx 0{,}09\,\%$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

569. Να υπολογισθεί με τους τρεις τύπους το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2 \approx 0{,}6932$. Να βρεθεί το απόλυτο και σχετικό σφάλμα.

570. Να υπολογισθεί με τον τύπο (3) το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

571. Να υπολογισθεί με τον τύπο (3) το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\ln x}$ $(n=10)$.

6. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

6.1. **ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ:** Η μαθηματική στατιστική είναι ένας τομέας των μαθηματικών που αφιερώνεται σε μαθηματικές μεθόδους συστηματοποιήσεως, επεξεργασίας και χρησιμοποιήσεως των στατιστικών δεδομένων για επιστημονικά και πρακτικά συμπεράσματα.

Στατιστικά δεδομένα ονομάζονται οι πληροφορίες για τον αριθμό των στοιχείων ενός ορισμένου συνόλου ως προς μια ή περισσότερες μεταβλητές ιδιότητες.

Αν εξετάσουμε τα στοιχεία ενός ορισμένου συνόλου Π ως προς μια μεταβλητή ιδιότητα τους, τότε

— Το σύνολο Π ονομάζεται στατιστικός πληθυσμός ή απλώς πληθυσμός.

— Οι πληροφορίες ή μετρήσεις που προκύπτουν από την εξέταση (πείραμα) των στοιχείων του Π ονομάζονται παρατηρήσεις (ή στατιστικά στοιχεία ή στατιστικά ευρήματα).

Ας υποθέσουμε ότι εξετάζουμε τις οικογένειες μιας πολυκατοικίας σχετικά με τον αριθμό των παιδιών τους και από την εξέταση αυτή προκύπτουν οι αριθμοί 1, 2, 1, 0, 1, 3, 0, 4, ... που καθένας τους δηλώνει τον αριθμό των παιδιών μιας οικογένειας. Το σύνολο των οικογενειών της πολυκατοικίας είναι ο «πληθυσμός», ενώ κάθε οικογένεια αποτελεί ένα «άτομο» του πληθυσμού. Οι αριθμοί 1, 2, 1, ... αποτελούν τις «παρατηρήσεις». Η μεταβλητή X είναι τώρα «ο αριθμός των παιδιών της οικογένειας» που μπορεί να μετρηθεί.

Μια ιδιότητα που μπορεί να μετρηθεί ονομάζεται ποσοτική μεταβλητή ή απλώς μεταβλητή. Οι παρατηρήσεις μας ονομάζονται τιμές της μεταβλητής.

Μια τέτοια μεταβλητή ονομάζεται

— ασυνεχής, όταν παίρνει μεμονωμένες τιμές,

— συνεχής, όταν μπορεί να πάρει κάθε τιμή (τουλάχιστο θεωρητικά) ενός αριθμητικού διαστήματος (α,β)

6.2. ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΔΙΑΛΟΓΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ.

Αν εξετάσουμε όλα τά άτομα του πληθυσμού, τότε λέμε ότι κάναμε απογραφή του πληθυσμού. π.χ. «έγινε απογραφή των βιοτεχνιών της περιοχής Αθήνας» θά πει ότι εξετάσθηκαν όλες οι βιοτεχνίες ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές ιδιότητες. Οι απογραφές όμως μεγάλων πληθυσμών απαιτούν πολλά έξοδα καί πολύ χρόνο, υπάρχουν δε καί πληθυσμοί πού δέν μπορούν νά απογραφούν, π.χ. "1.000 λαμπτήρες νά εξετασθούν ως προς την διάρκεια ζωής τους", γιατί χρειάζεται να περιμένουμε να καταστραφούν.

Γι' αυτό καταφεύγουμε στην εξέταση ενός υποσυνόλου του πληθυσμού. Τό υποσύνολο αυτό ονομάζεται δείγμα και η διαδικασία αυτή δειγματοληψία.

Γιά νά εξετάσουμε την διάρκεια της ζωής π.χ. των 1.000 λαμπτήρων δοκιμάζουμε π.χ. 20. Αν 10 απ' αυτούς έχουν διάρκεια ζωής μεγαλύτερη από 800 ώρες, ο καθένας, τότε παραδεχόμεθα ότι οι μισοί περίπου από τούς 1.000 λαμπτήρες έχουν διάρκεια ζωής μεγαλύτερη από 800 ώρες.

Βλέπουμε δηλαδή ότι τά συμπεράσματα πού βγαίνουν από την εξέταση ενός δείγματος, τά μεταφέρουμε σέ ολόκληρο τόν πληθυσμό μας. Όσο μεγαλύτερο είναι το δείγμα τόσο μεγαλύτερος είναι ο «βαθμός αξιοπιστίας» της μεταφοράς αυτής.

Η επιλογή πάντως του δείγματος δέν είναι εύκολη υπόθεση γιατί το δείγμα αυτό πρέπει νά είναι «αντιπροσωπευτικό», υπάρχουν δέ ειδικοί τρόποι για την αντιμετώπιση της επιλογής.

Ας πάρουμε τό παράδειγμα της μελέτης των οικογενειών μιας πολυκατοικίας καί ας υποθέσουμε ότι, αριθμίζοντας τίς οικογένειες με νούμερα, βρήκαμε:

Η m_1 έχει 1 παιδί, η m_2 έχει 2 παιδιά, η m_3 έχει 1 παιδί, η m_4 έχει 0 παιδιά, η m_5 έχει 2 παιδιά, η m_6 έχει 3 παιδιά, η m_7 έχει 1 παιδί, η

Τα μέσα των διαστημάτων (a_{k-1}, a_k) συμβολίζονται με $\tilde{x}_k$ και θεωρούνται τιμή της x πού επαναλαμβάνεται m_k φορές. Ύστερα απ' αυτό κάνουμε τον παρακάτω πίνακα·

$\tilde{x}$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	......	$\tilde{x}_k$	.	$\tilde{x}_\lambda$
m	m_1	m_2	......	m_k		m_λ
P	P_1	P_2	......	P_k	..	P_λ

<u>Παράδειγμα 1:</u> Έστω ότι ο ερευνητής της παραγωγικότητας μιας αυτόματης μονάδας στην διάρκεια του περασμένου χρόνου σε σχέση με αυτή του προηγουμένου χρόνου, πήρε τα παρακάτω αποτελέσματα επί τοις εκατό (%) για 117 αυτόματες μονάδες:

111, 85, 85, 91, 104, 109, 86, 102, 111, 98, 105, 85, 112, 98, 112, 113, 87, 109, 109, 115, 99, 105, 111, 94, 107, 99, 107, 125, 89, 104, 113, 96, 103, 145, 104, 105, 88, 103, 97, 115, 109, 89, 108, 107, 97, 106, 107, 96, 109, 116, 109, 117, 108, 109, 139, 116, 117, 103, 127, 119, 118, 125, 105, 116, 117, 106, 101, 113, 107, 105, 119, 107, 119, 111, 112, 129, 113, 106, 104, 106, 98, 123, 108, 93, 105, 106, 139, 108, 109, 93, 107, 117, 107, 118, 99, 108, 108, 119, 98, 108, 101, 109, 109, 128, 128, 127, 121, 118, 122, 116, 124, 125, 114, 126, 131, 143, 141.

Να ομαδοποιήσετε και να γράψετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων.

<u>Λύση:</u>

Φυσικά, εδώ χρειάζεται να χωρίσουμε το διάστημα (80, 150) σε μικρότερα διαστήματα. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι τα διαστήματα θα είναι ανά 10. Οπότε θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

Παραγωγικότητα μιάς αυτόματης μονάδας X_k	Ποσότητα αυτομάτων μονάδων m_k	Σχετική συχνότητα $\frac{m_k}{n} = f_k$	Αθροιστική συχνότητα	Σχετική αθροιστική συχνότητα
80-90	8	$\frac{8}{117} = 0,068$	8	$\frac{8}{117} = 0,060$
90-100	15	$\frac{15}{117} = 0,128$	23	$\frac{23}{117} = 0,196$
100-110	46	$\frac{46}{117} = 0,393$	69	$\frac{69}{117} = 0,590$
110-120	29	$\frac{29}{117} = 0,248$	98	$\frac{98}{117} = 0,838$
120-130	13	$\frac{13}{117} = 0,111$	111	$\frac{111}{117} = 0,949$
130-140	3	$\frac{3}{117} = 0,026$	114	$\frac{114}{117} = 0,974$
140-150	3	$\frac{3}{117} = 0,026$	117	$\frac{117}{117} = 1$
Σύνολο	117	1		

6.3. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

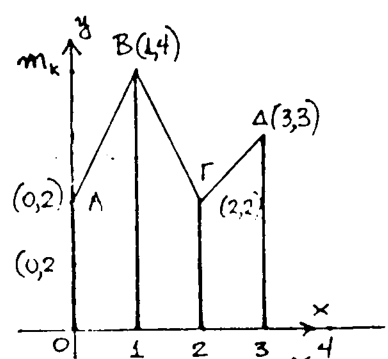
Η γραφική παράσταση της κατανομής συχνοτήτων (ή σχετικών συχνοτήτων) γίνεται σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, όπου στον άξονα OX τοποθετούμε τις τιμές της μεταβλητής και στον άξονα OY τις συχνότητές τους.

Οι πιο συχνές γραφικές παραστάσεις των κατανομών συχνοτήτων (ή σχετικών συχνοτήτων) είναι το <u>πολύγωνο συχνοτήτων</u> και το <u>ιστόγραμμα</u>.

Θα δείξουμε παρακάτω με τα παραδείγματα πως κατασκευάζονται αυτές οι γραφικές παραστάσεις:

<u>Παράδειγμα 1</u>: Ας πάρουμε σαν παράδειγμα τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον πίνακα της σελίδας 57:

Αριθμός παιδιών X_k	Οικογένειες m_k
0	2
1	4
2	2
3	3



Σχ. 17

Τό σχημα 17 του παραδείγματος παριστάνει την γραφική παράσταση της κατανομής συχνοτήτων. Η τεθλασμένη γραμμή που ενώνει τά σημεια Α, Β, Γ καί Δ είναι τό πολύγωνο συχνοτήτων, ενώ τά ευθύγραμμα τμήματα που παριστάνουν τις τεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ καί Δ αποτελούν το διάγραμμα συχνοτήτων.

Κατασκευάζουμε τωρα τον πίνακα κατανομής των σχετικων συχνοτήτων:

Εχουμε $n = 2+4+2+3 = 11$ και $p_1 = \frac{m_1}{n} = \frac{2}{11} \approx 0,182$

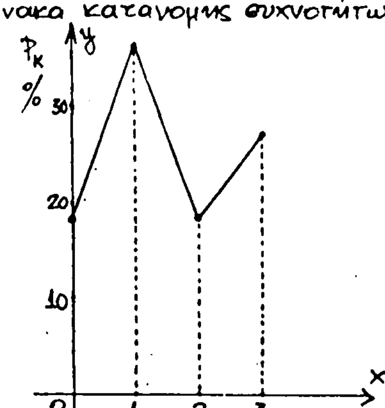
$p_2 = \frac{m_2}{n} = \frac{4}{11} \approx 0,364$, $p_3 = \frac{2}{11} \approx 0,182$, $p_4 = \frac{3}{11} \approx 0,273$

Συνήθως οι σχετικές συχνότητες εκφράζονται με τα 100πλάσια τους, δηλαδή με ποσοστά επί τοις εκατό. Ετσι οι παραπάνω σχετικές συχνότητες γράφονται αντίστοιχα:

$0,182 = 18,2\%$, $0,364 = 36,4\%$, $0,182 = 18,2\%$, $0,273 = 27,3\%$.

Τότε εχουμε τόν παρακάτω πίνακα κατανομής συχνοτήτων καί στό διπλανό σχημα 18 το πολύγωνο των σχετικων συχνοτήτων.

Αριθμός παιδιών x_k	Οικογένειες % p_k
0	18,2
1	36,4
2	18,2
3	27,3
	≈100



Σχ. 18

Παράδειγμα 2: Ας εξετάσουμε τώρα το παράδειγμα 1 της §2.

Γιά τις κατανομές συχνοτήτων πού είναι χωρισμένες σε μικρά διαστήματα κατασκευάζουμε ιστόγραμμα.

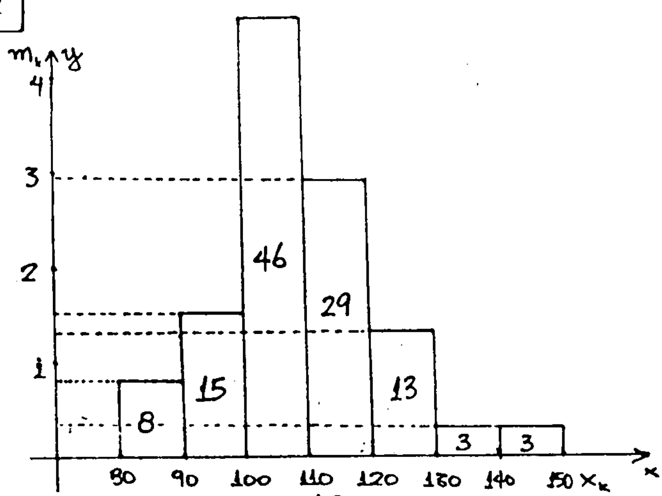
Το ιστόγραμμα γενικά κατασκευάζεται ως εξής:

Στόν αξονα Ox μέ βάση το τμημα $[a_{k-1}, a_k]$ σχηματίζουμε ορθογώνιο που εχει εμβαδό ισο μέ P_k η m_k, δηλαδή $E_k = m_k \Longrightarrow$

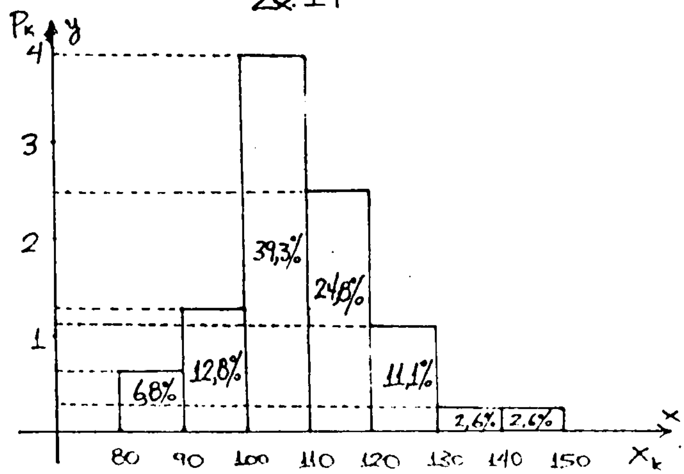
$[a_{k-1}, a_k] \cdot h_k = m_k \Longrightarrow h_k = \frac{m_k}{[a_{k-1}, a_k]}$, οπου h_k ειναι τό υψος.

Γράφουμε τώρα τόν πίνακα τοῦ παραδείγματος 1 §2 στην ἑξῆς μορφή:

Παραγωγικότητα x	Ποσότητα αὐτομάτων μονάδων m_k		Σχετική συχνότητα P_k	
80-90	8	$h_1=\frac{8}{10}=0{,}8$	6,8%	$h_1=\frac{6{,}8}{10}=0{,}68$
90-100	15	$h_2=1{,}5$	12,8%	$h_2=1{,}28$
100-110	46	$h_3=4{,}6$	39,3%	$h_3=3{,}93$
110-120	29	$h_4=2{,}9$	24,8%	$h_4=2{,}48$
120-130	13	$h_5=1{,}3$	11,1%	$h_5=1{,}11$
130-140	3	$h_6=0{,}3$	2,6%	$h_6=0{,}26$
140-150	3	$h_7=0{,}3$	2,6%	$h_7=0{,}26$
	117			



Σχ. 19



Σχ. 20

Τά σχήματα 19 και 20 είναι το "ιστόγραμμα συχνότητας" και το "ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων" της κατανομής αυτής.

6.4. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΜΙΑΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Όπως είπαμε και προηγουμένως, η στατιστική σκοπεύει από τις πληροφορίες ενός πληθυσμού ή ενός δείγματος νά καταλήξει σέ συγκεκριμένα συμπεράσματα για τις νομοτέλειες πού διέπουν αυτόν τον πληθυσμό ή το δείγμα. Οι γραφικές παραστάσεις και ο πίνακας κατανομής έχουν βέβαια μεγάλη πρακτική σημασία, αλλά ένα αποτέλεσμα εκφραζόμενο μέ αριθμό θα μας έδινε σαφέστερες πληροφορίες. Γι' αυτό εισάγονται στην στατιστική οι λεγόμενες χαρακτηριστικές τιμές.

1. Μέση τιμή:

Έστω ότι η μεταβλητή X λαμβάνει τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ και παρουσιάζει συχνότητες αντίστοιχα $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Τότε μέση τιμή είναι:

$$\bar{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n}{h} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\bar{X} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{h}} \qquad (32)$$

Αν $m_1 = m_2 = \cdots = m_n$, έχουμε τόν γνωστό αριθμητικό μέσο:

$$\boxed{\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}} \qquad (33)$$

Αν η μεταβλητή είναι συνεχής ή εξετάζονται παρατηρήσεις μιας ασυνεχούς μεταβλητής σε διαστήματα, τότε:

$$\boxed{\bar{X} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \tilde{X}_k m_k}{n}} \qquad (34)$$

όπου $\tilde{X}_k$ είναι τό μέσο του τμήματος $[a_{k-1}, a_k]$

2. Διάμεσος τιμή. Επικρατούσα τιμή:

Αν οι $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι τιμές μιας μεταβλητής ταξινομημένες κατ' αυξανόμενο μέγεθος σ' ένα πλήθυσμό μέ n στοιχεία, τότε <u>διάμεσος τιμή</u> αυτής της μεταβλητής ονομάζεται η τιμή πού είναι στη μέση τών παραπάνω ταξινομημένων τιμών.

Εστω ότι έχουμε περιττό αριθμό παρατηρήσεων, δηλαδή $n=2q-1$. Τότε οι ταξινομημένες κατ' αυξανόμενο μέγεθος παρατηρήσεις είναι:

$x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(q-1)}, x_{(q)}, x_{(q+1)}, \ldots, x_{(n)}$. Οπου μέ $x_{(i)}$ συμβολίζεται η τιμή της μεταβλητής που έχει τήν $i^{η}$ θέση στην ταξινομημένη σειρά. Στη μέση αύτης της σειρας είναι η τιμή $x_{(q)}$. Αρα:

$\tilde{M}=x_{(q)}$ οπου μέ $\tilde{M}$ συμβολίζεται η διάμεσος.

Αν ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι αρτιος, δηλαδή $n=2q$, τότε η <u>διάμεσος</u> υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\boxed{\tilde{M}=\frac{x_{(q)}+x_{(q+1)}}{2}}$$

Για παρατηρήσεις που εξετάζονται κατά διαστήματα υπάρχει σύνθετος τύπος που δέν τόν εξετάζουμε εδω.

<u>Επικρατούσα τιμή</u> ονομάζεται εκείνη πού ανάμεσα σε όλες τις εμφανιζόμενες τιμές της μεταβλητής μας, παρουσιάζει τήν μεγαλύτερη συχνότητα.

Η επικρατούσα τιμή και η διάμεσος ονομάζονται <u>δομικές τιμές</u> των κατανομών.

3. Διακύμανση κατανομής (διασπορά) - Τυπική απόκλιση.

Εστω ότι έχουμε το σύνολο n παρατηρήσεων η μετρήσεων όπου η τιμή x_1 επαναλαμβάνεται m_1 φορές, η x_2 επαναλαμβάνεται m_2 φορές κ.λ.π., η x_n επαναλαμβάνεται m_n φορές. Εχουμε δηλαδή τόν πίνακα:

Συχνότητα m_i	m_1	m_2	. . . . . .	m_n
Τιμή x x_i	x_1	x_2	. . . . . .	x_n

Αν η μέση τιμή είναι:

$$\boxed{\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k m_k}$$

δώσει όλα τά στοιχεία για τόν υπολογισμό αυν $\bar{x}$ και S και την κατασκευή του ιστογράμματος

Πίνακας κατανομής

Υψος σε cm x_k	Μεσο $\tilde{x}_k$	Μαθητες m_k	$\tilde{x}_k m_k$	$\tilde{x}_k^2$	$\tilde{x}_k^2 m_k$
155-159	157	4	628	394.384	1.577.536
159-163	163	6	966	933.155	5.598.930
163-167	167	10	1.150	2.722.500	27.225.000
167-171	169	13	2.197	4.826.809	62.748.517
171-175	173	22	3.806	14.485.636	318.684.192
175-179	177	10	1.770	3.132.900	313.229.000
179-183	181	5	905	819.025	4.095.125
183-187	185	7	1.295	1.677.025	11.739.175
187-191	189	3	567	321.489	964.467
Σ		80	13784		463.955.848

Υπενθυμίζεται οτι $\tilde{x}_k = \frac{[a_{k-1}, a_k]}{2}$, που ονομάζεται μέσο η κεντρική τιμή του διαστήματος.

Ετσι τώρα εχουμε: $\bar{x} = \frac{13784}{80} = 172,3$

$$S^2 = \frac{463.955.842}{80} - (172,3)^2 \Longrightarrow$$

$$S^2 \approx 5.799.448 - 26.687,29 \approx 5.769.760$$

Αρα τυπική απόκλιση $S = \sqrt{5.769.760} \approx 2.402$.

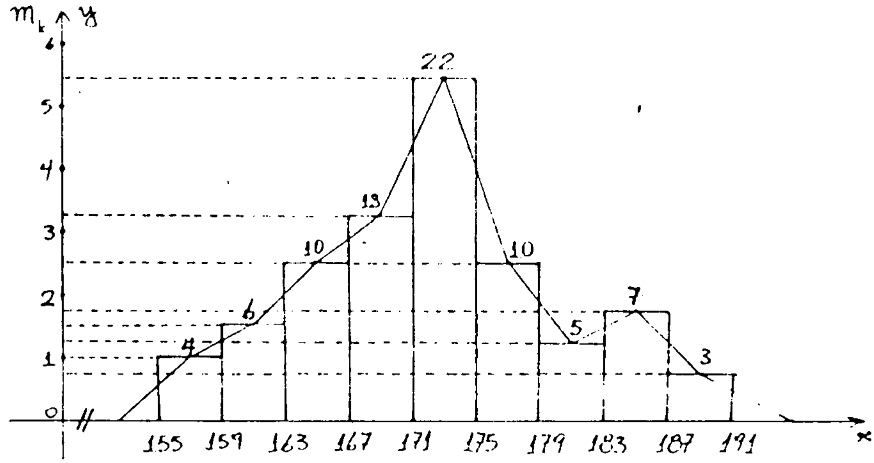
Για την κατασκευή του ιστογράμματος βρίσκουμε τα υψη των ορθογωνίων που εχουν βάση το μηκος των υποδιαστημάτων και εμβαδό την συχνότητα που αντιστοιχει σ' αυτά, δηλαδή

$h_k = \frac{m_k}{[a_{k-1}, a_k]}$. Ετσι εχουμε:

$h_1 = \frac{4}{4} = 1$, $h_2 = \frac{6}{4} = 1,5$, $h_3 = \frac{10}{4} = 2,5$, $h_4 = \frac{13}{4} = 3,25$, $h_5 = \frac{22}{4} = 5,5$,

$h_6 = \frac{10}{4} = 2,5$, $h_7 = \frac{5}{4} = 1,25$, $h_8 = \frac{7}{4} = 1,75$, $h_9 = \frac{3}{4} = 0,75$

Τό επόμενο σχήμα είναι τό "ιστόγραμμα συχνοτήτων,,



Σχ 21

Η τεθλασμένη γραμμή που διέρχεται από τα μέσα των επάνω βάσεων των ορθογωνίων είναι τό πολύγωνο συχνοτήτων

573. Σαν αποτέλεσμα κάποιου πειράματος έλαβαμε τα παρα κάτω στοιχεία (παρατηρήσεις):

Τιμές $x_κ$	-2	0	1	2	3	5	7
Συχνότητες $m_κ$	4	5	7	8	6	2	1

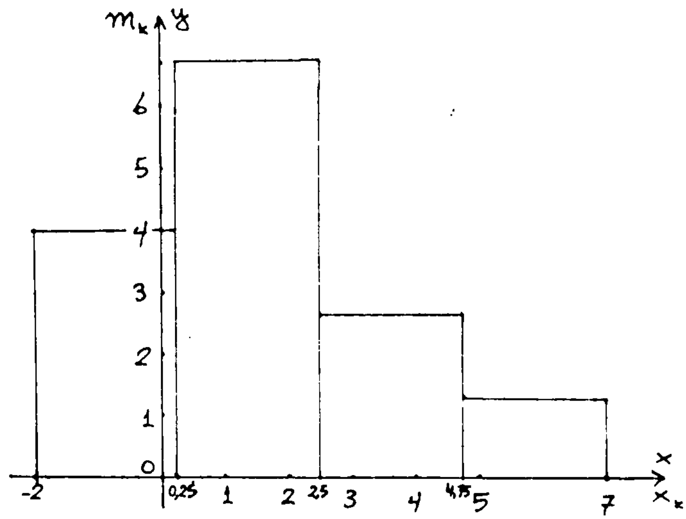
Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων και να βρείτε την μέση τιμή, την τυπική απόκλιση, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή

Λύση:

Για να κατασκευάσουμε το ιστόγραμμα παίρνουμε το μήκος του διαστήματος από το −2 μέχρι το 7 πού είναι 9 και το διαιρούμε δια του 4

Ετσι έχουμε τα υποδιαστήματα και τις συχνότητες στον παρακάτω πίνακα·

Τιμές x_κ	m_κ	$h_\kappa=\frac{m_\kappa}{2,25}$
-2 - 0,25	9	4
0,25 - 2,5	15	6,67
2,5 - 4,75	6	2,67
4,75 - 7	3	1,3



Σχ. 22

Με βάση τον πίνακα κατασκευάσαμε το ιστόγραμμα.

Κάνουμε τωρα εναν πίνακα ακόμη για να διευκολυνθούμε στον υπολογισμό της μέσης τιμης και της τυπικης αποκλίσεως.

x_κ	m_κ	$x_\kappa m_\kappa$	$x_\kappa-\bar{x}$	$(x_\kappa-\bar{x})^2$	$(x_\kappa-\bar{x})^2 m_\kappa$
-2	4	-8	-0,5	0,25	1
0	5	0	-1,5	2,25	11,25
1	7	7	0,5	0,25	1,75
2	8	16	0,5	0,25	2
3	6	18	1,5	2,25	13,5
5	2	10	3,5	12,25	24,5
7	1	7	5,5	30,25	30,25
Σ	33	50			84,25

$$\bar{x}=\frac{\sum x_\kappa m_\kappa}{n}=\frac{50}{33}=1,5.$$

Εφαρμόζουμε τωρα τον τυπο (35):

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x-\bar{x})^2 m_\kappa=\frac{84,25}{33}=2,55 \Rightarrow s=\sqrt{2,55}\approx 1,6$$

Ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι $n = 7 = 2q - 1$,

$q = 4 \Rightarrow n = 2 \cdot 4 - 1$

Συνεπώς η διάμεσος είναι: $\tilde{M}_{(4)} = 2$

Όπως ξέρουμε η επικρατούσα τιμή είναι αυτή πού αντιστοιχεί στόν μεγαλύτερο αριθμό συχνοτήτων, δηλαδή εδώ είναι $\tilde{M}_o = 2$, όπου $\tilde{M}_o$ είναι η επικρατούσα τιμή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

574. Να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων του διπλανού πίνακα, ο οποίος παρουσιάζει την διάρκεια ζωής των λαμπτήρων που κατασκευάζει ένα εργοστάσιο.

(ΑΠ.: $\bar{x} = 859,73$, $s = 68,47$).

ΩΡΕΣ	ΛΑΜΠΤΗΡΕΣ
700-750	20
750-800	56
800-850	100
850-900	92
900-950	68
950-1000	44
	380

575. Σε μια πόλη μετρήσαμε την μεγίστη θερμοκρασία επί 30 συνεχείς μηέρες και βρήκαμε:

18, 21, 21, 19, 23, 19, 25, 27, 24, 23, 20, 21, 24, 19, 23, 16, 15, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 27, 29, 28, 25, 26, 26, 24.

Νά βρεθεί η διάμεσος και η τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών αυτών. Νά κατασκευασθεί τό ιστόγραμμα (ΑΠ.: Διαμ. = 23 , $s = 3,56$).

576 ένα κατάστημα πούλησε σέ μιά ημέρα 45 ζεύγη υποδημάτων με διαστάσεις:

39, 41, 40, 42, 41, 40, 42, 44, 40, 43, 42, 41, 43, 39, 42, 41, 42, 39, 41, 37, 43, 41, 38, 43, 42, 41, 40, 41, 38, 44, 40, 39, 41, 40, 42, 40, 41, 42, 40, 43, 38, 39, 41, 41, 42.

Να υπολογισθούν η μέση τιμή, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή.

(ΑΠ.: $\bar{x} = 41,1$, $\tilde{M}_o = 41$, $\tilde{M} = 40$).

577. Σтόν παρακάτω πίνακα δίδεται η κατανομή του πληθυσμού

μιας Αφρικανικής χώρας κατά ηλικία:

Ομάδες κατά ηλικία	μέχρι 7 ετών	8-11	12-14	15-19	20-29	30-39	40-49	50-59	πάνω από 60
Αριθμός ατόμων ανά ομάδα επί τοις %	18,6	9,7	7,9	8,9	18,0	14,9	9,0	6,4	6,6

Να κατασκευασθεί το ιστόγραμμα, να βρεθεί η μέση ηλικία και η τυπική απόκλιση. (ΑΠ.: $\bar{x} = 25,4$, $s = 18,3$).

578. Δίδεται η κατανομή της περιεκτικότητας ασημιού σε μέταλλο (γραμμάριο ανά χιλιόγραμμο):

Περιεκτικότητα ασημιού	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28	28-32	32-36	36-40
Συχνότητα	188	75	44	24	13	8	6	5	1	1

Να κατασκευασθεί το ιστόγραμμα και να υπολογισθεί η μέση τιμή.
(ΑΠ.: $\bar{x} = 6,9$ gr.).

Ο παρακάτω πίνακας έχει 50 τιμές που είναι αποτελέσματα μετρήσεων ενός μεγέθους:

4,8, 4,7, 5,3, 5,2, 5,3, 4,7, 5,0, 5,1, 4,7, 5,0,
5,0, 4,8, 5,1, 5,0, 4,8, 5,2, 5,2, 5,3, 5,0, 4,9,
5,1, 4,9, 4,9, 5,1, 4,8, 5,0, 4,9, 4,9, 5,1, 4,8,
5,2, 4,7, 5,0, 4,8, 5,0, 4,8, 5,0, 5,0, 5,3, 5,0,
4,9, 5,1, 5,1, 5,0, 5,0, 5,1, 5,1, 5,2, 4,9, 5,1.

Να υπολογισθεί η μέση τιμή, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή. Να κατασκευασθεί το ιστόγραμμα. (ΑΠ.: $\bar{x} = 5,0$, $\tilde{M}_o = 5,0$, $\tilde{M} = 4,95$).

579. Ο παρακάτω πίνακας έχει πληροφορίες για την ηλικία 54 μαθητών της Β' τάξεως Λυκείου:

17, 17, 18, 17, 18, 17, 19, 17, 20, 19, 17, 18, 20, 18,
17, 20, 21, 20, 17, 18, 22, 18, 17, 18, 19, 17, 22, 19,
21, 19, 21, 18, 17, 21, 21, 17, 19, 19, 20, 17 18, 19,
19, 17, 18, 19, 17, 20, 17, 18, 18, 18, 20, 17.

Να υπολογισθεί η μέση τιμή και η διασπορά. (ΑΠ.: $\bar{x} = 18,5$, $s = 1,26$).

7. ΠΙΝΑΚΕΣ - ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

7.1. Έννοια του πίνακα.

Ας εξετάσουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$\begin{aligned} a_1 x + \beta_1 y &= \gamma_1 \\ a_2 x + \beta_2 y &= \gamma_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Το σύστημα αυτό λέγεται γραμμικό και ορίζεται πλήρως αν είναι δεδομένοι οι αριθμοί a_1, β_1, a_2 β_2, που ονομάζονται συντελεστές των αγνώστων (μεταβλητών) x, y.

Γράφοντας τους τέσσερις αριθμούς $a_1, \beta_1, a_2, \beta_2$ στη διάταξη που είναι γραμμένοι στο σύστημα (1) θα έχουμε:

$$\begin{matrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{matrix}$$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Το σχήμα με τους παραπάνω αριθμούς σε ορισμένη διάταξη θα το ονομάσουμε <u>πίνακα</u> δεύτερης τάξης και θα τον συμβολίσουμε με

$$A = \left| \begin{matrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{matrix} \right| \qquad \text{ή} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας Α έχει 4 αριθμούς που λέγονται στοιχεία του πίνακα, δύο γραμμές και δύο στήλες:

$$\begin{matrix} \mathrm{I} \rightarrow & a_1 & \beta_1 \\ \mathrm{II} \rightarrow & a_2 & \beta_2 \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \\ \uparrow & \uparrow \\ \mathrm{I} & \mathrm{II} \end{matrix}$$

Στο σύστημα (1) υπάρχουν και οι αριθμοί γ γ που λέγονται ελεύθεροι όροι του συστήματος που έχουν και αυτοί την σημασία τους, συνεπώς μπορούμε να γράψουμε τους πίνακες:

$$B = \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \quad \Gamma = \begin{vmatrix} a_1 & \gamma_1 \\ a_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}$$

Ο πίνακας B έχει 6 στοιχεία και αποτελείται από 2 γραμμές και 3 στήλες και λέγεται πίνακας 2×3

Γενικώτερα δίνουμε τον εξής ορισμό του πίνακα:

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: <u>*Πίνακας $\nu \times \mu$*</u> λέγεται κάθε ορθογώνια διάταξη $\nu \cdot \mu$ αριθμών (ή άλλων μαθηματικών εννοιών) σε ν γραμμές και μ στήλες, και συμβολίζεται με

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1j} \cdots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & a_{i\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & a_{\nu j} & a_{\nu\mu} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

ή απλούστερα $A = \left[a_{ij}\right]$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, $j = 1, 2, \ldots, \mu$, όπου a_{ij} είναι το στοιχείο που ανήκει στην i-γραμμή και j-στήλη. Συνήθως λέμε ότι ο πίνακας $A = |a_{ij}|$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, $j = 1, 2, \ldots, \mu$ έχει διαστάσεις $\nu \times \mu$.

<u>Παράδειγμα 1</u>: Νά γράψετε τον πίνακα από τους συντελεστές των μεταβλητών x_1, x_2, αν

$$y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2$$
$$y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2$$

Λύση:

Έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2: Νά γράψετε τούς πίνακες από τούς συντελεστές των x_1, x_2, x_3, αν

i)
$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}$$

ii) $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_2$ iii) $y = kx_1$, $y = x_2$ iv) $y_1 = -x_1$, $y_2 = x_2$

Λύση:

i) έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ii)
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

iii)
$$\Gamma = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iv)
$$\Delta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3: Στις Ανώτερες Δημόσιες Σχολές Εμπορικού Ναυτικού Πλοιάρχων οι ώρες διδασκαλίας των Μαθηματικών κατανέμονται σύμφωνα μέ τον παρακάτω πίνακα (ώρες κατά εβδομάδα)

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{ccc} 1^{\text{ο}}\ \text{εξάμηνο} & 2^{\text{ο}}\ \text{εξάμηνο} & 3^{\text{ο}}\ \text{εξάμηνο} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Μαθηματικά I} \\ \text{Μαθηματικά II} \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & \quad 3 \quad & 3 \\ 3 & \quad 3 \quad & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Λύση:

Ο πίνακας μας δίνει τις εξής πληροφορίες:

Αφού το εξάμηνο έχει 13 εκπαιδευτικές εβδομάδες, έχουμε για τα Μαθηματικά I

$$(3 \times 13) \cdot 3 = 117 \text{ ώρες}$$

και για τα Μαθηματικά II

$$(3 \times 13) \cdot 3 = 117 \text{ ώρες}$$

7.2. Πράξεις με Πίνακες

1ο: Δύο πίνακες διάστασης $\nu \times \mu$ $A = [\alpha_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ θεωρούνται <u>ίσοι</u> αν και μόνο αν τα αντίστοιχα στοιχεία τους α_{ij} και β_{ij} είναι ίσα. π.χ. οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

είναι ίσοι, ενώ $A \neq B$ όταν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

2ο: Είδη πινάκων: Αν ένας πίνακας έχει ίσο αριθμό γραμμών και στηλών, αυτός λέγεται <u>τετραγωνικός</u>.

π.χ. $A = [\alpha_{ij}]$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$ γράφεται στη μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Ένας πίνακας λέγεται <u>πίνακας-γραμμή</u>, όταν $\nu=1$ (μιά μόνο γραμμή), π.χ

$$A=[a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1\nu}] \quad , B=[0, 1, 3].$$

Ένας πίνακας λέγεται <u>πίνακας-στήλη</u>, όταν $\mu=1$ (μιά μόνο στήλη), π.χ. οι πίνακες:

$$A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} , B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} , \Gamma=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \Delta=\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}$$

είναι πίνακες στήλες.

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται <u>μοναδιαίος</u> όταν όλα τα στοιχεία πού βρίσκονται στή διαγώνιο από επάνω αριστερά πρός τα κάτω δεξιά (κύρια διαγώνιος) είναι ίσα με την μονάδα, τα δε υπόλοιπα ίσα με το μηδέν:

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

ο μοναδιαίος πίνακας γράφεται και ως εξής:

$$E=[a_{ij}]\begin{matrix} i=1,2,\ldots,\nu \\ j=1,2,\ldots,\nu \end{matrix} \quad \text{μέ} \quad a_{ij}=\begin{cases} 1 , & i=j \\ 0 , & i\neq j \end{cases}$$

Ο πίνακας A^* λέγεται <u>ανάστροφος</u> ως προς τον πίνακα A, αν οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμές του πίνακα A^*. π.χ. οι πίνακες:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A^*=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$$

είναι ανάστροφος.

3º: <u>Πρόσθεση πινάκων</u>

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Έστω οι $\nu\times\mu$ πίνακες $A=[a_{ij}]$ και $B=[\beta_{ij}]$. Το άθροισμα $A+B=\Gamma$ ορίζεται αν και μόνο αν $\Gamma = [\gamma_{ij}]$ και $\gamma_{ij}=a_{ij}+\beta_{ij}$ $\forall (i,j)$, $i=1,2,\dots,\nu$, $j=1,2,\dots,\mu$

π.χ. αν $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{bmatrix}$, τότε

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+\beta_{11} & a_{12}+\beta_{12}\\ a_{21}+\beta_{21} & a_{21}+\beta_{22}\end{bmatrix}$$

Επίσης $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+0 & 2+3\\ 4-1 & 0+0\\ -1+3 & 1+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 0\\ 2 & 5\end{bmatrix}$

Σημειώνουμε μερικές ιδιότητες της πρόσθεσης:

i) <u>Προσεταιριστική</u>:

$$(A+B)+\Gamma = (A+B)+\Gamma.$$

ii) <u>Αντιμεταθετική</u>:

$$A+B = B+A$$

iii) <u>Ουδέτερο στοιχείο</u>:

Ο πίνακας $\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & & & 0\end{bmatrix}$ που έχει όλα τα στοιχεία του μηδέν συμβολίζεται με 0 και λέγεται <u>*μηδενικός*</u>. Έτσι

$$A+0=0+A=0$$

και ο μηδενικός πίνακας είναι ουδέτερο στοιχείο ως προς την πρόσθεση των πινάκων.

iv) <u>Αντίθετος πίνακας</u>: Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$. Τότε ο πίνακας

$$A' = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{bmatrix}$$ λέγεται αντίθετος πίνακας του A.

Είναι φανερό ότι:

$$A + A' = A' + A = 0$$

Πράγματι έστω ότι

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \text{ τότε } A' = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$A + A' = \begin{bmatrix} 2-2 & 3-3 \\ -1+1 & 0 \\ 3-3 & -4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Η διαφορά δύο πινάκων $\nu \times \mu$ μπορεί τώρα να ορισθεί ως εξής:

$$A - B = A + (-B)$$

π.χ. έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 & 4-2 & 6+3 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

4º <u>Πολλαπλασιασμός πίνακα επί αριθμό</u>

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: <u>Γινόμενο</u> του πίνακα $A = [a_{ig}]$, $i=1,2,\ldots,\nu$ και $g = 1,2,\ldots,\mu$ επί τον αριθμό k λέγεται ο πίνακας $\nu \times \mu$ πού όλα τα στοιχεία του είναι ίσα με το γινόμενο των αντίστοιχων στοιχείων του A επί τον

αριθμό k:

$$k \cdot A = k\left[a_{ij}\right]$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$kA = Ak$$
$$\lambda(kA) = k(\lambda A)$$
$$k(A+B) = kA + kB$$
$$(k+\lambda)A = kA + \lambda B$$
$$1A = A$$
$$0 \cdot A = 0$$

όπου $\lambda, k \in R$.

<u>Παράδειγμα 1:</u>

Έστω $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

τότε $A + B = \begin{bmatrix} 4+1 & 5+0 & 6+1 \\ 3+0 & 1+1 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

<u>Παράδειγμα 2:</u>

Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

τότε $A - B = \begin{bmatrix} 2-4 & 5-2 \\ 3-1 & 6-0 \\ 4-2 & 8-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

<u>Παράδειγμα 3:</u>

Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Να βρείτε το $3A + 2B$.

<u>Λύση:</u>

Έχουμε $3A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -12 \end{bmatrix}$

$$2B = 2\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Άρα $3A+2B = \begin{bmatrix} 6-4 & 3+2 & -3+0 \\ 0-6 & 3+4 & -12+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{bmatrix}$

<u>Παράδειγμα 4:</u>

Να βρείτε τον πίνακα T, για τον οποίο ισχύει η ισότητα $A+2T=B$, όταν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>Λύση:</u>

Έστω ότι ο ζητούμενος πίνακας είναι

$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Τότε εκ της $A+2T=B \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1+2a_{11} & 3+2a_{12} & 2a_{13} \\ 1+2a_{21} & 3+2a_{22} & -1+2a_{23} \\ 2+2a_{31} & 1+2a_{32} & 2a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{lll} 1+2a_{11}=1, & 3+2a_{12}=1, & 2a_{13}=0 \\ 1+2a_{21}=3, & 3+2a_{22}=3, & -1+2a_{23}=-1 \\ 2+2a_{31}=4, & 1+2a_{32}=1, & 2a_{33}=2 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{lll} a_{11}=0, & a_{12}=-1, & a_{13}=0 \\ a_{21}=1, & a_{22}=0, & a_{23}=0 \\ a_{31}=1, & a_{32}=0, & a_{33}=1. \end{array}$$

Έτσι πήραμε:

$$T=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

580. Αν $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -5 & 7\\ 8 & 0 & 3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & -8 & 2 & 5\\ 0 & -3 & 7 & -2\end{bmatrix}$,

$\Gamma=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & -4 & 1 & -1\end{bmatrix}$, $\Delta=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & 3\\ -1 & -2 & 3 & 4\end{bmatrix}$,

βρείτε τα αθροίσματα $A+B$, $A+B+\Delta$, $B+\Gamma+\Delta$.

581. Να βρείτε τους x, y, z, ω, αν

$$\begin{bmatrix}2x & -y\\ 3z & \omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & -3\\ -1 & 4\omega\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & x+y\\ x+\omega & -1\end{bmatrix}$$

582. Αν $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 6 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $\Gamma=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $\Delta=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $E=\begin{bmatrix}-\frac{1}{7} & -\frac{2}{7}\\ 1 & \frac{3}{7}\end{bmatrix}$

τότε δείξετε ότι:

$$A-3B+\Gamma+2\Delta-7E=0$$

583. Να βρείτε τον πίνακα X, αν

$$3X-4\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 6\\ \frac{15}{2} & 3 & 9\end{bmatrix}=X-3\begin{bmatrix}-5 & 1 & 4\\ 5 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

(Απ.: $X=\begin{bmatrix}\frac{17}{2} & \frac{1}{2} & 6\\ \frac{15}{2} & 3 & 9\end{bmatrix}$).

584. Να βρείτε τον πίνακα T, αν $A+2B=3T$ όπου

$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & 3 & -1\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix}$ (Απ.: $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 3 & -1\\ 5 & 1 & 3\end{bmatrix}$).

5º Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Εξετάζουμε κατ' αρχήν μιά ειδική περίπτωση:

Γινόμενο της γραμμής A επί την στήλη B όπου

$$A=(a_1,a_2,\dots,a_\nu) \text{ και } B=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_\nu\end{bmatrix}$$ λέγεται ο αριθμός

$$a_1\beta_1+a_2\beta_2+\dots+a_\nu\beta_\nu .$$

Το γινόμενο δύο πινάκων $A=\left[a_{ik}\right]$ και $B=\left[\beta_{kj}\right]$ ορίζεται, μόνον όταν ο αριθμός των στηλών του πίνακα A είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του πίνακα B.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Γινόμενο AB του πίνακα A επί τον πίνακα B, όπου

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ik}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu k}\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1j} & \dots & \beta_{1\nu}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2j} & \dots & \beta_{2\nu}\\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot\\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot\\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \dots & \beta_{kj} & \dots & \beta_{k\nu}\end{bmatrix}$$

λέγεται ο πίνακας Γ, του οποίου το κοινό στοιχείο της i-γραμμής και της j-στήλης είναι ίσο με το γινόμενο της i-γραμμής επί την j-στήλη, δηλαδή

$$\gamma_{ij}=a_{i1}\beta_{1j}+a_{i2}\beta_{2j}+\dots+a_{ik}\beta_{kj}=\sum_{p=1}^{k}a_{ip}\beta_{pj}$$

Έτσι σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k}\\ \cdot & \dots & \dots & \cdot\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik}\\ \cdot & \dots & \dots & \cdot\\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu k}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1j} & \dots & \beta_{1\nu}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2j} & \dots & \beta_{2\nu}\\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot\\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot\\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot\\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \dots & \beta_{kj} & \dots & \beta_{k\nu}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \dots & \dots & \gamma_{1\nu}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \gamma_{ij} & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \gamma_{\mu 1} & \dots & \dots & \gamma_{\mu\nu}\end{bmatrix} \quad (4)$$

Παραδείγματα:

585. Πότε είναι δυνατός ο πολλαπλασιασμός πίνακα-γραμμής επί πίνακα-στήλη; Να γράψετε το αποτέλεσμα.

Λύση:

Ο πίνακας-γραμμή είναι $(1\times\nu)$ και ο πίνακας-στήλη είναι $(\mu\times 1)$. Σύμφωνα με τον ορισμό του πολλαπλασιασμού πρέπει να είναι $\nu=\mu$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_\nu \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\nu \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1\beta_1+a_2\beta_2+\dots+a_\nu\beta_\nu \end{bmatrix},$$

δηλαδή $\begin{bmatrix}1\times\nu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu\times 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times 1\end{bmatrix}$

586. Να βρείτε τα γινόμενα AB και BA, αν

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση:

Ο πίνακας A είναι 2×3 και ο πίνακας B είναι 3×2, συνεπώς AB θα είναι πίνακας 2×2, δηλαδή τετραγωνικός. Ομοίως $B\cdot A$ θα είναι 3×3.

Έχουμε:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} 1\cdot(-2)+4\cdot1+(-1)(-1) & 1\cdot0+4\cdot3+(-1)\cdot1 \\ 2\cdot(-2)+0\cdot1+1\cdot(-1) & 2\cdot0+0\cdot3+1\cdot1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2\cdot1+0\cdot2 & -2\cdot4+0\cdot0 & -2(-1)+1\cdot0 \\ 1\cdot1+3\cdot2 & 1\cdot4+3\cdot0 & 1(-1)+3\cdot1 \\ -1\cdot1+1\cdot2 & -1\cdot4+(-1)\cdot0 & -1\cdot(-1)+1\cdot1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -2 & -8 & 2 \\ 7 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

587. Για ποιούς πίνακες ορίζονται τα γινόμενα $A\cdot B$ και BA; Για ποιούς πίνακες είναι δυνατή η ισότητα $AB=BA$;

Λύση:

Αν $A=[\alpha_{i\gamma}]$ είναι πίνακας $\mu\times\nu$ και $B=[\beta_{i\gamma}]$ είναι πίνακας $k\times\lambda$, τότε το γινόμενο $A\cdot B$ ορίζεται όταν $\nu=k$ και $B\cdot A$ όταν $\lambda=\mu$. Συνεπώς, τα γινόμενα AB και BA ορίζονται συγχρόνως μόνον όταν A είναι πίνακας $\mu\times\nu$ και B είναι πίνακας $\nu\times\mu$.

Συνεπώς

$$A\cdot B=\boxed{\mu\times\nu}\cdot\boxed{\nu\times\mu}=\boxed{\mu\times\mu} \quad \text{και}$$
$$B\cdot A=\boxed{\nu\times\mu}\cdot\boxed{\mu\times\nu}=\boxed{\nu\times\nu}$$

Άρα AB είναι πίνακας τετραγωνικός $\mu\times\mu$ και BA είναι πίνακας τετραγωνικός $\nu\times\nu$.

Για να είναι $AB=BA$ πρέπει να αληθεύει η ισότητα $\mu=\nu$ όταν A και B είναι τετραγωνικοί πίνακες.

588 Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Να βρείτε όλους τους πίνακες X που ικανοποιούν τη σχέση $A\cdot X=X\cdot A$

Λύση:

Από την άσκηση 3 προκύπτει ότι οι πίνακες X και A

πρέπει να είναι τετραγωνικοί 2×2. Έστω λοιπόν ότι

$$X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, \text{ τότε}$$

$$A\cdot X=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_3 & x_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X\cdot A=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_3 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς $AX=XA \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} x_3 & x_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$x_1=x_4$, $x_3=0$. Άρα

$$X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix}.$$

589. Για την κατασκευή μιας μηχανής χρειάζονται 5 εξαρτήματα τύπου Α, 6 εξαρτήματα τύπου Β και 2 εξαρτήματα τύπου Γ. Το τιμολόγιο αυτών των εξαρτημάτων γράφεται σε μορφή πίνακα-στήλης $\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \\ 1{,}2 \end{bmatrix}$. Αν γραφούν οι τύποι των εξαρτημάτων σε μορφή πίνακα-γραμμής $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, τότε το γινόμενο $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \\ 1{,}2 \end{bmatrix}$ τι περιεχόμενο έχει;

<u>Λύση:</u>

Έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \\ 1{,}2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5\cdot 0{,}5+6\cdot 0{,}3+2\cdot 1{,}2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6{,}7 \end{bmatrix}=6{,}7$$

Σαν αποτέλεσμα πήραμε την αξία όλων των εξαρτημάτων.

590. Νά βρείτε όλους τους τετραγωνικούς πίνακες B για τους οποίους $AB=0$, όταν $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

Λύση:

Έστω ο ζητούμενος πίνακας

$$B=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix} \quad \text{τότε,}$$

$$A\cdot B=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}x_1+x_3 & x_2+x_4\\ x_1+x_3 & x_2+x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{matrix}x_1+x_3=0\\ x_2+x_4=0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}x_3=-x_1\\ x_4=-x_2\end{matrix}$$

συνεπώς οι ζητούμενοι πίνακες έχουν την μορφή:

$$B=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ -x_1 & -x_2\end{bmatrix}$$

591. Αν θεωρήσουμε $A\cdot A=A^2$, $A\cdot A\cdot A=A^3$, $A\cdot A\cdots A=A^\nu$, τότε να βρείτε το A^3, όταν

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

Λύση:

$$A\cdot A=A^2=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 1-1\cdot 2 & -1\cdot 1+1(-1)\\ 2\cdot 1+1\cdot 2 & -1\cdot 2+1\cdot 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 4 & -1\end{bmatrix}.$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 4 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-4 & 1-2\\ 4-2 & -4-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 2 & -5\end{bmatrix}$$

592. Δίνεται το τριώνυμο $P(x)=x^2-5x+6$ και πίνακας $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ Να βρείτε το $P(A)$.

Λύση:

Ας θεωρήσουμε ότι

$$P(A) = A^2 - 5A + 6E \quad \text{. Τότε αφού}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix},$$

$$5A = 5\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}, \quad 6E = 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

Έχουμε

$$P(A) = A^2 - 5A + 6E = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$P(A) = \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

Άλλος τρόπος:

Αφού $P(x) = (x-2)(x-3)$, τότε

$$P(A) = (A-2E)(A-3E) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

593. Δίνονται οι πίνακες A και B:

i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

ii) $A = \begin{matrix} 0 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Να βρείτε τα γινόμενα AB.

(Απ.: $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$).

594. Να βρείτε τον πίνακα AB και να τον συγκρίνετε με τον πίνακα A, όταν:

$$A = \begin{bmatrix} 82 & -90 & 43 & 8 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & -1 & 100 \\ 10 & -17 & 3 & -45 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\text{Απ.:} \quad AB = \begin{bmatrix} 43 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right).$$

595. Να βρείτε το γινόμενο ΑΒΓ, όταν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\text{Απ.:} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \right).$$

596. Να υπολογίσετε τα:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}^3 \quad \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}^5 \quad \begin{bmatrix} \text{συν}\alpha & -\text{ημ}\alpha \\ \text{ημ}\alpha & \text{συν}\alpha \end{bmatrix}^\nu$$

$$\left(\text{Απ.:} \begin{bmatrix} 13 & -0{,}4 \\ 21 & -22 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{συν}\nu\alpha & -\text{ημ}\nu\alpha \\ \text{ημ}\nu\alpha & \text{συν}\nu\alpha \end{bmatrix} \right).$$

597. Να βρείτε την τιμή του τριωνύμου $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, αν θέσουμε όπου x τον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \qquad \left(\text{Απ.:} \ f(A) = \begin{bmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 4 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{bmatrix} \right)$$

598. Αν $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$, βρείτε την τιμή του $f(A)$ με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \qquad \left(\text{Απ.:} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

599. Να βρείτε τον πίνακα X, όταν

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \qquad \left(\text{ΑΠ.: } \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right).$$

600 Να βρείτε τον πίνακα X, όταν

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \left(\text{ΑΠ.: } \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}\right)$$

601. Να δείξετε ότι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$x^2 - (\alpha + \delta)x + \alpha\delta - \beta\gamma = 0.$$

7.3. Ορίζουσες Πινάκων Δεύτερης τάξης

Για τον τετραγωνικό πίνακα εισάγεται μια καινούργια έννοια, που είναι η <u>ορίζουσα πίνακα</u>.

Την ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα A θα την συμβολίζουμε με $\mathcal{D}(A)$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 1</u>: Ορίζουσα πρώτης τάξης (δηλαδή πίνακα που αποτελείται από ένα στοιχείο) λέγεται ο αριθμός εκείνος που είναι το μοναδικό στοιχείο του πίνακα.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 2</u>: Ορίζουσα πίνακα δεύτερης τάξης $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ λέγεται ο αριθμός που υπολογίζεται από τύπο $\mathcal{D}(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ή ακόμη μπορούμε να γράψουμε

$$\mathcal{D}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (5)$$

Η διαγώνιος του τετραγωνικού πίνακα από το αριστερό επάνω στοιχείο έως το δεξιό κάτω λέγεται <u>κύρια διαγώνιος</u>

Η άλλη διαγώνιος λέγεται <u>δευτερεύουσα διαγώνιος</u>.

π.χ. η ορίζουσα του πίνακα $A=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ είναι

$$\mathcal{D}(A)=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1\cdot 3-(-1)\cdot 2=-3+2=-1$$

<u>Παρατήρηση:</u> Η ορίζουσα ενός πίνακα είναι αριθμός σε αντίθεση με τον πίνακα που είναι άλλη μαθηματική έννοια.

Από τον ορισμό (5) προκύπτουν οι ιδιότητες:

1. Από την μετάθεση των γραμμών του πίνακα στη θέση των στηλών και αντίστροφα, η ορίζουσα του πίνακα δεν μεταβάλλεται.

Πράγματι, έστω $A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ και $A^{*}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}$, που έγινε από τον A με μετάθεση της πρώτης γραμμής του A στην πρώτη στήλη και της δεύτερης γραμμής στη δεύτερη στήλη. Τότε

$$\mathcal{D}(A^{*})=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}\overset{(5)}{=\!=}a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\mathcal{D}(A).$$

2. Αν αλλάξουμε την θέση δύο γραμμών (ή δύο στηλών) τότε η απόλυτη τιμή της ορίζουσας δεν μεταβάλλεται, ενώ το πρόσημο αλλάζει στο αντίθετο.

Πράγματι, έστω $A_1=\begin{vmatrix}a_{12} & a_{22}\\ a_{11} & a_{21}\end{vmatrix}$, τότε

$$\mathcal{D}(A_1)=\begin{vmatrix}a_{12} & a_{22}\\ a_{11} & a_{21}\end{vmatrix}=a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}=-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$$

$$\Longleftrightarrow \mathcal{D}(A_1)=-\mathcal{D}(A).$$

3. Αν ο πίνακας έχει δύο ίδιες γραμμές (ή στήλες), τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.

4. Αν όλα τα στοιχεία μιας γραμμής (ή στήλης) είναι

ίσα με μηδέν τότε η ορίζουσα αυτού του πίνακα είναι ίση με μηδέν.

5. Αν πολλαπλασιάσουμε όλα τα στοιχεία μιάς γραμμής (ή στήλης) με τον ίδιο αριθμό, τότε η ορίζουσα τού πίνακα αυτού πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό.

6. Έστω ότι όλα τα στοιχεία κάποιας γραμμής (ή στήλης) ενός πίνακα A είναι άθροισμα δύο όρων, δηλαδή

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21}+\beta_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{τότε}$$

$$\mathcal{D}(A)=\begin{vmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21}+\beta_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \beta_{11} & \alpha_{12} \\ \beta_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

Οι ιδιότητες 3, 4, 5, 6 αποδεικνύονται όπως και οι 1, 2.

7. Η ορίζουσα ενός πίνακα A δεν μεταβάλλεται αν στα στοιχεία κάποιας γραμμής (ή στήλης) τού πίνακα, προσθέσουμε αριθμούς ανάλογους με τα στοιχεία άλλης γραμμής (ή στήλης).

Έστω $A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$ και $A_1=\begin{bmatrix} \alpha_{11}+k\alpha_{12} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21}+k\alpha_{22} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$

Τότε $\mathcal{D}(A_1)=\begin{vmatrix} \alpha_{11}+k\alpha_{12} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21}+k\alpha_{22} & \alpha_{22} \end{vmatrix}\overset{(6)}{=}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} k\alpha_{12} & \alpha_{12} \\ k\alpha_{22} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \mathcal{D}(A_1)=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{12} \\ \alpha_{22} & \alpha_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}+k\cdot 0=$$

$$=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}=\mathcal{D}(A).$$

Παράδειγμα 1: Να υπολογίσετε την ορίζουσα των πινάκων

$$A=\begin{bmatrix}\text{ημ}\alpha & \text{συν}\alpha\\ \text{ημ}\beta & \text{συν}\beta\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}\text{συν}\alpha & \text{ημ}\alpha\\ \text{ημ}\beta & \text{συν}\beta\end{bmatrix}$$

$$\Gamma=\begin{bmatrix}\text{ημ}\alpha+\text{ημ}\beta & \text{συν}\beta+\text{συν}\alpha\\ \text{συν}\beta-\text{συν}\alpha & \text{ημ}\alpha-\text{ημ}\beta\end{bmatrix}, \qquad \Delta=\begin{bmatrix}1 & \log_\beta\alpha\\ \log_\alpha\beta & 1\end{bmatrix}$$

<u>Λύση:</u>

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (5), έχουμε:

$$\mathcal{D}(A)=\begin{vmatrix}\text{ημ}\alpha & \text{συν}\alpha\\ \text{ημ}\beta & \text{συν}\beta\end{vmatrix}=\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha=\text{ημ}(\alpha-\beta).$$

$$\mathcal{D}(B)=\begin{vmatrix}\text{συν}\alpha & \text{ημ}\alpha\\ \text{ημ}\beta & \text{συν}\beta\end{vmatrix}=\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta=\text{συν}(\alpha+\beta)$$

$$\mathcal{D}(\Gamma)=\begin{vmatrix}\text{ημ}\alpha+\text{ημ}\beta & \text{συν}\beta+\text{συν}\alpha\\ \text{συν}\beta-\text{συν}\alpha & \text{ημ}\alpha-\text{ημ}\beta\end{vmatrix}=\text{ημ}^2\alpha-\text{ημ}^2\beta-(\text{συν}^2\beta-\text{συν}^2\alpha)=$$

$$=\text{ημ}^2\alpha+\text{συν}^2\alpha-(\text{ημ}^2\beta+\text{συν}^2\beta)=1-1=0.$$

$$\mathcal{D}(\Delta)=\begin{vmatrix}1 & \log_\beta\alpha\\ \log_\alpha\beta & 1\end{vmatrix}=1-\log_\alpha\beta\cdot\log_\beta\alpha=1-\log_\alpha\beta\cdot\frac{1}{\log_\alpha\beta}=$$

$$= \quad - \quad = $$

7.4. Ορίζουσες Πινάκων Τρίτης τάξης

Ας εξετάσουμε τον πίνακα τρίτης τάξης

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

Είναι φανερό ότι κάθε στοιχείο του πίνακα βρίσκεται στη διασταύρωση μιας γραμμής και μιας στήλης. π.χ. το στοιχείο a_{12} ορίζει την πρώτη γραμμή και την δεύτερη στήλη. Αν τώρα διαγράψουμε αυθαίρετα την γραμμή και την στήλη κάποιου στοιχείου του πίνακα, τότε θα πάρουμε νέο πίνακα δεύτερης τάξης.

π.χ. για το στοιχείο a_{12} είναι $A_{12}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$ για το στοιχείο a_{23}, είναι $A_{23}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$, κλ.π.

Επειδή τα στοιχεία του πίνακα τρίτης τάξης είναι 9 και οι <u>υποπίνακες</u> δεύτερης τάξης θα είναι 9: $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Ορίζουσα πίνακα τρίτης τάξης

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

λέγεται ο αριθμός που υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\mathcal{D}(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13} \quad (6)$$

όπου

$$\left.\begin{aligned} M_{11}&=\mathcal{D}(A_{11})=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23} \\ M_{12}&=\mathcal{D}(A_{12})=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23} \\ M_{13}&=\mathcal{D}(A_{13})=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Ο τύπος (6) που ορίζει την ορίζουσα τρίτης τάξης με την βοήθεια των (7) θα πάρει την μορφή:

$$\mathcal{D}(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{31}a_{22} \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{D}(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - $$
$$- a_{12}a_{23}a_{32} - a_{32}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \qquad (8)$$

Από τον τύπο (8) προκύπτει ότι η ορίζουσα του πίνακα τρίτης τάξης είναι άθροισμα έξι προσθετέων. Κάθε προσθεταίος είναι γινόμενο τριών στοιχείων, ένα από κάθε γραμμή και κάθε στήλη.

Ο τύπος (8) σχηματικά παρουσιάζεται ως εξής:

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Ο τύπος (8) λέγεται <u>ανάπτυγμα της ορίζουσας</u> του πίνακα τρίτης τάξης από τα στοιχεία της πρώτης γραμμής.

Οι ιδιότητες 1–7 των οριζουσών του πίνακα δεύτερης τάξης ισχύουν και για τις ορίζουσες των πινάκων τρίτης τάξης.

<u>Παραδείγματα:</u>

602. Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

<u>Λύση:</u>

Γράφουμε:

$$\begin{array}{ccccc} + & + & \overset{+}{-} & - & - \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}$$

, τότε

$$\mathcal{D} = 2\cdot2\cdot0 + 2\cdot1\cdot3 + 1\cdot1\cdot1 - 2\cdot1\cdot0 -$$

$- 1\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot 2\cdot 1 = 6 + 1 - 2 - 6 = -1$

Με τον τύπο (6) έχουμε

$$\mathcal{D} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 2(-3) + 1 - 6 =$$

$$= -2 + 6 + 1 - 6 = -1.$$

603. Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix}$$

Λύση:

Εδώ θα εφαρμόσουμε την ιδιότητα 7 για να πάρουμε δύο μηδενικά στην πρώτη γραμμή, γι' αυτό αφαιρούμε την τρίτη στήλη από την πρώτη και την δεύτερη διαδοχικά. Τότε έχουμε:

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha-\gamma & \beta & \gamma \\ \alpha^3-\gamma^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha-\gamma & \beta-\gamma & \gamma \\ \alpha^3-\gamma^3 & \beta^3-\gamma^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} =$$

$$= 0\cdot\begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} \alpha-\gamma & \beta-\gamma \\ \alpha^3-\gamma^3 & \beta^3-\gamma^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha-\gamma)(\beta^3-\gamma^3) - (\beta-\gamma)(\alpha^3-\gamma^3) =$$
$$= (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-\alpha^2-\alpha\gamma-\gamma^2) =$$
$$= (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\beta^2+\beta\gamma-\alpha^2-\alpha\gamma) =$$
$$= (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)[(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)+\gamma(\beta-\alpha)] =$$
$$= (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)(\beta+\alpha+\gamma).$$

7.5. Ορίζουσες πινάκων ανώτερων τάξεων

Τις ορίζουσες των πινάκων 4-ης και άνω τάξεων θα ορίσουμε αναλογικά με την ορίζουσα του πίνακα τρίτης τάξης.

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Ορίζουσα του πίνακα A ν-ης τάξης λέγεται ο αριθμός που υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\mathcal{D}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{\nu-1} a_{1\nu}M_{1\nu} \qquad (9)$$

Στον τύπο (9) M_{ij} είναι η ορίζουσα του υποπίνακα $(\nu-1)$-ης τάξης που αντιστοιχεί στο στοιχείο a_{ij}. Η ορίζουσα M_{ij} λέγεται <u>ελάσσων ορίζουσα</u>

Αποδεικνύεται ότι η ορίζουσα ν-στης τάξεως υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\mathcal{D}(A) = (-1)^{i+1} a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2}M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+\nu} a_{i\nu}M_{i\nu} \quad (10)$$

Ο τύπος (10) λέγεται <u>*ανάπτυγμα*</u> της ορίζουσας από τα στοιχεία κάποιας γραμμής. Όμοιος τύπος μπορεί να γραφεί και για ανάπτυγμα από τα στοιχεία κάποιας στήλης (οι γραμμές και οι στήλες είναι ισοδύναμες στην ορίζουσα). Οι ιδιότητες 1-7 των οριζουσών δεύτερης τάξης επεκτείνονται και στις ορίζουσες ανωτέρων τάξεων.

Παραδείγματα:

604. Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} \eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\nu\alpha & 1 \\ \eta\mu\beta & \sigma\upsilon\nu\beta & 1 \\ \eta\mu\gamma & \sigma\upsilon\nu\gamma & 1 \end{vmatrix}$$

Λύση:

Εδώ μπορούμε να κάνουμε δύο μηδενικά στην τρίτη στήλη αφαιρώντας από την τρίτη και δεύτερη γραμμή την πρώτη:

$$\begin{vmatrix} \eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\nu\alpha & 1 \\ \eta\mu\beta & \sigma\upsilon\nu\beta & 1 \\ \eta\mu\gamma & \sigma\upsilon\nu\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\nu\alpha & 1 \\ \eta\mu\beta-\eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha & 0 \\ \eta\mu\gamma-\eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\nu\gamma-\sigma\upsilon\nu\alpha & 0 \end{vmatrix} \overset{(10)}{=}$$

$$= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} \eta\mu\beta-\eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha \\ \eta\mu\gamma-\eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\nu\gamma-\sigma\upsilon\nu\alpha \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= 1\cdot\left[(\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\gamma-\sigma\upsilon\nu\alpha)-(\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha)(\eta\mu\gamma-\eta\mu\alpha)\right] =$$

$$= \eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma-\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\gamma+\cancel{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}-\eta\mu\gamma\,\sigma\upsilon\nu\beta+$$
$$+\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\gamma\,\sigma\upsilon\nu\alpha-\cancel{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\alpha} =$$
$$= (\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma-\sigma\upsilon\nu\beta\,\eta\mu\gamma)+(\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\beta)+$$
$$+(\eta\mu\gamma\,\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\gamma\,\eta\mu\alpha) = \eta\mu(\beta-\gamma)+\eta\mu(\alpha-\beta)+\eta\mu(\gamma-\alpha).$$

605. Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} x & x' & ax+\beta x' \\ y & y' & ay+\beta y' \\ z & z & az+\beta z' \end{vmatrix}$$

Λύση:

Εδώ θα εφαρμόσουμε τις ιδιότητες της ορίζουσας. Έτσι έχουμε:

$$\begin{vmatrix} x & x' & ax+\beta x' \\ y & y' & ay+\beta y' \\ z & z' & az+\beta z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' & ax \\ y & y' & ay \\ z & z' & az \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x' & \beta x' \\ y & y' & \beta y' \\ z & z' & \beta z' \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} x & x' & x \\ y & y' & y \\ z & z' & z \end{vmatrix} + \beta\begin{vmatrix} x & x' & x' \\ y & y' & y' \\ z & z' & z' \end{vmatrix} = a\cdot 0+\beta\cdot 0 = 0$$

αφού οι ορίζουσες έχουν από δύο ίδιες στήλες.

606. Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} (a_1+\beta_1)^2 & a_1^2+\beta_1^2 & a_1\beta_1 \\ (a_2+\beta_2)^2 & a_2^2+\beta_2^2 & a_2\beta_2 \\ (a_3+\beta_3)^2 & a_3^2+\beta_3^2 & a_3\beta_3 \end{vmatrix}$$

Λύση:

Τα στοιχεία της τρίτης στήλης πολλαπλασιάζουμε επί 2 και τα προσθέτουμε στα στοιχεία της δεύτερης στήλης:

$$\begin{vmatrix} (a_1+\beta_1)^2 & a_1^2+\beta_1^2 & a_1\beta_1 \\ (a_2+\beta_2)^2 & a_2^2+\beta_2^2 & a_2\beta_2 \\ (a_3+\beta_3)^2 & a_3^2+\beta_3^2 & a_3\beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_1+\beta_1)^2 & a_1^2+\beta_1^2+2a_1\beta_1 & a_1\beta_1 \\ (a_2+\beta_2)^2 & a_2^2+\beta_2^2+2a_2\beta_2 & a_2\beta_2 \\ (a_3+\beta_3)^2 & a_3^2+\beta_3^2+2a_3\beta_3 & a_3\beta_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a_1+\beta_1)^2 & (a_1+\beta_1)^2 & a_1\beta_1 \\ (a_2+\beta_2)^2 & (a_2+\beta_2)^2 & a_2\beta_2 \\ (a_3+\beta_3)^2 & (a_3+\beta_3)^2 & a_3\beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

607. Να δείξετε ότι

$$D=\begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} & \eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2} & \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \sigma\upsilon\nu\frac{\beta-\gamma}{2} & \eta\mu\frac{\beta+\gamma}{2} & \sigma\upsilon\nu\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \sigma\upsilon\nu\frac{\gamma-\alpha}{2} & \eta\mu\frac{\gamma+\alpha}{2} & \sigma\upsilon\nu\frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left[\eta\mu(\beta-\alpha)+\eta\mu(\gamma-\beta)+\eta\mu(\alpha-\gamma)\right]$$

Λύση:

Γράφουμε το ανάπτυγμα από τα στοιχεία της πρώτης στήλης:

$$D=(-1)^{1+1}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}\begin{vmatrix} \eta\mu\frac{\beta+\gamma}{2} & \sigma\upsilon\nu\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \eta\mu\frac{\gamma+\alpha}{2} & \sigma\upsilon\nu\frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix}+(-1)^{2+1}\sigma\upsilon\nu\frac{\beta-\gamma}{2}\begin{vmatrix} \eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2} & \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \eta\mu\frac{\alpha+\gamma}{2} & \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\gamma}{2} \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+1}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma-\alpha}{2}\begin{vmatrix} \eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2} & \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \eta\mu\frac{\beta+\gamma}{2} & \sigma\upsilon\nu\frac{\beta+\gamma}{2} \end{vmatrix}=$$

$$=\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\eta\mu\frac{\beta+\gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma+\alpha}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{\beta+\gamma}{2}\eta\mu\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\frac{\beta-\gamma}{2}\left(\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\gamma}{2}-\right.$$

$$\left.-\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\eta\mu\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma-\alpha}{2}\left(\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\beta+\gamma}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}\eta\mu\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=$$

$$=\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}\eta\mu\left(\frac{\beta+\gamma}{2}-\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\frac{\beta-\gamma}{2}\eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)+$$

$$+\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma-\alpha}{2}\eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}\eta\mu\frac{\beta-\alpha}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{\beta-\gamma}{2}\eta\mu\frac{\beta-\gamma}{2}+$$

$$+\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma-\alpha}{2}\eta\mu\frac{\alpha-\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left(2\eta\mu\frac{\beta-\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\beta-\alpha}{2}+2\eta\mu\frac{\gamma-\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma-\beta}{2}+\right.$$

$$\left.+2\eta\mu\frac{\alpha-\gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\eta\mu(\beta-\alpha)+\eta\mu(\gamma-\beta)+\eta\mu(\alpha-\gamma)\right].$$

608. Να υπολογίσετε την ορίζουσα τετάρτης τάξης

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & \beta & 0 & 2 \\ 1 & 2 & \gamma & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{vmatrix}.$$

Λύση:

Επειδή η τρίτη γραμμή έχει τρία μηδενικά, γράφουμε το ανάπτυγμα:

$$\mathcal{D} = 0\cdot\begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} + (-1)^{4+4}\cdot\delta\cdot\begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 2 & \gamma \end{vmatrix} =$$

$$= \delta\cdot\gamma\,(a\beta - 0\cdot 3) = a\beta\gamma\delta.$$

609. Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

Λύση: Από την δεύτερη και τρίτη γραμμή αφαιρούμε τα στοιχεία της πρώτης γραμμής. Τότε παίρνουμε:

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} y-x & y^2-x^2 \\ z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} y-x & (y-x)(y+x) \\ z-x & (z-x)(z+x) \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & y+x \\ 1 & z+x \end{vmatrix} =$$

$$= (y-x)(z-x)(z+x-y-x) = (y-x)(z-x)(z-y).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Υπολογίσετε τις ορίζουσες:

610.

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} \qquad (\text{Απ.: } 100)$$

611

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix} \qquad (\text{Απ.: } 20)$$

612.

$$D = \begin{vmatrix} \alpha+x & x & x \\ x & \beta+x & x \\ x & x & \gamma+x \end{vmatrix} \qquad (\text{Απ.: } x(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)+\beta\gamma\alpha)$$

613.

$$D = \begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix} \qquad (\text{Απ.: } 1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών, να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

614.

$$D = \begin{vmatrix} \eta\mu^2\alpha & 1 & \sigma\upsilon\nu^2\alpha \\ \eta\mu^2\beta & 1 & \sigma\upsilon\nu^2\beta \\ \eta\mu^2\gamma & 1 & \sigma\upsilon\nu^2\gamma \end{vmatrix} \qquad (\text{Απ.: } 0).$$

615.

$$D = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \gamma & 1 \\ \beta+\gamma & \alpha & 1 \\ \alpha+\gamma & \beta & 1 \end{vmatrix} \qquad (\text{Απ.: } 0)$$

616.

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta\gamma \\ 1 & \beta & \gamma\alpha \\ 1 & \gamma & \alpha\beta \end{vmatrix}$$

(ΑΠ.: $(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$).

617.

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

(ΑΠ.: 17)

618.

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} (\alpha+\beta)^2 & \gamma^2 & \gamma^2 \\ \alpha^2 & (\beta+\gamma)^2 & \alpha^2 \\ \beta^2 & \beta^2 & (\gamma+\alpha)^2 \end{vmatrix}$$

ΑΠ.: $2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)^3$

619. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

620. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 0$$

7.6. Αντίστροφος Πίνακας. Τρόποι υπολογισμού.

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας A ν-στής τάξης.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Ο πίνακας A^{-1} λέγεται <u>αντίστροφος</u>

του πίνακα A αν και μόνο αν αληθεύει η ισότητα

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E \qquad (11)$$

όπου $E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & . & \dots & 1 \end{vmatrix}$ είναι μοναδιαίος πίνακας

Αποδεικνύεται ότι ένας τετραγωνικός πίνακας A έχει μοναδικό αντίστροφο πίνακα, αν και μόνο αν, η ορίζουσά του $|A| \neq 0$.

Για να βρούμε τον τύπο του αντίστροφου πίνακα τρίτης τάξης αποδεικνύουμε μερικές βοηθητικές σχέσεις.

Αν συμβολίσουμε με $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, τότε η ορίζουσα πίνακα τρίτης τάξης

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

μπορεί να εκφραστεί από τους τύπους:

$$\mathcal{D}(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$
$$\mathcal{D}(A) = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \qquad \text{ή}$$
$$\mathcal{D}(A) = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$
$$\mathcal{D}(A) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$
$$\mathcal{D}(A) = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$
$$\mathcal{D}(A) = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία κάποιας γραμμής (ή στήλης) με A_{ij} πού αντιστοιχούν σε στοιχεία άλλης γραμμής (ή στήλης), τότε το άθροισμα των γινομένων είναι μηδέν.

Πράγματι, έστω $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} =$

$$= a_{11}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= -\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{33} + \alpha_{11}\alpha_{13}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{13}\alpha_{11}\alpha_{32} + \alpha_{13}\alpha_{12}\alpha_{31} = 0$$

Έτσι έχουμε:

$$\alpha_{11}A_{21} + \alpha_{12}A_{22} + \alpha_{13}A_{23} = 0$$

$$\alpha_{11}A_{31} + \alpha_{12}A_{32} + \alpha_{13}A_{32} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Έστω λοιπόν πίνακας τρίτης τάξης A μέ $\mathcal{D}(A) \neq 0$, τότε ο αντίστροφος πίνακας υπάρχει και ορίζεται από τον τύπο:

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathcal{D}(A)}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \qquad (12).$$

<u>Απόδειξη:</u>

Πρέπει και αρκεί να είναι:

$$A^{-1}\cdot A = E \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\mathcal{D}} & \frac{A_{21}}{\mathcal{D}} & \frac{A_{31}}{\mathcal{D}} \\ \frac{A_{12}}{\mathcal{D}} & \frac{A_{22}}{\mathcal{D}} & \frac{A_{32}}{\mathcal{D}} \\ \frac{A_{13}}{\mathcal{D}} & \frac{A_{23}}{\mathcal{D}} & \frac{A_{33}}{\mathcal{D}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathcal{D}}(\underbrace{A_{11}\alpha_{11} + A_{21}\alpha_{21} + A_{31}\alpha_{31}}_{0}) & \frac{1}{\mathcal{D}}(\underbrace{A_{11}\alpha_{12} + A_{21}\alpha_{22} + A_{31}\alpha_{32}}_{0}) & \frac{1}{\mathcal{D}}(\underbrace{A_{11}\alpha_{13} + A_{21}\alpha_{23} + A_{31}\alpha_{33}}_{0}) \\ \frac{1}{\mathcal{D}}(\underbrace{A_{12}\alpha_{21} + A_{22}\alpha_{21} + A_{32}\alpha_{11}}_{0}) & \frac{1}{\mathcal{D}}(\underbrace{A_{12}\alpha_{12} + A_{22}\alpha_{22} + A_{32}\alpha_{32}}_{0}) & \frac{1}{\mathcal{D}}(\underbrace{A_{12}\alpha_{13} + A_{22}\alpha_{23} + A_{32}\alpha_{33}}_{0}) \\ \frac{1}{\mathcal{D}}(\underbrace{A_{13}\alpha_{11} + A_{23}\alpha_{21} + A_{33}\alpha_{31}}_{0}) & \frac{1}{\mathcal{D}}(\underbrace{A_{13}\alpha_{12} + A_{23}\alpha_{22} + A_{33}\alpha_{32}}_{0}) & \frac{1}{\mathcal{D}}(\underbrace{A_{13}\alpha_{13} + A_{23}\alpha_{23} + A_{33}\alpha_{33}}_{0}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = E.$$

Ο αριθμός A_{ij} λέγεται <u>αλγεβρικό συμπλήρωμα</u> του πίνακα.

Ας δούμε τώρα πως θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο πίνακα δεύτερης τάξης. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{με} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ή}$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

<u>Πρώτος τρόπος:</u>

Εφαρμόζουμε τον τύπο (12)

Έχουμε: $$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Όμως

$$A_{11} = (-1)^{1+1} a_{22} = a_{22}, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} a_{12} = -a_{12}$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} a_{21} = -a_{21}, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} a_{11}.$$

Τότε
$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{matrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{matrix} = \frac{1}{D} \begin{matrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{matrix}$$

<u>Άλλος τρόπος:</u> Ας λύσουμε αυτό το πρόβλημα ξεκινώντας από τον ορισμό του αντιστρόφου πίνακα:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\left(\begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} &= 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} &= 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} &= 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} &= 1 \end{aligned}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} &= 1 \\ a_{21}x_{21} + a_{22}x_{21} &= 0 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} &= 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} &= 1 \end{aligned}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{l} x_{11} = -\dfrac{a_{22}}{a_{21}} x_{21} \\ a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1 \\ x_{12} = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_{22} \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} x_{11} = -\dfrac{a_{22}}{a_{21}} x_{21} \\ x_{21}\left(-\dfrac{a_{22}a_{11}}{a_{21}} + a_{12}\right) = 1 \\ x_{22}\left(-\dfrac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} + a_{22}\right) = 1 \\ x_{12} = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_{22} \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} x_{11} = -\dfrac{a_{22}}{a_{21}} x_{21} \\ x_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ x_{22} = \dfrac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ x_{12} = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_{22} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ll} x_{21} = -\dfrac{a_{21}}{D} & x_{11} = -\dfrac{a_{22}}{D} \\ x_{22} = \dfrac{a_{11}}{D} & x_{12} = -\dfrac{a_{12}}{D} \end{array}\right)$$

Έτσι πήραμε:

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \qquad (13)$$

<u>Παράδειγμα 1</u>: Να βρείτε τον αντίστροφο πίνακα A^{-1} αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

<u>Λύση</u>:

Κατ' αρχήν βρίσκουμε την ορίζουσα του πίνακα A

$$D(A) = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot 1 - 2 - 0 = 1 \neq 0.$$

Σύμφωνα με τον τύπο (12), έχουμε

$$A^{-1} = 1\cdot\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \quad , \text{ όπου}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -12.$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 17$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Τελικά παίρνουμε τον αντίστροφο πίνακα:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2:

Να βρείτε τον αντίστροφο πίνακα του A αν

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Λύση:

Σύμφωνα με τον τύπο (12) τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου αλλάζουν μεταξύ τους θέση και τα στοιχεία της άλλης διαγωνίου αλλάζουν πρόσημο. Έτσι παίρνουμε:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

7.7. Επίλυση γραμμικών συστημάτων

Με την βοήθεια των πινάκων θα δώσουμε μία μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων.

Έστω το σύστημα:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= d_2 \end{aligned} \qquad (14)$$

Το σύστημα (14) λέγεται γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους (μεταβλητές).

Αν συμβολίσουμε με

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}(A)\neq 0, \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix},$$

τότε το σύστημα (14) θα γραφεί στη μορφή

$$AX=B \qquad (15)$$

Την εξίσωση (15) πολλαπλασιάζουμε επί τον πίνακα A^{-1}, που είναι αντίστροφος του πίνακα A :

$$A^{-1}\cdot AX = A^{-1}\cdot B \iff$$

$$EX = A^{-1}B \iff$$

$$X = A^{-1}B \iff$$

$$X=\frac{1}{\mathcal{D}(A)}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{\mathcal{D}(A)}\begin{bmatrix} a_{22}d_1-a_{12}d_2 \\ -a_{21}d_1+a_{11}d_2 \end{bmatrix} \iff$$

$$x_1=\frac{1}{\mathcal{D}(A)}\left(a_{22}d_1-a_{12}d_2\right)$$

$$x_2=\frac{1}{\mathcal{D}(A)}\left(a_{11}d_2-a_{21}d_1\right).$$

Επειδή $a_{22}d_1-a_{12}d_2=\begin{vmatrix} d_1 & a_{12} \\ d_2 & a_{22} \end{vmatrix}=\mathcal{D}_1$ και

$$a_{11}d_2-a_{21}d_1=\begin{vmatrix} a_{11} & d_1 \\ a_{12} & d_2 \end{vmatrix}=\mathcal{D}_2, \text{ τότε}$$

$$x_1=\frac{\mathcal{D}_1}{\mathcal{D}(A)}=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_{12} \\ d_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2=\frac{\mathcal{D}_2}{\mathcal{D}(A)}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & d_1 \\ a_{12} & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad (16)$$

Οι τύποι (16) ορίζουν μοναδική λύση του συστήματος (14) αν και μόνο αν $\mathcal{D}(A)\neq 0$ δηλαδή

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$$

Παράδειγμα

Νά λύσετε το σύστημα με τη βοήθεια των πινάκων

$$7x+3y=10$$

$$2x-9y=-7$$

Λύση:

Έχουμε

$$A=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 2 & -9\end{bmatrix} \quad \text{και } D(A)=\begin{vmatrix}7 & 3\\ 2 & -9\end{vmatrix}=-63-6=-69\neq 0$$

$$B=\begin{bmatrix}10\\ -7\end{bmatrix}$$ Τότε

$$X=A^{-1}\cdot B$$

Βρίσκουμε τον $A^{-1}=-\frac{1}{69}\begin{bmatrix}-9 & -3\\ -2 & 7\end{bmatrix}$ οπότε

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9 & -3\\ -2 & 7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}10\\ -7\end{bmatrix}\left(-\frac{1}{69}\right)\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=-\frac{1}{69}\begin{bmatrix}-90 & +21\\ -20 & -49\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-69\\ -69\end{bmatrix}\left(-\frac{1}{69}\right)\Leftrightarrow$$

$$x=1$$

$$y=1.$$

Έστω τώρα το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \dots\ a_{1\nu}x_\nu=d_1\\
&a_{12}x_1+a_{22}x_2+\ \dots\ a_{2\nu}x_\nu=d_2\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{1\nu}x_1+a_{2\nu}x_2+\ \dots\ a_{\nu\nu}x_\nu=d
\end{aligned}$$

Ας συμβολίσουμε με

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\dots & a_{1\nu}\\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2\nu}\\ \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{\nu1} & a_{\nu2}\dots & a_{\nu\nu}\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_\nu\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}d_1\\ d_2\\ \vdots\\ d_\nu\end{bmatrix}$$

Τότε το παραπάνω σύστημα θα γράφει στη μορφή:

$$AX = B \iff$$

$$\boxed{X = A^{-1}B} \qquad (17) \quad \text{αν } \mathcal{D}(A) \neq 0$$

<u>Παραδείγματα</u>

Να λύσετε με την βοήθεια των πινάκων τα συστήματα:

621.

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= d_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= d_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= d_3 \end{aligned}$$

<u>Λύση:</u>

Έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Υποθέτουμε ότι $\mathcal{D}(A) \neq 0$, τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathcal{D}(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix},$$ και σύμφωνα με

τον τύπο (17) έχουμε:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathcal{D}(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathcal{D}(A)} \begin{bmatrix} d_1A_{11} + d_2A_{21} + d_3A_{31} \\ d_1A_{12} + d_2A_{22} + d_3A_{32} \\ d_1A_{13} + d_2A_{23} + d_3A_{33} \end{bmatrix} \qquad (i)$$

Αλλά είναι γνωστό ότι:

$$d_1A_{11}+d_2A_{21}+d_3A_{31}=\begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} \\ d_2 & a_{22} & a_{23} \\ d_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\mathcal{D}x$$

$$d_1A_{12}+d_2A_{22}+d_3A_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & d_1 & a_{13} \\ a_{21} & d_2 & a_{23} \\ a_{31} & d_3 & a_{33}\end{vmatrix}=\mathcal{D}y$$

$$d_1A_{13}+d_2A_{23}+d_3A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & d_3\end{vmatrix}=\mathcal{D}z\ ,$$

συνεπώς από τη σχέση (i), παίρνουμε:

$$x=\frac{\mathcal{D}x}{\mathcal{D}(A)}$$

$$y=\frac{\mathcal{D}y}{\mathcal{D}(A)} \qquad (18)$$

$$z=\frac{\mathcal{D}z}{\mathcal{D}(A)}$$

Οι τύποι (18) λέγονται τύποι του Kramer

622.

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2-x_3&=1\\ x_1+x_2+2x_3&=2\\ 2x_1+2x_2+5x_3&=3\end{aligned}$$

Λύση

Έχουμε:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5\end{bmatrix} \text{ και } \mathcal{D}(A)=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5\end{vmatrix}=$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 1 \neq 0, \quad B = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{21} = -1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -12$$

$$A_{31} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{12} = -1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{22} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 17, \qquad A_{23} = -1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{32} = -1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{33} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Έτσι πήραμε:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Τότε από την εξίσωση

$$X = A^{-1}\cdot B \quad \text{έχουμε}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -24 & 15 \\ -1 & +34 & -21 \\ 0 & -4 & +3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = -8, \quad x_2 = 12, \quad x_3 = -1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Νά λύσετε με τη βοήθεια των πινάκων τα γραμμικά συστήματα:

623. $\begin{aligned} 3x - 5y &= 13 \\ 2x - 7y &= 81 \end{aligned}$ (ΑΠ: $x = 16$, $y = 7$).

624. $\begin{aligned} 3x - 4y &= 1 \\ 3x + 4y &= 18 \end{aligned}$ (ΑΠ. $x = 2$, $y = 3$)

625 $\begin{aligned} 2\alpha x - 3\beta y &= 0 \\ 3\alpha x - 6\beta y &= \alpha\beta \end{aligned}$ (ΑΠ. $x = -\beta$, $y = -\frac{2}{3}\alpha$)

626 $\begin{aligned} 5x - 3y &= 4 \\ 7x - 5y &= -8 \end{aligned}$ (ΑΠ. $x = 11$, $y = 17$).

627 $\begin{aligned} 3x - 4y &= 2 \\ 4x + 3y &= -14 \end{aligned}$ (ΑΠ. $x = y = -2$).

628 $\begin{aligned} 2x - 8y + z &= 8 \\ x - 3y - 5z &= 6 \\ 3x + y - 7z &= -4 \end{aligned}$ (ΑΠ. $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$).

629 $\begin{aligned} 7x + 2y + 3z &= 15 \\ 5x - 3y + 2z &= 15 \\ 10x - 11y + 5z &= 36 \end{aligned}$ (ΑΠ.: $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$).

630. $\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ x + 3z &= 16 \\ 5y - z &= 10 \end{aligned}$ (ΑΠ.: $x = 1$, $y = 3$, $z = 5$).